

Федеральное агентство по образованию «Пермский Национальный Исследовательский Политехнический Университет» Кафедра «Прикладной Математики»

Тема курсовой работы: «Нечеткие дифференциальные уравнения»

Проверил:

к.ф.-м.н. доцент кафедры ПМ

Севодин М.А.

Выполнил:

студент группы МИЭ-17-1м

Паршаков Р.В.

Основные определения нечетких дифференциальных уравнений (НДУ)

Определение 1.2: Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{f}(x, y) \tag{1.1}$$

будем называть нечетким дифференциальным уравнением первого порядка, если $\tilde{f}(x,y)$ есть нечеткая функция.

Определение 1.3: Нечеткую функцию $\tilde{\varphi}(x,C)$, зависящую от переменной дифференцирования и произвольной постоянной \tilde{C} (четкой либо нечеткой) будем называть общим решением уравнения (1.1), если:

- 1) Если она удовлетворяет данному уравнению при любых значениях \tilde{C} ;
- 2) Каково бы ни было начальное условие

$$\tilde{y}|_{x=x_0} = \tilde{y}_0 \tag{1.2}$$

всегда можно найти такое значение $\tilde{C} = \tilde{C}_0$, что функция $\tilde{y} = \tilde{\varphi}(x, \tilde{C}_0)$

удовлетворяла бы начальному условию.

Основные определения НДУ

Определение 1.4: Частным нечетким решением уравнения (1.1), удовлетворяющего начальному условию (1.2) будем называть нечеткую функцию $\tilde{y} = \tilde{\varphi}(x)$, которая удовлетворяет уравнению (1.1) и входит в семейство общего решения этого уравнения, т.е. существует такое нечеткое значение нечеткой постоянной \tilde{C} , что $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x, \tilde{C}_0)$

Аналогично можно ввести понятие особого нечеткого решения уравнения (1.1).

Основные определения НДУ

Как и в случае четких линейных дифференциальных уравнений, нечеткие линейные дифференциальные уравнения n-го порядка можно выразить в виде:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}} = \tilde{f}(x)$$

где a_k могут быть как постоянные (нечеткие числа), так и переменные (нечеткие величины); $\tilde{f}(x)$ - может быть как четкой, так и нечеткой функцией.

Решение НЛДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{2}y + \tilde{6}; \ \tilde{y}|_{x=0} = \tilde{4}$$

$$\tilde{2} = \{2; 0, 1; 0, 2\}, \tilde{4} = \{4; 0, 2; 0, 1\}, \tilde{6} = \{6; 0, 2; 0, 1\}$$

Пусть $\tilde{y} = \{y_L; y_R\}$. Тогда на основании правила деления нечетких чисел LRтипа имеем:

$$\frac{\tilde{6}}{\tilde{2}} = \frac{\{6; 0, 2; 0, 1\}}{\{2; 0, 1; 0, 2\}} = \{3; 0, 227; 0, 053\}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} \frac{dy_L}{dx} = 1,9(y_L + 2,773); y_L|_{x=0} = 3,8\\ \frac{dy_R}{dx} = 2,2(y_R + 3,053); y_R|_{x=0} = 4,1 \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} y_L = C_L e^{1,9x} - 2,773 \\ C_L = 6,573 \end{cases}, \begin{cases} y_R = C_R e^{2,2x} - 3,053 \\ C_R = 7,153 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_L = 6,573e^{1.9x} - 2,773 \\ y_D = 7.153e^{2.2x} - 3.053 \end{cases}$$

Легко показать, что для $\forall \alpha \in [0,1], y_L \leq y_R$.

Для случая задачи Коши для уравнения с четкими коэффициентами и четким начальным условием:

$$\frac{dy}{dx} = 2y + 6; \ y|_{x=0} = 4$$
$$y = Ce^{2x} - 3; \ C = 7; y = 7e^{2x} - 3$$

При этом для любого α - уровня имеем:

$$\begin{split} \tilde{y}(\alpha, x) &= \{ y_L(\alpha, x); y_R(\alpha, x) \} \\ &= \{ [7 - (1 - \alpha)0, 427] e^{[2 - (1 - \alpha)0, 1]x} \\ &- [3 - (1 - \alpha)0, 227]; [7 + (1 - \alpha)0, 153] e^{[2 + (1 - \alpha)0, 2]x} \\ &- [3 + (1 - \alpha)0, 053] \} \end{split}$$

Докажем, что для $\forall \alpha \in [0,1], \ y_L(\alpha, x) \leq y_R(\alpha, x)$ имеем:

$$\frac{dy_L(\alpha,x)}{dx} = [7-(1-\alpha)0,427][2-(1-\alpha)0,1]e^{[2-(1-\alpha)0,1]x}>0$$

$$\frac{dy_R(\alpha,x)}{dx} = [7+(1-\alpha)0,153][2+(1-\alpha)0,2]e^{[2+(1-\alpha)0,2]x}>0$$
 для любых $x\in (-\infty,\infty)$ и $\alpha\in [0,1]$. Поэтому $y_L(\alpha,x)$ и $y_R(\alpha,x)$, возрастающие функции. Но так как $\frac{dy_L(\alpha,x)}{dx}<\frac{dy_R(\alpha,x)}{dx}$ и $y_L(\alpha,x)< y_R(\alpha,0)$

