# ЛЕКЦИЯ 2

## Нелинейные эффекты в средах с "квадратичной" нелинейностью

$$\vec{P}^{(2)} = \overset{\leftrightarrow}{\chi}^{(2)} \vec{E}_1(\omega_1)\vec{E}_2(\omega_2)$$

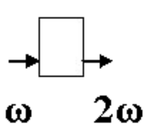
В зависимости от того, какие (сопряженные или нет компоненты) входят в это произведение, возможны 2 случая:

$$\omega_2 \pm \omega_1 = \omega^P \Rightarrow \omega_3 = \omega_2 \pm \omega_1$$

Т. е. возможна генерация **суммарной** или **разностной** частоты.

Частный случай сложения частот - удвоение частоты при $\omega_1 = \omega_2$ на частоте $\omega_3 = 2\omega_1$

## Генерация второй гармоники




Для наиболее эффективного преобразования энергии первой гармоники требуется:

$\omega_2 = 2\omega_1 = 2\omega$ и $\vec{k}(2\omega) = 2\vec{k}(\omega)$. Для коллинеарного взаимодействия $k(2\omega) = 2k(\omega)$, так как $k = \dfrac{\omega}{c}n$ мы получаем:

$$\frac{2\omega}{c}n(2\omega) = \frac{2\omega}{c}n(\omega) \Rightarrow n(\omega) = n(2\omega)$$

Вследствие существования дисперсии это условие в среде с нормальной дисперсией невозможно, так как в оптике с ростом частоты показатель преломления растет. Но можно использовать среды с аномальной дисперсией или анизотропные среды.

В качестве анизотропных сред используют обычно одноосные кристаллы.

Тензор диэлектрической проницаемости для такого кристалла имеет вид:

$\begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & & \\ & \varepsilon_\perp & \\ & & \varepsilon \end{pmatrix}$, оптическая ось – $c$

Существует 2 типа нормальных волн:

1) Обыкновенная волна. Вектор поляризации перпендикулярен “главной” плоскости $\perp(\vec{k},\vec{c})$. Для нее показатель преломления не зависит от направления распространения.

2) Необыкновенная волна. Вектор поляризации лежит в плоскости $(\vec{k},\vec{c})$. Для нее показатель преломления зависит от направления распространения.

Одноосные кристаллы можно разделить на 2 типа:

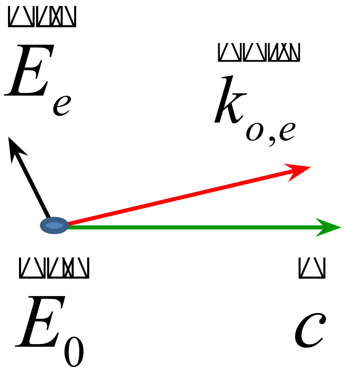
1) Электроположительные $n_0<n_e$, $v_o > v_e$

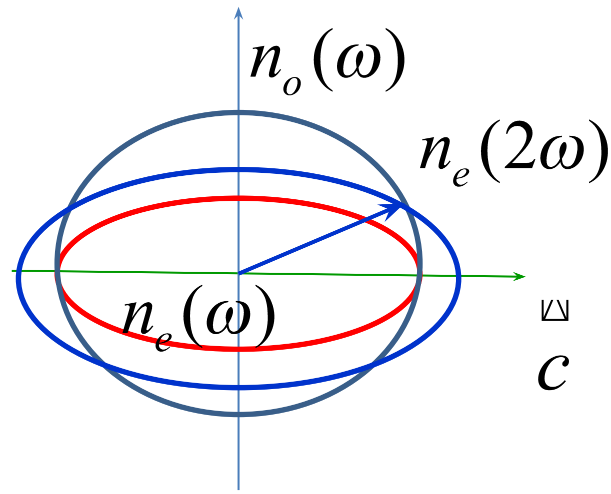
2) Электроотрицательные $n_0>n_e$, $v_o < v_e$

Возьмем электроотрицательный кристалл и перейдем в k-пространство $n_0(\omega)>n_e(\omega)$

Если возьмем обыкновенную волну на частоте $\omega$, и необыкновенную волну на частоте $2\omega$, то, воспользовавшись построением эллипсоида показателей преломления, можно найти направление, вдоль которого $n_0(\omega)=n_e(2\omega)$.

