Федеральное агентство по образованию
«Пермский Национальный Исследовательский Политехнический Университет»
Кафедра «Прикладной Математики»

Тема курсовой работы:
«Нечеткие дифференциальные уравнения»

Проверил:
к.ф.-м.н. доцент кафедры ПМ
Севодин М.А.
Выполнил:
студент группы МИЭ-17-1м
Паршаков Р.В.

Основные определения нечетких дифференциальных уравнений (НДУ)

<u>*Определение 1.2:*</u> Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{f}(x,y) \qquad (1.1)$$

будем называть нечетким дифференциальным уравнением первого порядка, если $\tilde{f}(x,y)$ есть нечеткая функция.

<u>*Определение 1.3:*</u> Нечеткую функцию $\tilde{\varphi}(x,C)$, зависящую от переменной дифференцирования и произвольной постоянной $\tilde{C}$ (четкой либо нечеткой) будем называть общим решением уравнения (1.1), если:

1) Если она удовлетворяет данному уравнению при любых значениях $\tilde{C}$;

2) Каково бы ни было начальное условие

$$\tilde{y}|_{x=x_0} = \tilde{y}_0 \qquad (1.2)$$

всегда можно найти такое значение $\tilde{C} = \tilde{C}_0$, что функция $\tilde{y} = \tilde{\varphi}(x,\tilde{C}_0)$ удовлетворяла бы начальному условию.

Основные определения НДУ

Определение 1.4: Частным нечетким решением уравнения (1.1), удовлетворяющего начальному условию (1.2) будем называть нечеткую функцию $\tilde{y} = \tilde{\varphi}(x)$, которая удовлетворяет уравнению (1.1) и входит в семейство общего решения этого уравнения, т.е. существует такое нечеткое значение нечеткой постоянной $\tilde{C}$, что $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x, \tilde{C}_0)$

Аналогично можно ввести понятие особого нечеткого решения уравнения (1.1).

Основные определения НДУ

Как и в случае четких линейных дифференциальных уравнений, нечеткие линейные дифференциальные уравнения n-го порядка можно выразить в виде:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}} = \tilde{f}(x)$$

где a_k могут быть как постоянные (нечеткие числа), так и переменные (нечеткие величины); $\tilde{f}(x)$ - может быть как четкой, так и нечеткой функцией.

Решение НЛДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{2}y + \tilde{6};\ \tilde{y}|_{x=0} = \tilde{4}$$

$$\tilde{2} = \{2; 0,1; 0,2\}, \tilde{4} = \{4; 0,2; 0,1\}, \tilde{6} = \{6; 0,2; 0,1\}$$

Пусть $\tilde{y} = \{y_L; y_R\}$. Тогда на основании правила деления нечетких чисел LR-типа имеем:

$$\frac{\tilde{6}}{\tilde{2}} = \frac{\{6; 0,2; 0,1\}}{\{2; 0,1; 0,2\}} = \{3; 0,227; 0,053\}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_L}{dx} = 1,9(y_L + 2,773); y_L|_{x=0} = 3,8 \\ \dfrac{dy_R}{dx} = 2,2(y_R + 3,053); y_R|_{x=0} = 4,1 \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} y_L = C_L e^{1,9x} - 2,773 \\ \quad C_L = 6,573 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_R = C_R e^{2,2x} - 3,053 \\ \quad C_R = 7,153 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_L = 6,573e^{1,9x} - 2,773 \\ y_R = 7,153e^{2,2x} - 3,053 \end{cases}$$

Легко показать, что для $\forall \alpha \in [0,1], y_L \leq y_R$.