для $\forall [0,1]$, то $y_L(\alpha,x) < y_R(\alpha,0)$ на [0,1] и лишь $y_L(1,x) = y_R(1,x)$

для

Методы решения НЛДУ

- Составить и решить четкое дифференциальное уравнение с четкими начальными условиями, соответствующее данному нечеткому дифференциальному уравнению.
- Представить нечеткое дифференциальное уравнение и нечеткие начальные условия в интервальной форме и, решив полученную задачу, найти решение поставленной задачи в виде функций (L-R)-типа для любого
- Решить соответствующее четкое дифференциальное уравнени $\alpha \in [0,1]$ кими начальными условиями. Подставить в найденную четкую функцию (решение четкой задачи) вместо четких коэффициентов заданные соответствующие нечеткие коэффициенты и получить нечеткую функцию, являющуюся решением заданного нечеткого урав $\{a_n\}$ я с нечеткими начальными условиями для любых $\{\tilde{a}_n\}$ При этом при необходимости полученное нечеткое решение можно представить в интервальной форме.

 $\alpha \in [0,1]$

Пример 1.2.

$$y^{II} - \{5; 0, 2; 0, 3\}y^{I} - \{6; 0, 2; 0, 1\}y = \{2; 0, 2; 0, 1\}x - \{3; 0, 2; 0, 3\}$$
$$\tilde{y}|_{x=0} = \{2; 0, 2; 0, 1\}, \qquad \tilde{y}^{I}|_{x=0} = 0$$

1) Решим четкую задачу Коши.

$$y^{II} - 5y^I - 6y = 2x - 3; \ y|_{x=0} = 2, \ y^I|_{x=0} = 0$$

 $k^2 - 5k - 6 = 0; \ k_1 = 6, \ k_2 = -1$
 $\bar{y} = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}; \ y^* = Ax + B$

Проведя элементарные подсчеты и учитывая начальные условия, получаем:

$$y = 0.22e^{6x} + 1.01e^{-x} - 0.33x + 0.77$$

 Представим нечеткую задачу Коши в интервальной форме и найдем её решение

$$\begin{cases} y^{II} - 5,2y^{I} - 6,2y = 1,8x - 3,3; \ y|_{x=0} = 2,1, \ y^{I}|_{x=0} = 0 \\ y^{II} - 4,7y^{I} - 5,9y = 2,1x - 2,8; \ y|_{x=0} = 1,8, \ y^{I}|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k^{2} - 5,2k - 6,2 = 0 \\ k^{2} - 4,7k - 5,9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_{1} = 6,37; \ k_{2} = -1 \\ k_{1} = 5,73; \ k_{2} = -1,03 \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, находим решение задачи в интервальной форме:

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_R = 0.22e^{6.2x} + 1.1e^{-x} - 0.29x + 0.775 \\ y_L = 0.21e^{5.73x} + 0.83e^{-1.03x} - 0.356x + 0.758 \end{cases}$$

Пример 1.3.

$$y^{II} - 5y^{I} - 6y = 2x - 3; \ y|_{x=0} = 2, \ y^{I}|_{x=0} = 0$$

 $y = 0.22e^{6x} + 1.01e^{-x} - 0.33x + 0.77$

Учитывая правило действий над нечеткими числами, имеем:

$$\widetilde{7} = \widetilde{6} + \widetilde{1} = \{7; 0, 5; 0, 4\}$$

$$\widetilde{9} = \widetilde{3} \cdot \widetilde{3} = \{9; 1, 71; 1, 71\}$$

$$\widetilde{0,77} = \widetilde{7}; \widetilde{9} = \{0, 77; 0, 234\}$$

$$\widetilde{0,22} = (\widetilde{0,77} - \widetilde{0,33}): 2 = \{0,22; 1,004; 0,972\}$$

Следовательно,

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_R = 1,192e^{6,2x} + 1,84e^{-0,98x} - 0,324x + 7,4 \\ y_L = 0,76e^{5,9x} + 0,68e^{-1,03x} - 0,339x + 6,4 \end{cases}$$

Система нечетких дифференциальных уравнений (СНДУ) первого порядка

Определение 2.1: Систему дифференциальных, содержащих хотя бы одно нечеткое дифференциальное уравнение, будем называть нечеткой системой дифференциальных уравнений и обозначим:

$$\frac{dy_i}{dx} = \tilde{f}_i(x, y_1, y_2, \dots y_n), (i = \overline{1, n})$$

Для случая нечетких линейных дифференциальных уравнений первого порядка имеем:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij} y_i + \tilde{f}_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij} y_i + \tilde{f}_2(x) \\ \frac{dy_n}{dx} = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij} y_i + \tilde{f}_n(x) \end{cases}$$

$$(2.1)$$

Следует отметить, что $ilde{f}_i(x)$ могут быть и четкими и нечеткими функциями.

