

22.03.21.

Тема:

Понятие первообразной. Правила нахождения первообразных. Решение примеров на нахождение первообразных.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:

<https://www.youtube.com/watch?v=3vR27xG0pci>

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Первообразная

Рассмотрим движение материальной точки вдоль прямой. Пусть закон движения точки задан функцией $s(t)$. Тогда мгновенная скорость $v(t)$ равна производной функции $s(t)$, т. е. $v(t) = s'(t)$.

В практике встречается обратная задача: по заданной скорости движения точки $v(t)$ найти закон движения, т. е. найти такую функцию $s(t)$, производная которой равна $v(t)$. Функцию $s(t)$, такую, что $s'(t) = v(t)$, называют *первообразной функции* $v(t)$.

Например, если $v(t) = at$, где a — заданное число, то функция $s(t) = \frac{at^2}{2}$ является первообразной функции $v(t)$, так как $s'(t) = \left(\frac{at^2}{2}\right)' = at = v(t)$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Например, функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$, функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной функции $f(x) = x^3$, так как $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

Задача 1

Доказать, что функции $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3} + 1$, $\frac{x^3}{3} - 4$ являются первообразными функции $f(x) = x^2$.

► 1) Обозначим $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, тогда $F_1'(x) = 3 \cdot \frac{x^2}{3} = x^2 = f(x)$.

2) $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, $F_2'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 1\right)' = x^2 = f(x)$.

3) $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4$, $F_3'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 4\right)' = x^2 = f(x)$. ◀

Вообще, любая функция $\frac{x^3}{3} + C$, где C — постоянная, является первообразной функции x^2 . Это следует из того, что производная постоянной равна нулю. Этот пример показывает, что для заданной функции её первообразная определяется неоднозначно.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные одной и той же функции $f(x)$. Тогда $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$. Производная их разности $g(x) = F_1(x) - F_2(x)$ равна нулю, так как $g'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Если $g'(x) = 0$ на некотором промежутке, то касательная к графику функции $y = g(x)$ в каждой точке этого промежутка параллельна оси Ox . Поэтому графиком функции $y = g(x)$ является прямая, параллельная оси Ox , т. е. $g(x) = C$, где C — некоторая постоянная. Из равенств $g(x) = C$, $g(x) = F_1(x) - F_2(x)$ следует, что $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Итак, если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то все первообразные функции $f(x)$ записываются в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

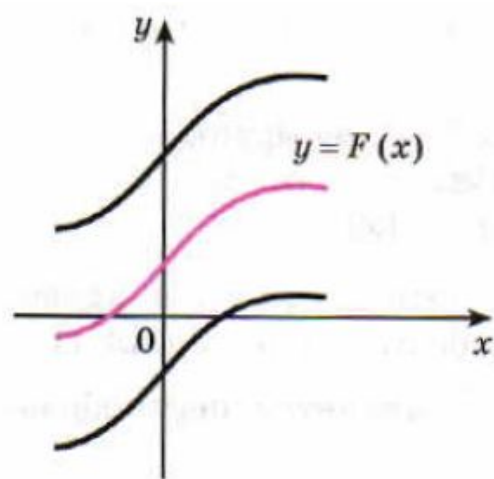


Рис. 150

Рассмотрим графики всех первообразных заданной функции $f(x)$. Если $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, то любая первообразная этой функции получается прибавлением к $F(x)$ некоторой постоянной: $F(x) + C$. Графики функций $y = F(x) + C$ получаются из графика $y = F(x)$ сдвигом вдоль оси Oy (рис. 150). Выбором C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

Задача 2 Для функции $f(x) = x$ найти такую первообразную, график которой проходит через точку $(2; 5)$.

- Все первообразные функции $f(x) = x$ находятся по формуле $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, так как $F'(x) = x$. Найдём число C , такое, чтобы график функции $y = \frac{x^2}{2} + C$ проходил через точку $(2; 5)$. Подставляя $x = 2$, $y = 5$, получаем $5 = \frac{2^2}{2} + C$, откуда $C = 3$. Следовательно, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$. ◀

Задача 3 Доказать, что для любого действительного $p \neq -1$ функция $F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ является первообразной функции $f(x) = x^p$ на промежутке $(0; +\infty)$.