Для случая задачи Коши для уравнения с четкими коэффициентами и четким начальным условием:

$$\frac{dy}{dx} = 2y + 6;\ y|_{x=0} = 4$$

$$y = Ce^{2x} - 3;\ C = 7; y = 7e^{2x} - 3$$

При этом для любого α - уровня имеем:

$$\tilde{y}(\alpha, x) = \{y_L(\alpha, x); y_R(\alpha, x)\}$$
$$= \{[7 - (1-\alpha)0{,}427]e^{[2-(1-\alpha)0{,}1]x}$$
$$- [3 - (1-\alpha)0{,}227]; [7 + (1-\alpha)0{,}153]e^{[2+(1-\alpha)0{,}2]x}$$
$$- [3 + (1-\alpha)0{,}053]\}$$

Докажем, что для $\forall\alpha \in [0{,}1]$, $y_L(\alpha, x) \le y_R(\alpha, x)$ имеем:

$$\frac{dy_L(\alpha, x)}{dx} = [7 - (1-\alpha)0{,}427][2 - (1-\alpha)0{,}1]e^{[2-(1-\alpha)0{,}1]x} > 0$$

$$\frac{dy_R(\alpha, x)}{dx} = [7 + (1-\alpha)0{,}153][2 + (1-\alpha)0{,}2]e^{[2+(1-\alpha)0{,}2]x} > 0$$

для любых $x \in (-\infty; \infty)$ и $\alpha \in [0{,}1]$. Поэтому $y_L(\alpha, x)$ и $y_R(\alpha, x)$, возрастающие функции. Но так как $\frac{dy_L(\alpha,x)}{dx} < \frac{dy_R(\alpha,x)}{dx}$ и $y_L(\alpha, x) < y_R(\alpha, 0)$ для $\forall[0{,}1]$, то $y_L(\alpha, x) < y_R(\alpha, 0)$ на $[0{,}1]$ и лишь $y_L(1, x) = y_R(1, x)$

Методы решения НЛДУ

- Составить и решить четкое дифференциальное уравнение с четкими начальными условиями, соответствующее данному нечеткому дифференциальному уравнению.
- Представить нечеткое дифференциальное уравнение и нечеткие начальные условия в интервальной форме и, решив полученную задачу, найти решение поставленной задачи в виде функций (L-R)-типа для любого $\alpha \in [0,1]$
- Решить соответствующее четкое дифференциальное уравнение с четкими начальными условиями. Подставить в найденную четкую функцию (решение четкой задачи) вместо четких коэффициентов $\{a_n\}$ заданные соответствующие нечеткие коэффициенты $\{\tilde{a}_n\}$ и получить нечеткую функцию, являющуюся решением заданного нечеткого уравнения с нечеткими начальными условиями для любых $\alpha \in [0,1]$
При этом при необходимости полученное нечеткое решение можно представить в интервальной форме.

Пример 1.2.

$$y^{II} - \{5;0{,}2;0{,}3\}y^{I} - \{6;0{,}2;0{,}1\}y = \{2;0{,}2;0{,}1\}x - \{3;0{,}2;0{,}3\}$$

$$\tilde{y}|_{x=0} = \{2;0{,}2;0{,}1\}, \qquad \tilde{y}^{I}|_{x=0} = 0$$

1) Решим четкую задачу Коши.

$$y^{II} - 5y^{I} - 6y = 2x - 3; \;\; y|_{x=0} = 2, \qquad y^{I}|_{x=0} = 0$$

$$k^2 - 5k - 6 = 0; \; k_1 = 6, \; k_2 = -1$$

$$\bar{y} = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}; \; y^* = Ax + B$$

Проведя элементарные подсчеты и учитывая начальные условия, получаем:

$$y = 0{,}22e^{6x} + 1{,}01e^{-x} - 0{,}33x + 0{,}77$$

2) Представим нечеткую задачу Коши в интервальной форме и найдем её решение

$$\begin{cases} y^{II} - 5{,}2y^{I} - 6{,}2y = 1{,}8x - 3{,}3; \;\; y|_{x=0} = 2{,}1, \; y^{I}|_{x=0} = 0 \\ y^{II} - 4{,}7y^{I} - 5{,}9y = 2{,}1x - 2{,}8; \;\; y|_{x=0} = 1{,}8, \; y^{I}|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k^2 - 5{,}2k - 6{,}2 = 0 \\ k^2 - 4{,}7k - 5{,}9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 6{,}37; \; k_2 = -1 \\ k_1 = 5{,}73; \; k_2 = -1{,}03 \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, находим решение задачи в интервальной форме:

