

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

Эта последовательность вводит полулогарифмическую модель и показывает, как она может применяться к прибыли. Зависимая переменная является линейной, но объясняющие переменные, умноженные на их коэффициенты, являются показателями  $e$ .

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\frac{dY}{dX} = \beta_1 \beta_2 e^{\beta_2 X} = \beta_2 Y$$

Дифференциал  $Y$  по  $X$  упрощается до  $\beta_2 Y$ .

## ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\frac{dY}{dX} = \beta_1 \beta_2 e^{\beta_2 X} = \beta_2 Y$$

$$\frac{dY/Y}{dX} = \beta_2$$

Следовательно, пропорциональное изменение  $Y$  на единицу изменения в  $X$  равно  $\beta_2$ . Поэтому он не зависит от значения  $X$ .

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$Y + \Delta Y = \beta_1 e^{\beta_2 (X + \Delta X)}$$

Строго говоря, эта интерпретация справедлива только для малых значений  $b_2$ . Когда  $b_2$  не мало, интерпретация может быть немного сложнее.

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$Y + \Delta Y = \beta_1 e^{\beta_2 (X + \Delta X)}$$

Предположим, что  $X$  увеличивается на величину  $\Delta X$  и, как следствие,  $Y$  увеличивается на величину  $\Delta Y$ .

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\begin{aligned} Y + \Delta Y &= \beta_1 e^{\beta_2 (X + \Delta X)} \\ &= \beta_1 e^{\beta_2 X} e^{\beta_2 \Delta X} \end{aligned}$$

Мы можем переписать правую часть уравнения, как показано.

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\begin{aligned} Y + \Delta Y &= \beta_1 e^{\beta_2 (X + \Delta X)} \\ &= \beta_1 e^{\beta_2 X} e^{\beta_2 \Delta X} \\ &= Y e^{\beta_2 \Delta X} \end{aligned}$$

Мы можем упростить правую часть уравнения, как показано.

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\begin{aligned} Y + \Delta Y &= \beta_1 e^{\beta_2 (X + \Delta X)} \\ &= \beta_1 e^{\beta_2 X} e^{\beta_2 \Delta X} \\ &= Y e^{\beta_2 \Delta X} \\ &= Y \left( 1 + \beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^3}{3!} + \dots$$

Теперь разложим показательную функцию, используя стандартное выражение для  $e$  до некоторой степени.



$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\begin{aligned} Y + \Delta Y &= \beta_1 e^{\beta_2 (X + \Delta X)} \\ &= \beta_1 e^{\beta_2 X} e^{\beta_2 \Delta X} \\ &= Y e^{\beta_2 \Delta X} \\ &= Y \left( 1 + \beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\Delta Y = Y \left( \beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \dots \right)$$

Вычитаем  $Y$  с обеих сторон.

$$\Delta Y = Y \left( \beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \dots \right)$$

$(\beta_2 \Delta X)^2$  negligible

Рассмотрим теперь два случая: где  $\beta_2$  и  $\Delta X$  настолько малы, что  $(\beta_2 \Delta X)^2$  пренебрежимо мало, и альтернативно.

$$\Delta Y = Y \left( \beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \dots \right)$$

$(\beta_2 \Delta X)^2$  negligible

$$\Delta Y = Y \beta_2 \Delta X$$

$$\frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} = \beta_2$$

Если  $(\beta_2 \Delta X)^2$  пренебрежимо мало, мы получаем ту же интерпретацию  $\beta_2$  что и следовало ожидать.

$$\Delta Y = Y \left( \beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \dots \right)$$

$(\beta_2 \Delta X)^2$  not negligible

$$\frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} = \beta_2 + \frac{\beta_2^2 \Delta X}{2} + \dots$$

Если  $(\beta_2 \Delta X)^2$  не является пренебрежимо малым, пропорциональное изменение в  $Y$  при изменении  $\Delta X$  в  $X$  имеет дополнительный член (Предположим, что  $\beta_2$  и  $\Delta X$  достаточно малы, что с более высокими степенями  $\Delta X$  можно пренебречь.)

$$\Delta Y = Y \left( \beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \dots \right)$$

$(\beta_2 \Delta X)^2$  not negligible

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} &= \beta_2 + \frac{\beta_2^2 \Delta X}{2} + \dots \\ &= \beta_2 + \frac{\beta_2^2}{2} + \dots \quad \text{if } \Delta X \text{ is one unit} \end{aligned}$$

Обычно мы говорим о влиянии изменения одной части переменной  $X$ . Если  $\Delta X = 1$ , пропорциональное изменение происходит в  $Y$ , как показано. Теперь значение  $\beta_2$  становится настолько малым, что вторым и последующим значениями можно пренебречь.