Возьмем электроотрицательный кристалл $n_0(\omega)>n_e(\omega)$ и перейдем в k-пространство (построим поверхности обратных волновых нормалей для трёх волн):




Если возьмем обыкновенную волну на частоте ω, и необыкновенную волну на частоте 2ω, то, воспользовавшись построением эллипсоида показателей преломления, можно найти направление, вдоль которого

$$\mathbf{n_0(\omega)=n_e(2\omega).}$$

Таким образом, имеем два кванта обыкновенной волны и один квант необыкновенной волны с удвоенной частотой. Такой тип взаимодействия называется оо-е синхронизмом (2 кванта обыкновеной волны дают 1 квант необыконовенной на удвоенной частоте). Может быть также ое-е синхронизм.

***Задача 5-2***: Получить условие на показатели преломления при генерации второй гармоники в случае ое-е синхронизма и найти направление генерации 2-ой гармоники в условиях такого синхронизма.

В общем случае точный синхронизм не является обязательным условием генерации удвоенной частоты. Возможно взаимодействие и без точного синхронизма, но его эффективность будет мала.

Рассмотрим систему уравнений для генерации второй гармоники. Волны – плоские, волновые вектора - коллинеарные. Используем приближения, описанные выше. Будем рассматривать оо-е синхронизм.
Считаем, что у нас существует пространственная расстройка
$\Delta k = k(2\omega) - 2k(\omega) \neq 0$
Тогда система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = -\frac{i\omega 2\pi\mu}{n(\omega)c}\chi^{(2)}(\omega)\,\mathrm{E}_1^*\,E_2 e^{-i\Delta kz} \quad ; \quad \frac{\partial E_2}{\partial z} = -\frac{i2\omega 2\pi\mu}{n(2\omega)c}\chi^{(2)}(2\omega)\,\mathrm{E}_1^2\, e^{i\Delta kz}$$

где индексы 1 и 2 у ε означают ω и 2ω, соответственно.
Из соображений симметрии в среде с квадратичной нелинейностью для вырожденного взаимодействия:

$$\chi_{ijj}^{(2)*}(2\omega = \omega + \omega) = \frac{1}{2}\chi_{jij}^{(2)}(\omega = 2\omega - \omega) = \frac{1}{2}\chi_{jji}^{(2)}(\omega = -\omega + 2\omega)$$

Можно ввести коэффициент:

$$\gamma = \frac{\omega 2\pi\mu}{n(\omega)c}\chi^{(2)}(\omega) = \frac{2\omega 2\pi\mu}{n(2\omega)c}\chi^{(2)}(2\omega)$$

При решении этой задачи можно воспользоваться приближением заданной интенсивности сильной световой волны $E_1 >> E_2$ и $E_1$=const. Слабая выходная волна на удвоенной частоте не влияет на интенсивность сильной входной волны на частоте ω.

Тогда получаем для $E_2$:,

$$|E_2|^2 = \gamma^2 |E_1|^4 \left( \sin\left(\frac{\Delta kz}{2}\right) / \left(\frac{\Delta kz}{2}\right)\right)^2 z^2$$

Из графика зависимости интенсивности второй гармоники от z видно условие эффективного взаимодействия: $\Delta kl << 1$, $l_c \approx \pi / \Delta k$ - называется когерентной длиной.

Если зафиксировать $\Delta k$, то при различных его значениях получаем разные зависимости $E_2$(z).

***Задача 6-2***: Найти направление распространения обыкновенной волны в кристалле (по отношению к оптической оси ) при котором происходит оптимальная генерация второй гармоники е-волны если: $n_o(\omega) = 1.5$ ; $n_e(\omega) = 1.45$ ; $n_e(2\omega) = 1.49$ ; $n_o(2\omega) = 1.53$. Рассмотреть различные типы синхронизма (оо-е или ее-о типа). Найти интенсивность 2-ой гармоники, если известна длина кристалла и коэффициент нелинейности.

***Задача 7-2***: Оценить интенсивность световой волны, необходимую для создания генератора 2-ой гармоники в нелинейно-оптическом электроотрицательном кристалле с заданными параметрами нелинейности (известным коэффициентом $\chi^{(2)}$).

Приближение заданной интенсивности исходной волны часто не работает, так как при $\Delta k \to 0$ $E_2$ быстро возрастает.

