22.03.21.

Тема:
Понятие первообразной. Правила нахождения первообразных. Решение примеров на нахождение первообразных.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://www.youtube.com/watch?v=3vR27xG0pcI

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Первообразная

Рассмотрим движение материальной точки вдоль прямой. Пусть закон движения точки задан функцией $s(t)$. Тогда мгновенная скорость $v(t)$ равна производной функции $s(t)$, т. е. $v(t) = s'(t)$.

В практике встречается обратная задача: по заданной скорости движения точки $v(t)$ найти закон движения, т. е. найти такую функцию $s(t)$, производная которой равна $v(t)$. Функцию $s(t)$, такую, что $s'(t) = v(t)$, называют *первообразной функции* $v(t)$.

Например, если $v(t) = at$, где a — заданное число, то функция $s(t) = \frac{at^2}{2}$ является первообразной функции $v(t)$, так как $s'(t) = \left(\frac{at^2}{2}\right)' = at = v(t)$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Например, функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$, функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной функции $f(x) = x^3$, так как $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

Задача 1 Доказать, что функции $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3}+1$, $\frac{x^3}{3}-4$ являются первообразными функции $f(x)=x^2$.

▶ 1) Обозначим $F_1(x)=\frac{x^3}{3}$, тогда $F_1'(x)=3\cdot\frac{x^2}{3}=$ $=x^2=f(x)$.

2) $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+1$, $F_2'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+1\right)'=x^2=f(x)$.

3) $F_3(x)=\frac{x^3}{3}-4$, $F_3'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-4\right)'=x^2=f(x)$. ◁

Вообще, любая функция $\frac{x^3}{3}+C$, где C — постоянная, является первообразной функции x^2. Это следует из того, что производная постоянной равна нулю. Этот пример показывает, что для заданной функции её первообразная определяется неоднозначно.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные одной и той же функции $f(x)$. Тогда $F_1'(x)=f(x)$ и $F_2'(x)=f(x)$. Производная их разности $g(x)=$ $=F_1(x)-F_2(x)$ равна нулю, так как $g'(x)=F'_1(x)-$ $-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$.

Если $g'(x)=0$ на некотором промежутке, то касательная к графику функции $y=g(x)$ в каждой точке этого промежутка параллельна оси Ox. Поэтому графиком функции $y=g(x)$ является прямая, параллельная оси Ox, т. е. $g(x)=C$, где C — некоторая постоянная. Из равенств $g(x)=C$, $g(x)=$ $=F_1(x)-F_2(x)$ следует, что $F_1(x)=F_2(x)+C$.

Итак, если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то все первообразные функции $f(x)$ записываются в виде $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная.

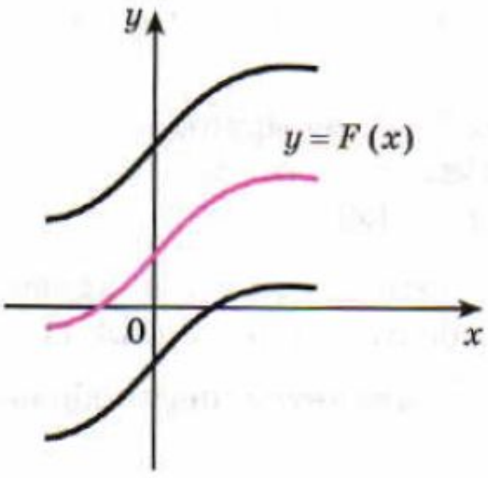

Рис. 150

Рассмотрим графики всех первообразных заданной функции $f(x)$. Если $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, то любая первообразная этой функции получается прибавлением к $F(x)$ некоторой постоянной: $F(x) + C$. Графики функций $y = F(x) + C$ получаются из графика $y = F(x)$ сдвигом вдоль оси Oy (рис. 150). Выбором C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

Задача 2 Для функции $f(x) = x$ найти такую первообразную, график которой проходит через точку (2; 5).