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$X = 0 \Rightarrow Y = \beta_1 e^0 = \beta_1$$

$\beta_1$  является значением  $Y$  когда  $X$  равно нулю (заметим, что  $e^0$  равно 1).

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\begin{aligned}\log Y &= \log \beta_1 e^{\beta_2 X} \\ &= \log \beta_1 + \log e^{\beta_2 X} \\ &= \beta_1' + \beta_2 X \log e \\ &= \beta_1' + \beta_2 X\end{aligned}$$

Чтобы соответствовать функции этого типа, вы берете логарифмы с обеих сторон. Правая часть уравнения становится линейной функцией от  $X$  (заметим, что логарифм  $e$  на основании  $e$  равен 1). Следовательно, мы можем поместить модель с линейной регрессией  $\log Y$  на  $X$ .

# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LG EARN S
```

Source	SS	df	MS			
Model	16.5822819	1	16.5822819	Number of obs =	500	
Residual	136.016938	498	.273126381	F( 1, 498) =	60.71	
				Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.1087	
				Adj R-squared =	0.1069	
Total	152.59922	499	.30581006	Root MSE =	.52261	

LG EARN	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
S	.0664621	.0085297	7.79	0.000	.0497034	.0832207
_cons	1.83624	.1289384	14.24	0.000	1.58291	2.089571

Ниже приведен регрессионный результат регрессии уравнения заработной платы с использованием набора данных 21 (Data Set 21). Оценка  $\beta_2$  равна 0,066. В качестве оценки это означает, что дополнительный год обучения увеличивает почасовой заработок на долю 0,066.



# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S
```

Source	SS	df	MS			
Model	16.5822819	1	16.5822819	Number of obs =	500	
Residual	136.016938	498	.273126381	F( 1, 498) =	60.71	
Total	152.59922	499	.30581006	Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.1087	
				Adj R-squared =	0.1069	
				Root MSE =	.52261	

LGEARN	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
S	.0664621	.0085297	7.79	0.000	.0497034	.0832207
_cons	1.83624	.1289384	14.24	0.000	1.58291	2.089571

В повседневном языке более естественно говорить о процентах, а не о пропорциях, поэтому мы умножаем коэффициент на 100. Это означает, что дополнительный год обучения увеличивает почасовые доходы на 6,6%.

# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S
```

Source	SS	df	MS	Number of obs = 500		
Model	16.5822819	1	16.5822819	F( 1, 498)	=	60.71
Residual	136.016938	498	.273126381	Prob > F	=	0.0000
				R-squared	=	0.1087
				Adj R-squared	=	0.1069
Total	152.59922	499	.30581006	Root MSE	=	.52261

LGEARN	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
S	.0664621	.0085297	7.79	0.000	.0497034	.0832207
_cons	1.83624	.1289384	14.24	0.000	1.58291	2.089571

$(\beta_2 \Delta X)^2$  not negligible

Если  $\Delta X=1$ , то

$$\frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} = \beta_2 + \frac{\beta_2^2}{2} + \dots = 0.066 + \frac{(0.066)^2}{2} = 0.068$$

Если учесть тот факт, что год обучения является значительным изменением и точно работает, пропорциональное увеличение составляет 0,068, а процентное увеличение -на 6,8%.

# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S
```

Source	SS	df	MS	Number of obs = 500		
Model	16.5822819	1	16.5822819	F( 1, 498)	=	60.71
Residual	136.016938	498	.273126381	Prob > F	=	0.0000
Total	152.59922	499	.30581006	R-squared	=	0.1087
				Adj R-squared	=	0.1069
				Root MSE	=	.52261