**Нелинейный режим генерации второй гармоники.**

Рассмотрим ***случай точного синхронизма при генерации 2-ой гармоники***: $\Delta k = 0$

Тогда система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} = -i\gamma E_1^2 \qquad \frac{\partial E_1}{\partial z} = -i\gamma E_1^* E_2$$

Эта система, описывающая весь процесс генерации 2-ой гармоники в нелинейной среде в отсутствии расстройки, может быть решена точно.
Эту систему можно решать, используя первые интегралы:
1)Надо найти интегралы этой системы.
Нетрудно показать, что: $\frac{\partial}{\partial z}(I_1 + I_2) = 0$ - закон сохранения энергии. Энергия во вторую гармонику может попасть только из первой. Если ввести плотность потока квантов, как $N_i = \frac{I_i}{\hbar\omega_i}$, то сразу получим: $N_1 + 2N_2 = const$
2)Сделаем замены:

$$E_1 = A_1 e^{i\phi_1} \quad E_2 = A_2 e^{i\phi_2}$$

Обозначим: $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ и перейдем к системе действительных уравнений для фаз и амплитуд. Можно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{dA_1}{dz} = -\gamma A_1 A_2 \sin\Phi \quad \frac{dA_2}{dz} = \gamma A_1^{\,2} \sin\Phi$$

$$\frac{d\Phi}{dz} = \gamma\cos\Phi\left(-2A_2 + \frac{A_1^2}{A_2}\right) = \cos\Phi\left[\frac{2\frac{dA_1}{dz}}{A_1} + \frac{\frac{dA_2}{dz}}{A_2}\right]\frac{1}{\sin\Phi}$$

Таким образом, из последнего уравнения легко получается интеграл:

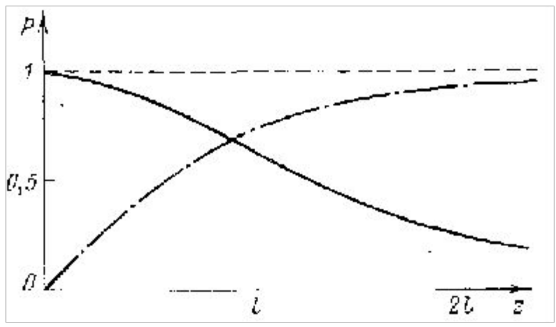
$$A_1^{\,2} A_2 \cos\Phi = const$$

Если на входе в среду $\cos\Phi = 0$, то везде $\Phi = \pi/2$.
Если $A_2(z=0) = 0$, а взаимодействие идет, то $\cos\Phi = 0, \Phi = \pi/2$, $\sin\Phi = 1$

Таким образом, мы избавились от Ф. При этом первые 2 уравнения преобразуются в следующие:

$$\frac{dA_1}{dz} = -\gamma A_1 A_2 \qquad \frac{dA_2}{dz} = \gamma A_1{}^2$$

Решая их, используя закон сохранения энергии, получаем:




$$A_2 = A_1(0) th(\gamma A_1(0) z)$$
$$A_1 = A_1(0) \sec h(\gamma A_1(0) z)$$

Убывание нормированной амплитуды волны основной частоты (сплошная кривая) и рост нормированной амплитуды волны второй гармоники (штрихпунктирная кривая) в случае точного синхронизма

$l$ - характерная длина, когда $A_1 \approx A_2$, т. е. $\gamma A_1(0) l \approx 1$

Если вспомнить что такое $\gamma$ ,то получим:

$$\gamma A_1 l \cong \frac{\omega^2}{kc^2} \chi^{(2)} l \cdot 2\pi A_1 \approx kl\Delta\varepsilon \approx 1$$

Обычно $\Delta\varepsilon \approx 10^{-5}$ - невелико, но есть накопление на длине.

| | KD*P | KTP | LBO | $LiNbO_3$ |
|---|---|---|---|---|
| Коэфф. Нел. $10^{-12}$ м/В | 0,37 | 3,18 | 1,16 | 4,7 |