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_R = 0{,}22e^{6{,}2x} + 1{,}1e^{-x} - 0{,}29x + 0{,}775 \\ y_L = 0{,}21e^{5{,}73x} + 0{,}83e^{-1{,}03x} - 0{,}356x + 0{,}758 \end{cases}$$

Пример 1.3.

$$y^{II} - 5y^{I} - 6y = 2x - 3; \quad y|_{x=0} = 2, \qquad y^{I}|_{x=0} = 0$$

$$y = 0{,}22e^{6x} + 1{,}01e^{-x} - 0{,}33x + 0{,}77$$

Учитывая правило действий над нечеткими числами, имеем:

$$\tilde{7} = \tilde{6} + \tilde{1} = \{7; 0{,}5; 0{,}4\}$$

$$\tilde{9} = \tilde{3} \cdot \tilde{3} = \{9; 1{,}71; 1{,}71\}$$

$$\widetilde{0{,}77} = \tilde{7} : \tilde{9} = \{0{,}77; 0{,}234\}$$

$$\widetilde{0{,}22} = \left(\widetilde{0{,}77} - \widetilde{0{,}33}\right) : 2 = \{0{,}22; 1{,}004; 0{,}972\}$$

Следовательно,

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_R = 1{,}192e^{6{,}2x} + 1{,}84e^{-0{,}98x} - 0{,}324x + 7{,}4 \\ y_L = 0{,}76e^{5{,}9x} + 0{,}68e^{-1{,}03x} - 0{,}339x + 6{,}4 \end{cases}$$

Система нечетких дифференциальных уравнений (СНДУ) первого порядка

Определение 2.1: Систему дифференциальных, содержащих хотя бы одно нечеткое дифференциальное уравнение, будем называть нечеткой системой дифференциальных уравнений и обозначим:

$$\frac{dy_i}{dx} = \tilde{f}_i(x, y_1, y_2, \dots y_n), (i = \overline{1,n})$$

Для случая нечетких линейных дифференциальных уравнений первого порядка имеем:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_i + \tilde{f}_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_i + \tilde{f}_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_i + \tilde{f}_n(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

Следует отметить, что $\tilde{f}_i(x)$ могут быть и четкими и нечеткими функциями.

Порядок решения СНДУ первого порядка:

- Привести заданную систему нечетких уравнений к системе интервальных уравнений;

- В зависимости от типа полученных систем четких дифференциальных уравнений применяем тот или иной способ решения системы дифференциальных уравнений.

Пример 2.1.

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \tilde{2}x + y, \quad X|_{t=0} = \tilde{4} \\ \dfrac{dy}{dt} = \tilde{3}x + \tilde{4}y, \quad y|_{t=0} = \tilde{1} \end{cases}$$

где $\tilde{1} = \{1; 0{,}2; 0{,}3\}$; $\tilde{2} = \{2; 0{,}2; 0{,}1\}$; $\tilde{3} = \{3; 0{,}1; 0{,}3\}$; $\tilde{4} = \{4; 0{,}2; 0{,}3\}$.

Пусть $\tilde{X} = \{X_L; X_R\}$, $\tilde{y} = \{y_L; y_R\}$

Выпишем нечеткую задачу Коши в интервальной форме и решим её. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_R}{dt} = 2{,}1X_R + 1{,}3y_R, \quad X_R|_{t=0} = 4{,}3 \\ \dfrac{dy_R}{dt} = 3{,}3X_R + 4{,}3y_R, \quad y_R|_{t=0} = 1{,}3 \end{cases}$$

$$y_R = \frac{1}{1{,}3}(X_R^I - 2{,}1X_R)$$

$$X_R^{II} - 6{,}4X_R^I + 5{,}6X_R = 0$$

$$\begin{cases} X_R = C_{R_1}e^{5{,}46t} + C_{R_2}e^{1{,}05t} \\ y_R = 3{,}26C_{R_1}e^{5{,}46t} - 1{,}02C_{R_2}e^{1{,}05t} \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, имеем:

$$\begin{cases} X_R = 1{,}33e^{5{,}46t} + 2{,}97e^{1{,}05t} \\ y_R = 4{,}34e^{5{,}46t} - 3{,}04e^{1{,}05t} \end{cases}$$