LGEARN	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
S	.0664621	.0085297	7.79	0.000	.0497034	.0832207
_cons	1.83624	.1289384	14.24	0.000	1.58291	2.089571

$(\beta_2 \Delta X)^2$  not negligible

Если  $\Delta X=1$ , то

$$\frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} = \beta_2 + \frac{\beta_2^2}{2} + \dots = 0.066 + \frac{(0.066)^2}{2} = 0.068$$

В общем случае, если единичное изменение в X действительно значимо, оценка  $\beta_2$  будет мала, и ее можно интерпретировать непосредственно как оценку пропорционального изменения Y на единичное изменение в X.

# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S
```

Source	SS	df	MS	Number of obs = 500		
Model	16.5822819	1	16.5822819	F( 1, 498)	=	60.71
Residual	136.016938	498	.273126381	Prob > F	=	0.0000
				R-squared	=	0.1087
				Adj R-squared	=	0.1069
Total	152.59922	499	.30581006	Root MSE	=	.52261

LGEARN	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
S	.0664621	.0085297	7.79	0.000	.0497034	.0832207
_cons	1.83624	.1289384	14.24	0.000	1.58291	2.089571

$(\beta_2 \Delta X)^2$  not negligible

Если  $\Delta X=1$ , то 
$$\frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} = \beta_2 + \frac{\beta_2^2}{2} + \dots = 0.066 + \frac{(0.066)^2}{2} = 0.068$$

Однако, если изменение единицы в X не мало, коэффициент может быть большим, а второй член может быть незначительным. В данном случае год обучения не является значительным, но ясно, что уточнение делает лишь небольшую разницу.

# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S
```

Source	SS	df	MS	Number of obs = 500		
Model	16.5822819	1	16.5822819	F( 1, 498)	=	60.71
Residual	136.016938	498	.273126381	Prob > F	=	0.0000
				R-squared	=	0.1087
				Adj R-squared	=	0.1069
Total	152.59922	499	.30581006	Root MSE	=	.52261

LGEARN	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
S	.0664621	.0085297	7.79	0.000	.0497034	.0832207
_cons	1.83624	.1289384	14.24	0.000	1.58291	2.089571

$(\beta_2 \Delta X)^2$  not negligible

If  $\Delta X$  is one unit, 
$$\frac{\Delta Y}{Y} = \beta_2 + \frac{\beta_2^2}{2} + \dots = 0.066 + \frac{(0.066)^2}{2} = 0.068$$

В общем случае, когда  $\beta_2$  меньше 0.1, there is little to be gained by working out the effect exactly.

В общем случае, когда  $\beta_2$  меньше 0,1, мало что можно получить, разработав эффект точно.

# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S
```

Source	SS	df	MS	Number of obs = 500		
Model	16.5822819	1	16.5822819	F( 1, 498)	=	60.71
Residual	136.016938	498	.273126381	Prob > F	=	0.0000
				R-squared	=	0.1087
				Adj R-squared	=	0.1069
				Root MSE	=	.52261
-----						
LGEARN	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
S	.0664621	.0085297	7.79	0.000	.0497034	.0832207
_cons	1.83624	.1289384	14.24	0.000	1.58291	2.089571

$$\log \hat{\beta}_1 = 1.836$$

$$\hat{\beta}_1 = e^{1.836} = 6.27$$

Константа в регрессии представляет собой возможное значение  $\log \beta_1$ . Из него получаем возможное значение  $\beta_1$  равную  $e^{1.836}$ , что равно 6.27.

# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S
```

Source	SS	df	MS	Number of obs = 500		
Model	16.5822819	1	16.5822819	F( 1, 498)	=	60.71
Residual	136.016938	498	.273126381	Prob > F	=	0.0000
				R-squared	=	0.1087
				Adj R-squared	=	0.1069
				Root MSE	=	.52261
-----						
LGEARN	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
S	.0664621	.0085297	7.79	0.000	.0497034	.0832207
_cons	1.83624	.1289384	14.24	0.000	1.58291	2.089571

$$\log \hat{\beta}_1 = 1.836$$

$$\hat{\beta}_1 = e^{1.836} = 6.27$$

В буквальном смысле это означает, что человек без образования зарабатывает 6,27 долл. США в час. Тем не менее это опасно экстраполировать так далеко от диапазона, для которого у нас есть данные.

# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ



Log-Linear model of schooling (highest grade completed)

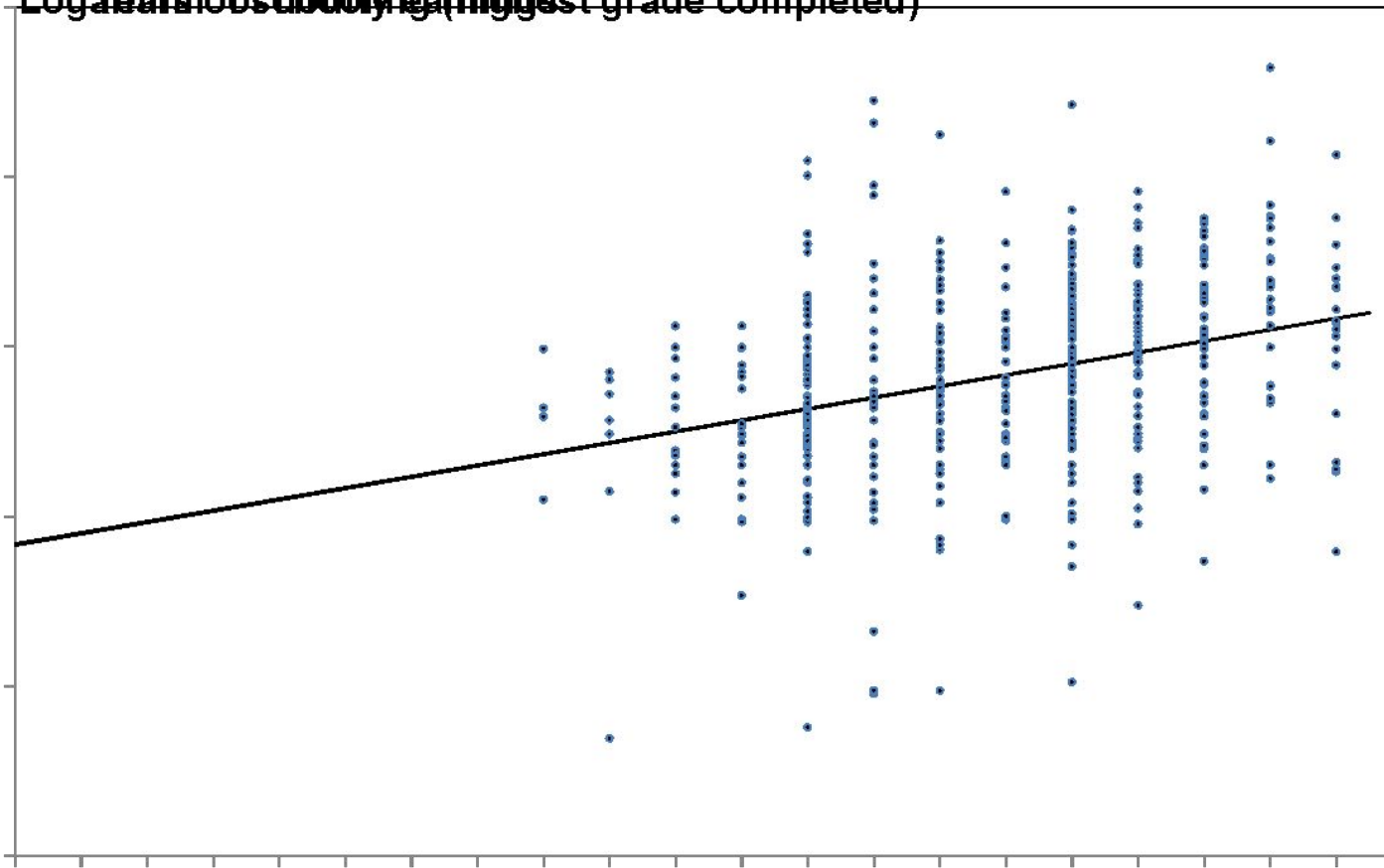
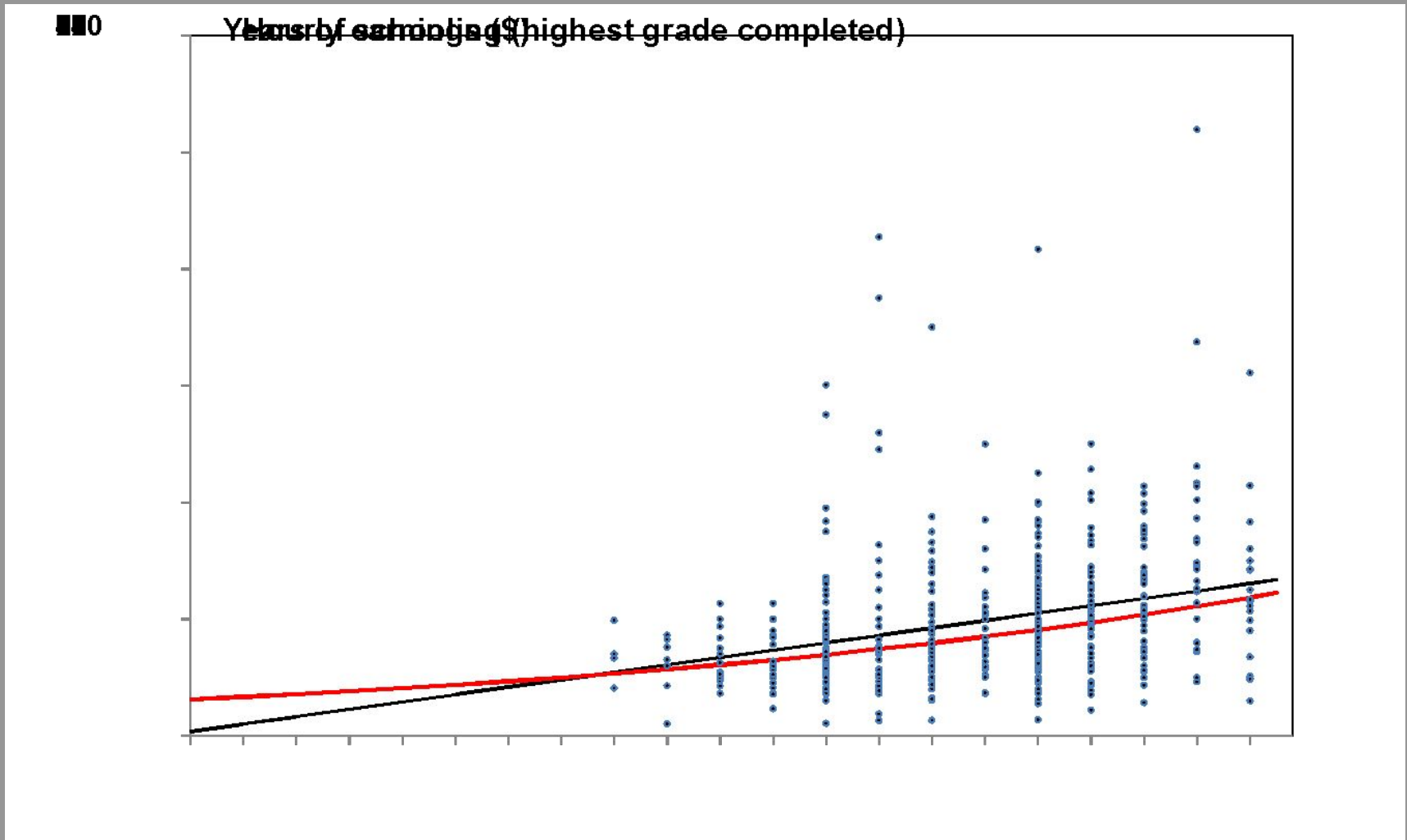