## Проблема нарушения синхронизма при острой фокусировке пучков

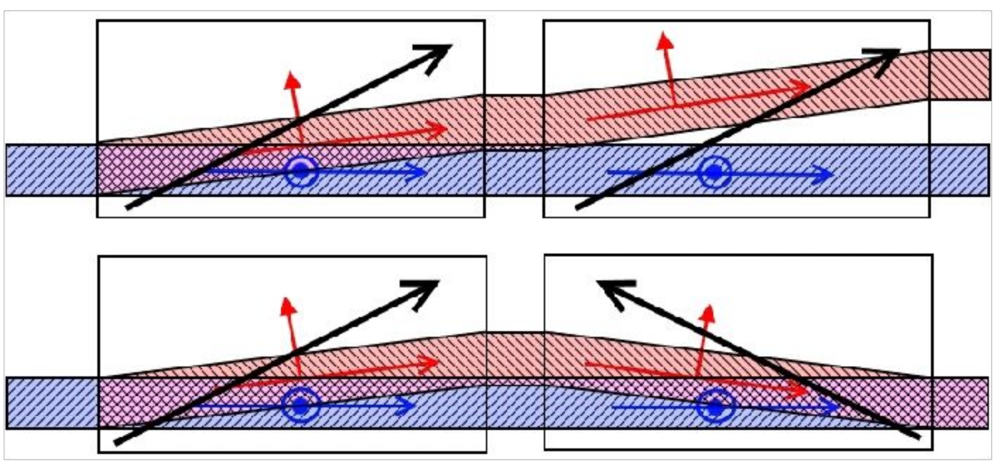
При фокусировке пучков накачки разные лучи распространяются под разными углами, что приводит к нарушению условий синхронизма генерации 2-ой гармоники.

Задача 7-2. Оценить оптимальные условия фокусировки светового пучка в нелинейно-оптический кристалл (с заданным коэфициентом нелинейности) для эффективного получения 2-ой гармоники.

## Проблема пространственного “разбегания” пучков при генерации 2-ой гармоники

Поскольку взаимодействуют волны разных типов (обыкновенные и необыкновение), то при колинеарном распространении фазы происходит пространственный снос энергии необыкновенного пучка относительно обыкновенного.

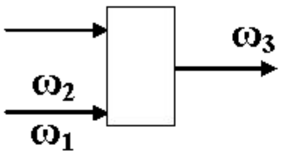
Поэтому, для эффективной перекачки во 2-ую гармонику выгодно использовать два нелинейных элемента с разной ориентацией оптической оси. При этом происходит компенсация пространственного сноса пучков.



Задача 8-2. Оценить разбегание пучков в нелинейно-оптическом кристалле (с заданным показателем преломления) для эффективного получения 2-ой гармоники оо-е типа.

## Генерация суммарной частоты

Продолжаем рассматривать нелинейные эффекты, связанные с взаимодействием трех волн в среде с квадратичной нелинейностью.




Теперь рассмотрим взаимодействие трёх волн в одноосном кристалле, оо-е синхронизм, когда падающие волны имеют различные частоты $\omega_1$ и $\omega_2$, а на выходе хотим получить генерацию на суммарной частоте $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$. При решение этой задачи мы будем пользоваться некоторыми результатами, полученными при рассмотрении эффекта генерации второй гармоники, модифицируя их для этой более общей задачи.

Условиями эффективного взаимодействия в данном случае будут:

$$\omega_3 = \omega_2 + \omega_1; \qquad \vec{k}_3 = \vec{k}_2 + \vec{k}_1$$

Если мы будем рассматривать коллинеарное взаимодействие, то условие на показатели преломления на различных частотах будет иметь вид: $n(\omega_3) = \dfrac{\omega_2 n(\omega_2) + \omega_1 n(\omega_1)}{\omega_3}$.

Для нахождения длин волн при синхронизме обычно пользуются дисперсионной формулой Зельмейера для показателя преломления:

$n^2 = 1 + \sum_i \dfrac{a_i}{\omega_i^2 - \omega^2}$, где $a_i$ и $\omega_i$ – константы.

В случае взаимодействия трех волн выражение для $\vec{P}^{(2)}$ выглядит как:

$\vec{P}^{(2)} = \overleftrightarrow{\chi}^{(2)} \vec{E}\vec{E}$, где $\vec{E} = \sum_{i=1}^{3} \vec{E}_i e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i \vec{r})} + \ldots$

Усредняя правую часть волнового уравнения, оставим только слагаемые, отвечающие за эффект генерации суммарной частоты и, воспользовавшись приближением плоских монохроматических, медленно меняющихся при распространении волн, получим укороченные уравнения:

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = -i\gamma_1 \frac{\omega_1}{n(\omega_1)} E_2^* E_3 \quad \frac{\partial E_2}{\partial z} = -i\gamma_2 \frac{\omega_2}{n(\omega_2)} E_1^* E_3 \quad \frac{\partial E_3}{\partial z} = -i\gamma_3 \frac{\omega_3}{n(\omega_3)} E_2 E_1$$

где $\gamma_i = \frac{2\pi}{c} \mu \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_i)$, причем $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ из соотношения перестановочной симметрии.