Аналогично,

$$\begin{cases} \dfrac{dX_L}{dt} = 1{,}8X_L + 0{,}8y_L, \quad X_L|_{t=0} = 3{,}8 \\ \dfrac{dy_L}{dt} = 2{,}9X_L + 3{,}8y_L, \quad y_L|_{t=0} = 0{,}8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_L = C_{L_1}e^{4,62t} + C_{L_2}e^{0,98t} \\ y_L = 3{,}53C_{L_1}e^{4,62t} - 1{,}1C_{L_2}e^{0,98t} \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, имеем:

$$\begin{cases} X_L = 1{,}08e^{4,62t} + 2{,}7e^{0,98t} \\ y_L = 3{,}64e^{4,62t} - 2{,}8e^{0,98t} \end{cases}$$

Таким образом, решение нечеткой задачи Коши в интервальной форме будет:

$$\begin{cases} \tilde{X} = \{1{,}08e^{4,62t} + 2{,}7e^{0,98t}; 1{,}33e^{5,46t} + 2{,}97e^{1,05t}\} \\ \tilde{y} = \{3{,}64e^{4,62t} - 2{,}8e^{0,98t}; 4{,}34e^{5,46t} - 3{,}04e^{1,05t}\} \end{cases}$$

Для сведения решения нечеткой задачи Коши у виду

$$\{\tilde{X};\tilde{y}\} = \left\{\{X;m_{X_L};m_{X_R}\},\{y;m_{y_L};m_{y_R}\}\right\}$$

Следует выписать четкую задачу Коши. Имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \quad X|_{t=0} = 4\\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y, \quad y|_{t=0} = 1\end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases}x = 1{,}25e^{5t} + 2{,}75e^{t}\\ y = 3{,}75e^{5t} - 2{,}75e^{t}\end{cases}$$

Сравнивая полученные результаты, убеждаемся, что

$$X(t) \in \tilde{X}(t) \text{ и } y(t) \in \tilde{y}(t)$$

Учитывая свойство выпуклости нечетких величин, для любого $\alpha \in [0,1]$ имеем:

$$\tilde{X}(\alpha,t) = \begin{Bmatrix}X_L(\alpha,t)\\ X_R(\alpha,t)\end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix}[1{,}25-(1-\alpha)0{,}17]e^{[5-(1-\alpha)0{,}38]t} + [2{,}75-(1-\alpha)0{,}03]e^{[1-(1-\alpha)0{,}02]t}\\ [1{,}25+(1-\alpha)0{,}08]e^{[5+(1-\alpha)0{,}46]t} + [2{,}75+(1-\alpha)0{,}22]e^{[1+(1-\alpha)0{,}02]t}\end{Bmatrix}$$

$$\tilde{y}(\alpha,t) = \begin{Bmatrix}y_L(\alpha,t)\\ y_R(\alpha,t)\end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix}[3{,}75-(1-\alpha)0{,}22]e^{[5-(1-\alpha)0{,}38]t} - [2{,}75-(1-\alpha)0{,}02]e^{[1-(1-\alpha)0{,}02]t}\\ [3{,}75+(1-\alpha)0{,}59]e^{[5+(1-\alpha)0{,}46]t} - [2{,}75+(1-\alpha)0{,}29]e^{[1+(1-\alpha)0{,}05]t}\end{Bmatrix}$$

Спасибо за внимание