- Так как $(x^{p+1})' = (p+1) \cdot x^p$, то $\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)' = \frac{(x^{p+1})'}{p+1} = x^p$. ◀

Правила нахождения первообразных

Напомним, что операцию нахождения производной для заданной функции называют дифференцированием. Обратную операцию нахождения первообразной для данной функции называют *интегрированием* (от латинского слова *integrare* — восстанавливать).

Таблицу первообразных для некоторых функций можно составить, используя таблицу производных.

Функция	Первообразная
$x^p, p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx + b)^p, p \neq -1, k \neq 0$	$\frac{(kx + b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\frac{1}{kx + b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} \ln(kx + b) + C$
$e^{kx + b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} e^{kx + b} + C$
$\sin(kx + b), k \neq 0$	$-\frac{1}{k} \cos(kx + b) + C$
$\cos(kx + b), k \neq 0$	$\frac{1}{k} \sin(kx + b) + C$

Отметим, что во всех рассмотренных примерах и в дальнейшем функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на таком промежутке, на котором обе функции $F(x)$ и $f(x)$ определены. Например, первообразной функции $\frac{1}{2x-4}$ является функция $\frac{1}{2} \ln(2x-4)$ на таком промежутке, на котором $2x-4 > 0$, т. е. на промежутке $(2; +\infty)$. Правила интегрирования можно также получить с помощью правил дифференцирования. Приведём следующие правила интегрирования:

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке. Тогда:

- 1) функция $F(x) \pm G(x)$ является первообразной функции $f(x) \pm g(x)$;
- 2) функция $aF(x)$ является первообразной функции $af(x)$.

Задача 1 Найти одну из первообразных функции $f(x) = x^2 + 3 \cos x$.

- Используя правила интегрирования и таблицу первообразных для функций x^p при $p = 2$ и для $\cos x$, находим одну из первообразных данной функции:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3 \sin x. \triangleleft$$

Задача 2 Найти все первообразные функции $e^{1-x} - 4 \sin(2x+3)$.

- По таблице первообразных находим, что одной из первообразных функции e^{1-x} является функция $-e^{1-x}$, а одной из первообразных функции $\sin(2x+3)$ является функция $-\frac{1}{2} \cos(2x+3)$. По правилам интегрирования одна из первообразных данной функции: $-e^{1-x} + 2 \cos(2x+3)$.

Ответ

$$-e^{1-x} + 2 \cos(2x+3) + C. \triangleleft$$

Практическая часть.

Найти одну из первообразных функции (988—990).

988

- 1) $2x^5 - 3x^2$; 2) $5x^4 + 2x^3$; 3) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$;
4) $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$; 5) $6x^2 - 4x + 3$; 6) $4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$.

989

- 1) $3 \cos x - 4 \sin x$; 2) $5 \sin x + 2 \cos x$;
3) $e^x - 2 \cos x$; 4) $3e^x - \sin x$;
5) $5 - e^{-x} + 3 \cos x$; 6) $1 + 3e^x - 4 \cos x$;
7) $6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x$; 8) $\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - 2e^{-x}$.

990

- 1) $(x + 1)^4$; 2) $(x - 2)^3$; 3) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$;
5) $\frac{1}{x-1} + 4 \cos(x + 2)$; 6) $\frac{3}{x-3} - 2 \sin(x - 1)$.

991

Найти все первообразные функции:

- 1) $\sin(2x + 3)$; 2) $\cos(3x + 4)$; 3) $\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$;

992

Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M :

- 1) $f(x) = 2x + 3$, $M(1; 2)$; 2) $f(x) = 4x - 1$, $M(-1; 3)$;
3) $f(x) = \sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 5\right)$; 4) $f(x) = \cos 3x$, $M(0; 0)$.