1) Ищем интегралы. Нетрудно получить законы сохранения аналогичные тем, которые были получены при рассмотрении генерации второй гармоники:

$I_1 + I_2 + I_3 = I_\Sigma = const$, где $I_i = \frac{cn(\omega_i)}{2\pi} |E_i|^2$

Снова переходя от интенсивности к плотности потока квантов, получаем:

$$N_1\omega_1 + N_2\omega_2 + N_3\omega_3 = const$$

Из этого соотношения, используя условие $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$ и условие независимости изменения частот легко получить следующие законы сохранения:

$$N_1 + N_3 = const \quad N_2 + N_3 = const \quad N_1 - N_2 = const$$

Причем только 2 из них являются независимыми. Эти соотношения называются соотношениями Мэнли - Роу. Они отражают тот факт, что на один фотон на частоте $\omega_3$ приходятся по одному фотону на частоте $\omega_1$ и $\omega_2$.

2) Можно решать исходную систему так же, как и в случае генерации второй гармоники.

Сделаем замену переменных:

$$\xi = \frac{2\pi}{c^2} I_{\Sigma}^{1/2} \chi^{(2)} (2\pi c)^{1/2} \left( \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{n(\omega_1) n(\omega_2) n(\omega_3)} \right)^{\frac{1}{2}} z, \quad U_i e^{i\varphi_i} = \left( \frac{cn(\omega_i)}{2\pi\omega_i} \frac{1}{I_{\Sigma}} \right)^{\frac{1}{2}} E_i$$

$$\Phi = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$$

Т. е. мы сделали замены более сложные, но аналогичные тем, что в случае генерации второй гармоники. Получаем уравнения в новых переменных:

$$\frac{dU_1}{d\xi} = -U_3 U_2 \sin \Phi \qquad \frac{dU_2}{d\xi} = -U_1 U_3 \sin \Phi$$

$$\frac{dU_3}{d\xi} = U_1 U_2 \sin \Phi \qquad \frac{d\Phi}{d\xi} = c_1 ctg\Phi \frac{d}{d\xi} \ln(U_1 U_2 U_3)$$

где $c_1 = const$

Из последнего видно: $U_1 U_2 U_3 \cos \Phi = const = 0$, так как на входе $U_3 = 0 \Rightarrow$ это достигается, когда $\cos\Phi = 0$, т. е. $\Phi = \pm\pi/2$

Тогда, используя то, что $\sin \Phi = 1$, получаем решение в виде эллиптического интеграла Якоби: $U_3^2(\xi) = U_2^2(0) sn^2\left[ U_1(0)\xi, \frac{U_2(0)}{U_1(0)} \right]$

Это решение зависит от соотношения $\frac{U_2(0)}{U_1(0)}$. Если $\frac{U_2(0)}{U_1(0)} << 1$, то эллиптический интеграл преобразуется к виду:

$U_3^2 = U_2^2(0) \sin^2(U_1(0)\xi)$; $U_2^2 = U_2^2(0)(1 - \sin^2(U_1(0)\xi))$;

$U_1^2 = U_1^2(0) - U_2^2(0) \sin^2(U_1(0)\xi)$

Таким образом, в этом случае мы получили, что $U_3 << U_1$.

Если $\dfrac{U_2(0)}{U_1(0)} \approx 1$, то эллиптический интеграл преобразуется к другому виду:

$$U_3^2 = U_1^2(0) th^2\left[U_1(0)\xi\right]$$

$$U_1^2 = U_2^2 = U_1^2(0) \operatorname{sech}^2\left[U_1(0)\xi\right]$$

В этом случае получаем, что амплитуды волн 1 и 2 близки во всём пространстве.

***Задача 9-2.*** Найти максимальную интенсивность волны суммарной частоты при заданных интенсивностях суммируемых волн на входе в нелинейную среду. Рассмотреть случаи разного отношения интенсивностей входных волн.

## *Генерация разностной частоты в нелинейной среде*

***Задача 10-2***: Рассмотреть задачу о генерации разностной гармоники в условиях точного синхронизма при коллинеарном взаимодействии плоских волн. Вывести основные уравнения и показать их решение в приближении заданной мощности исходных пучков.

***Задача 11-2.*** Найти максимальную интенсивность волны разностной частоты при заданных интенсивностях волн на входе в нелинейную среду. Рассмотреть случаи разного отношения интенсивностей входных волн.

**Задача 12-2.** Эффекты квадратичной нелинейности в среде с периодическим изменением направления оптической оси (с периодическим изменением знака нелинейности). Решить задачу о генерации 2-ой гармоники в такой среде. Найти оптимальный период.