Порядок решения СНДУ первого порядка:

- Привести заданную систему нечетких уравнений к системе интервальных уравнений;
- В зависимости от типа полученных систем четких дифференциальных уравнений применяем тот или иной способ решения системы дифференциальных уравнений.

Пример 2.1.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \tilde{2}x + y, & X|_{t=0} = \tilde{4} \\ \frac{dy}{dt} = \tilde{3}x + \tilde{4}y, & y|_{t=0} = \tilde{1} \end{cases}$$

где $\tilde{1}=\{1;0,2;0,3\};\; \tilde{2}=\{2;0,2;0,1\};\; \tilde{3}=\{3;0,1;0,3\};\; \tilde{4}=\{4;0,2;0,3\}.$

Пусть $\tilde{X} = \{X_L; X_R\}, \ \tilde{y} = \{y_L; y_R\}$

Выпишем нечеткую задачу Коши в интервальной форме и решим её. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{dX_R}{dt} = 2.1X_R + 1.3y_R, & X_R|_{t=0} = 4.3 \\ \frac{dy_R}{dt} = 3.3X_R + 4.3y_R, & y_R|_{t=0} = 1.3 \end{cases}$$

$$y_R = \frac{1}{1.3} (X_R^I - 2.1X_R)$$

$$X_R^{II} - 6.4X_R^I + 5.6X_R = 0$$

$$\begin{cases} X_R = C_{R_1} e^{5.46t} + C_{R_2} e^{1.05t} \\ y_R = 3.26C_{R_1} e^{5.46t} - 1.02C_{R_2} e^{1.05t} \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, имеем:

$$\begin{cases} X_R = 1,33e^{5,46t} + 2,97e^{1,05t} \\ v_P = 4,34e^{5,46t} - 3,04e^{1,05t} \end{cases}$$

Аналогично,

$$\begin{cases} \frac{dX_L}{dt} = 1.8X_L + 0.8y_L, & X_L|_{t=0} = 3.8\\ \frac{dy_L}{dt} = 2.9X_L + 3.8y_L, & y_L|_{t=0} = 0.8\\ X_L = C_{L_1}e^{4.62t} + C_{L_2}e^{0.98t}\\ y_L = 3.53C_{L_1}e^{4.62t} - 1.1C_{L_2}e^{0.98t} \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, имеем:

$$\begin{cases} X_L = 1,08e^{4,62t} + 2,7e^{0,98t} \\ y_L = 3,64e^{4,62t} - 2,8e^{0,98t} \end{cases}$$

Таким образом, решение нечеткой задачи Коши в интервальной форме будет:

Для сведения решения нечеткой задачи Коши у виду

$$\{\tilde{X}; \tilde{y}\} = \{\{X; m_{X_L}; m_{X_R}\}, \{y; m_{y_L}; m_{y_R}\}\}$$

Следует выписать четкую задачу Коши. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, & X|_{t=0} = 4\\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y, & y|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases} x = 1,25e^{5t} + 2,75e^{t} \\ y = 3,75e^{5t} - 2,75e^{t} \end{cases}$$

Сравнивая полученные результаты, убеждаемся, что

$$X(t) \in \tilde{X}(t)$$
 и $y(t) \in \tilde{y}(t)$

Учитывая свойство выпуклости нечетких величин, для любого $\alpha \in [0,1]$ имеем:

$$\begin{split} \tilde{X}(\alpha,t) &= \begin{cases} X_L(\alpha,t) \\ X_R(\alpha,t) \end{cases} \\ &= \begin{cases} [1,25 - (1-\alpha)0,17]e^{[5-(1-\alpha)0,38]t} + [2,75 - (1-\alpha)0,03]e^{[1-(1-\alpha)0,02]t} \\ [1,25 + (1-\alpha)0,08]e^{[5+(1-\alpha)0,46]t} + [2,75 + (1-\alpha)0,22]e^{[1+(1-\alpha)0,02]t} \end{cases} \\ \tilde{y}(\alpha,t) &= \begin{cases} y_L(\alpha,t) \\ y_R(\alpha,t) \end{cases} \\ &= \begin{cases} [3,75 - (1-\alpha)0,22]e^{[5-(1-\alpha)0,38]t} - [2,75 - (1-\alpha)0,02]e^{[1-(1-\alpha)0,02]t} \\ [3,75 + (1-\alpha)0,59]e^{[5+(1-\alpha)0,46]t} - [2,75 + (1-\alpha)0,29]e^{[1+(1-\alpha)0,05]t} \end{cases} \end{split}$$

Спасибо за внимание