Диаграмма рассеивания с полулогарифмической регрессией.



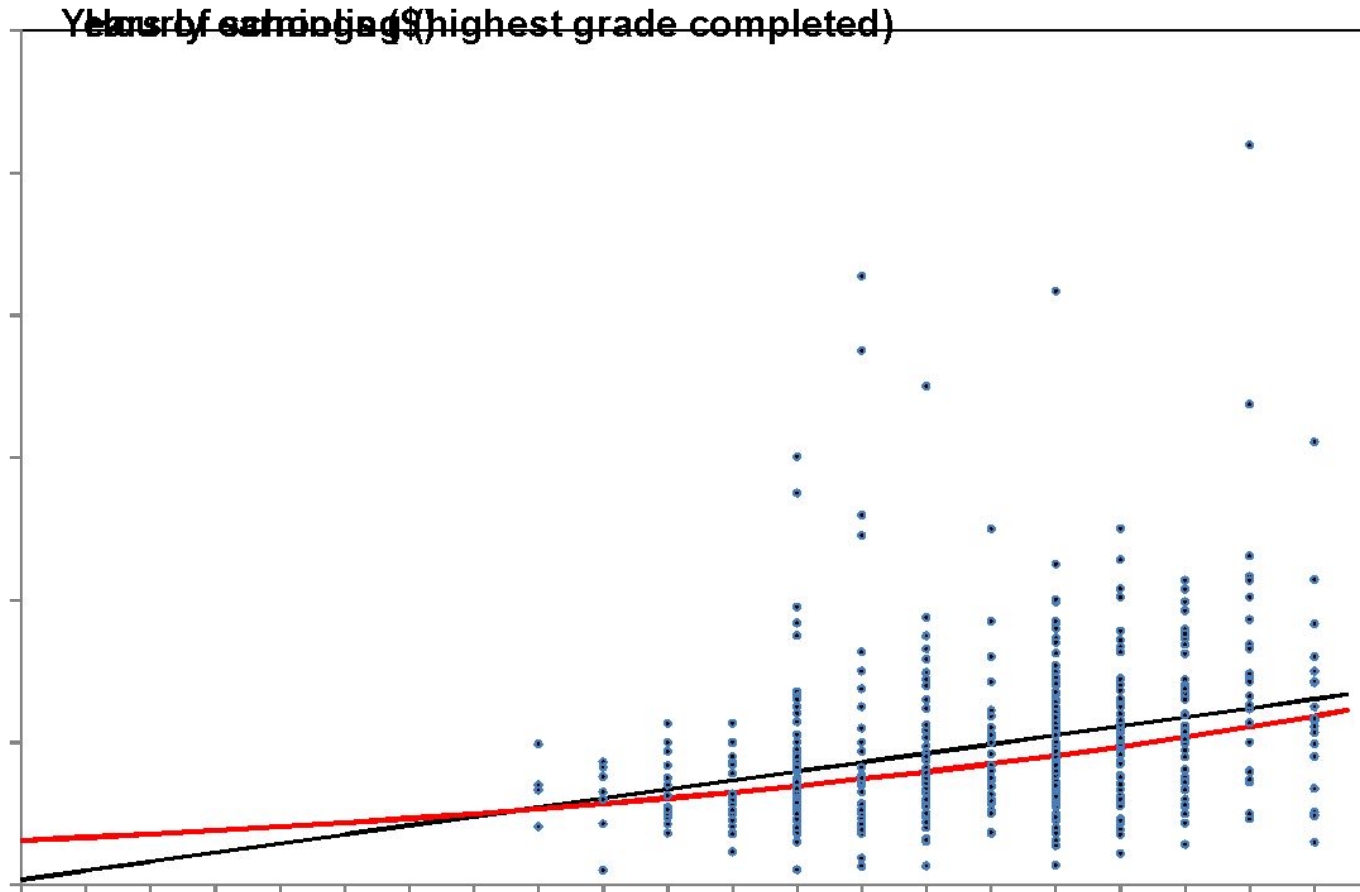
# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ



Полулогарифмическая линия регрессии, построенная на диаграмме рассеивания с нетрансформированными данными, с приведенной для сравнения линейной регрессией.

# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

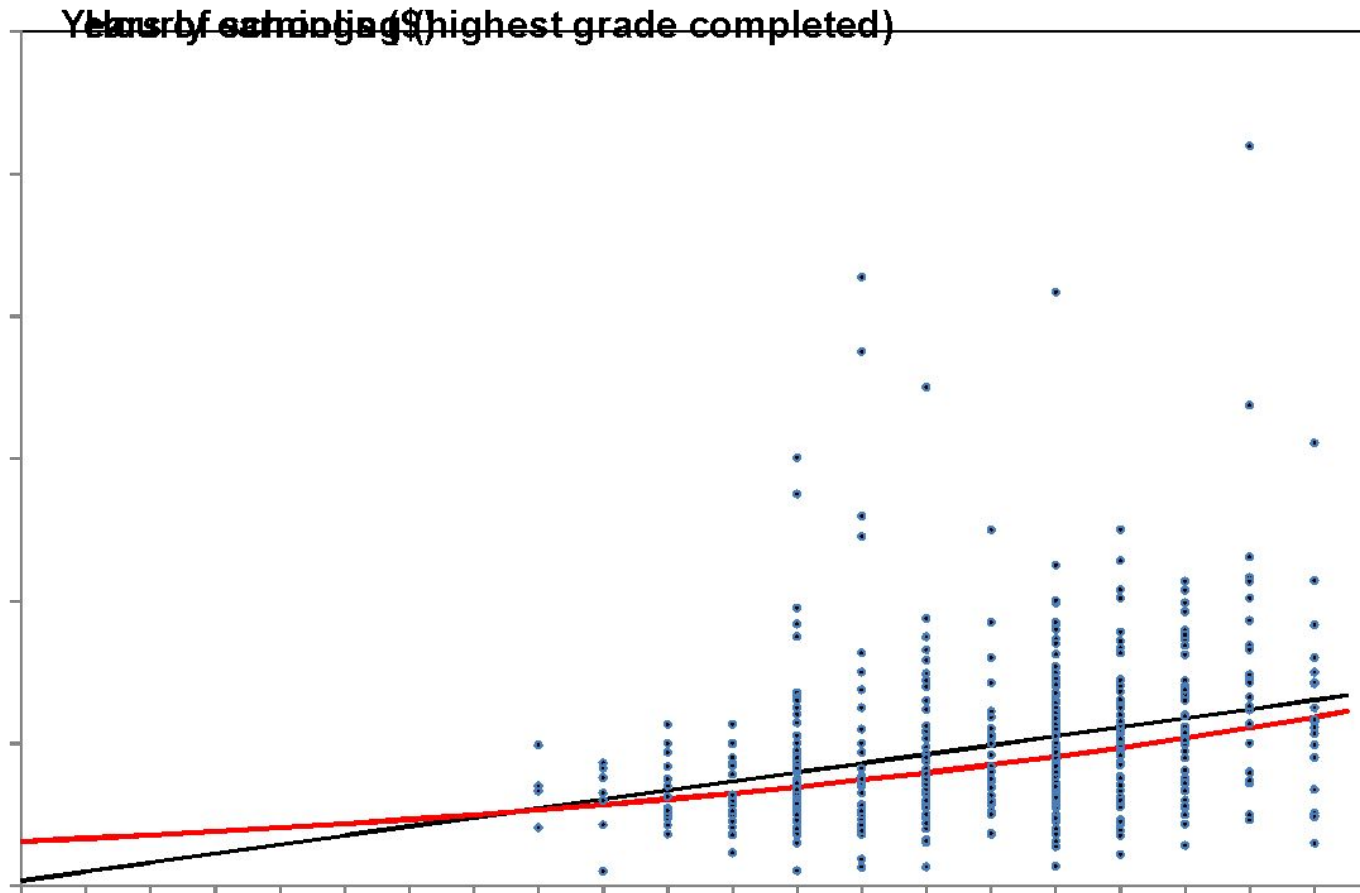
■ ■ 0



Нет большой разницы в подходе регрессионных линий, но полулогарифмическая регрессия более удовлетворительна в двух отношениях.

# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

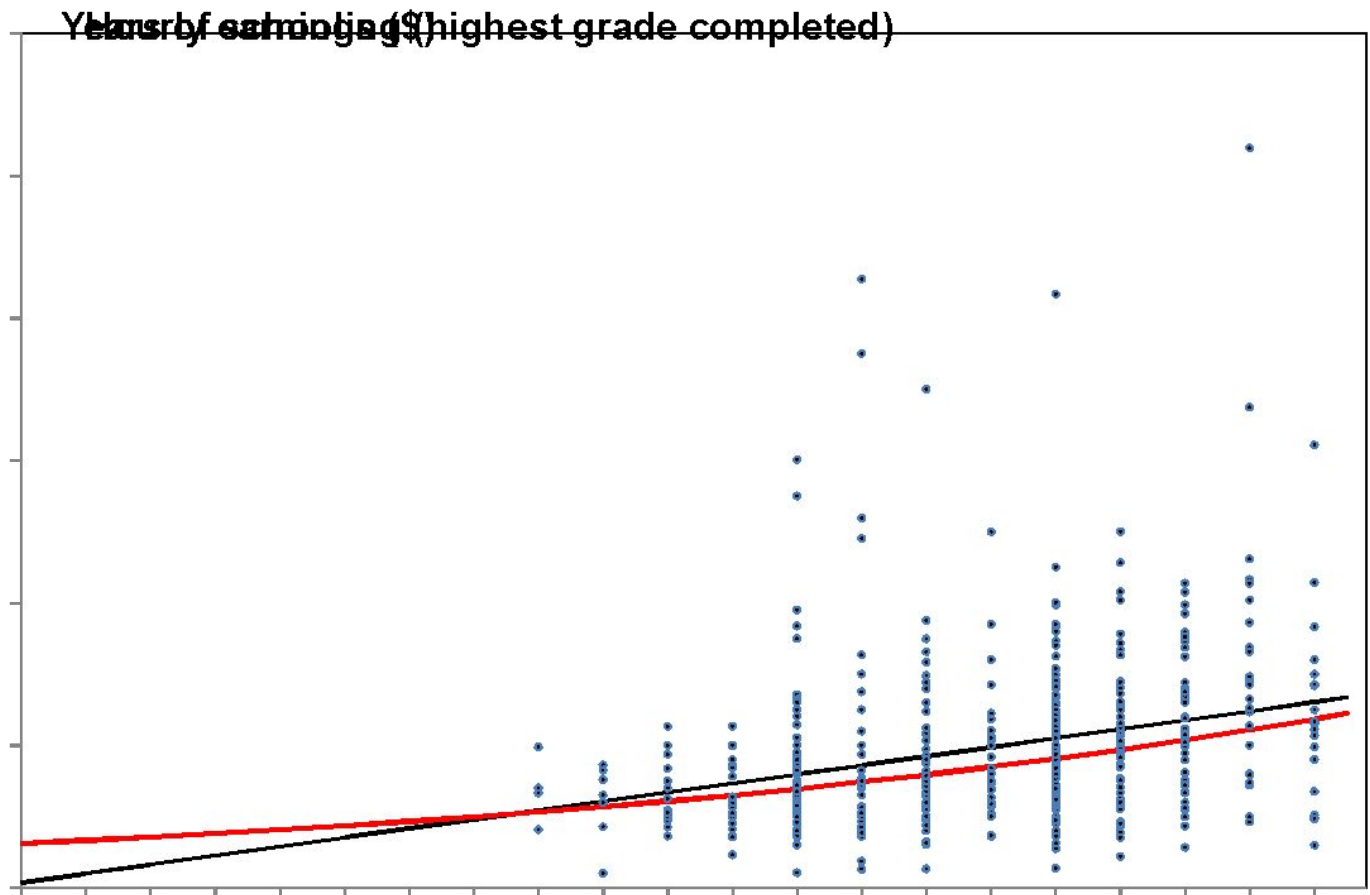
■ 0



Линейная спецификация предсказывает, что ежечасная заработная плата будет увеличиваться на фиксированную сумму, 1,27 доллара США, с каждым дополнительным годом обучения. Это неправдоподобно для высокого уровня образования. Полулогарифмическая спецификация позволяет увеличить прирост с уровнем образования.

# ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

0



Во-вторых, линейная спецификация предсказывает очень низкие доходы для человека без обучения. Полулогарифмическая спецификация предсказывает почасовой заработок в размере 6,27 доллара.