▶ Все первообразные функции $f(x) = x$ находятся по формуле $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, так как $F'(x) = x$. Найдём число C, такое, чтобы график функции $y = \frac{x^2}{2} + C$ проходил через точку (2; 5). Подставляя $x = 2$, $y = 5$, получаем $5 = \frac{2^2}{2} + C$, откуда $C = 3$. Следовательно, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$. ◁

Задача 3 Доказать, что для любого действительного $p \neq -1$ функция $F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ является первообразной функции $f(x) = x^p$ на промежутке $(0; +\infty)$.

▶ Так как $(x^{p+1})' = (p+1) \cdot x^p$, то $\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)' = \frac{(x^{p+1})'}{p+1} = x^p$. ◁

Правила нахождения первообразных

Напомним, что операцию нахождения производной для заданной функции называют дифференцированием. Обратную операцию нахождения первообразной для данной функции называют *интегрированием* (от латинского слова *integrare* — восстанавливать).

Таблицу первообразных для некоторых функций можно составить, используя таблицу производных.

Функция	Первообразная
$x^p,\ p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\dfrac{1}{x},\ x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx + b)^p,\ \ p \neq -1,\ k \neq 0$	$\dfrac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\dfrac{1}{kx+b},\ \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k} \ln (kx + b) + C$
$e^{kx+b},\ \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k} e^{kx+b} + C$
$\sin (kx + b),\ \ k \neq 0$	$-\dfrac{1}{k} \cos (kx + b) + C$
$\cos (kx + b),\ \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k} \sin (kx + b) + C$

Отметим, что во всех рассмотренных примерах и в дальнейшем функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на таком промежутке, на котором обе функции $F(x)$ и $f(x)$ определены. Например, первообразной функции $\frac{1}{2x-4}$ является функция $\frac{1}{2}\ln(2x-4)$ на таком промежутке, на котором $2x-4>0$, т. е. на промежутке $(2; +\infty)$. Правила интегрирования можно также получить с помощью правил дифференцирования. Приведём следующие правила интегрирования:

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке. Тогда:
1) функция $F(x) \pm G(x)$ является первообразной функции $f(x) \pm g(x)$;
2) функция $aF(x)$ является первообразной функции $af(x)$.

Задача 1 Найти одну из первообразных функции

$$f(x) = x^2 + 3\cos x.$$

▶ Используя правила интегрирования и таблицу первообразных для функций x^p при $p = 2$ и для $\cos x$, находим одну из первообразных данной функции: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\sin x$. ◁

Задача 2 Найти все первообразные функции

$$e^{1-x} - 4\sin(2x+3).$$

▶ По таблице первообразных находим, что одной из первообразных функции e^{1-x} является функция $-e^{1-x}$, а одной из первообразных функции $\sin(2x+3)$ является функция $-\frac{1}{2}\cos(2x+3)$. По правилам интегрирования одна из первообразных данной функции: $-e^{1-x} + 2\cos(2x+3)$.

Ответ $-e^{1-x} + 2\cos(2x+3) + C$. ◁

Практическая часть.

Найти одну из первообразных функции (988—990).

988 1) $2x^5 - 3x^2$; 2) $5x^4 + 2x^3$; 3) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$;

4) $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$; 5) $6x^2 - 4x + 3$; 6) $4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$.

989 1) $3\cos x - 4\sin x$; 2) $5\sin x + 2\cos x$;

3) $e^x - 2\cos x$; 4) $3e^x - \sin x$;

5) $5 - e^{-x} + 3\cos x$; 6) $1 + 3e^x - 4\cos x$;

7) $6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x$; 8) $\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - 2e^{-x}$.

990 1) $(x+1)^4$; 2) $(x-2)^3$; 3) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$;

5) $\frac{1}{x-1} + 4\cos(x+2)$; 6) $\frac{3}{x-3} - 2\sin(x-1)$.

991 Найти все первообразные функции:

1) $\sin(2x+3)$; 2) $\cos(3x+4)$; 3) $\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$;

992 Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = 2x + 3$, $M(1; 2)$; 2) $f(x) = 4x - 1$, $M(-1; 3)$;

3) $f(x) = \sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 5\right)$; 4) $f(x) = \cos 3x$, $M(0; 0)$.