ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

Эта последовательность вводит полулогарифмическую модель и показывает, как она может применяться к прибыли. Зависимая переменная является линейной, но объясняющие переменные, умноженные на их коэффициенты, являются показателями e.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \beta_1 \beta_2 e^{\beta_2 X} = \beta_2 Y$$

Дифференциал *Y* по *X* упрощается до $\beta_2 Y$.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \beta_1 \beta_2 e^{\beta_2 X} = \beta_2 Y$$

$$\frac{\mathrm{d}Y / Y}{\mathrm{d}X} = \beta_2$$

Следовательно, пропорциональное изменение Y на единицу изменения в X равно b_2. Поэтому он не зависит от значения X.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$Y + \Delta Y = \beta_1 e^{\beta_2 (X + \Delta X)}$$

Строго говоря, эта интерпретация справедлива только для малых значений b_2. Когда b_2 не мало, интерпретация может быть немного сложнее.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$Y + \Delta Y = \beta_1 e^{\beta_2 (X + \Delta X)}$$

Предположим, что X увеличивается на величину ΔX и, как следствие, Y увеличивается на величину ΔY.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$Y + \Delta Y = \beta_1 e^{\beta_2 (X + \Delta X)}$$

$$= \beta_1 e^{\beta_2 X} e^{\beta_2 \Delta X}$$

Мы можем переписать правую часть уравнения, как показано.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\begin{aligned} Y + \Delta Y &= \beta_1 e^{\beta_2 (X + \Delta X)} \\ &= \beta_1 e^{\beta_2 X} e^{\beta_2 \Delta X} \\ &= Y e^{\beta_2 \Delta X} \end{aligned}$$

Мы можем упростить правую часть уравнения, как показано.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\begin{aligned} Y + \Delta Y &= \beta_1 e^{\beta_2 (X + \Delta X)} \\ &= \beta_1 e^{\beta_2 X} e^{\beta_2 \Delta X} \\ &= Y e^{\beta_2 \Delta X} \\ &= Y \left(1 + \beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \ldots \right) \end{aligned}$$

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^3}{3!} + \ldots$$

Теперь разложим показательную функцию, используя стандартное выражение для e до некоторой степени.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\begin{aligned} Y + \Delta Y &= \beta_1 e^{\beta_2 (X + \Delta X)} \\ &= \beta_1 e^{\beta_2 X} e^{\beta_2 \Delta X} \\ &= Y e^{\beta_2 \Delta X} \\ &= Y \left(1 + \beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\Delta Y = Y \left(\beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \dots \right)$$

Вычитаем Y с обеих сторон.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$\Delta Y = Y\left(\beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \ldots\right)$$

$(\beta_2 \Delta X)^2$ **negligible**

Рассмотрим теперь два случая: где β_2 и ΔX настолько малы, что $(\beta_2 \Delta X)^2$ пренебрежимо мало, и альтернативно.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$\Delta Y = Y\left(\beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \dots\right)$$

$(\beta_2 \Delta X)^2$ **negligible**

$$\Delta Y = Y\beta_2 \Delta X$$

$$\frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} = \beta_2$$

Если $(\beta_2 \Delta X)^2$ пренебрежимо мало, мы получаем ту же интерпретацию β_2 что и следовало ожидать.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$\Delta Y = Y\left(\beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \ldots\right)$$

$(\beta_2 \Delta X)^2$ not negligible

$$\frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} = \beta_2 + \frac{\beta_2^2 \Delta X}{2} + \ldots$$

Если $(\beta_2\ \Delta X)^2$ не является пренебрежимо малым, пропорциональное изменение в *Y* при изменении ΔX в *X* имеет дополнительный член (Предположим, что β_2 и ΔX достаточно малы, что с более высокими степенями ΔX можно пренебречь.)

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$\Delta Y = Y\left(\beta_2 \Delta X + \frac{(\beta_2 \Delta X)^2}{2} + \ldots\right)$$

$(\beta_2 \Delta X)^2$ not negligible

$$\frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} = \beta_2 + \frac{\beta_2^2 \Delta X}{2} + \ldots$$

$$= \beta_2 + \frac{\beta_2^2}{2} + \ldots \qquad \text{if } \Delta X \text{ is one unit}$$

Обычно мы говорим о влиянии изменения одной части переменной X. Если ΔX = 1, пропорциональное изменение происходит в Y , как показано. Теперь значение β_2 становится настолько малым, что вторым и последующим значениями можно пренебречь.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$X = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = \beta_1 e^0 = \beta_1$$

β_1 является значением *Y* когда X равно нулю (заметим, что e^0 равно 1).

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X}$$

$$\begin{aligned} \log Y &= \log \beta_1 e^{\beta_2 X} \\ &= \log \beta_1 + \log e^{\beta_2 X} \\ &= \beta_1' + \beta_2 X \log e \\ &= \beta_1' + \beta_2 X \end{aligned}$$

Чтобы соответствовать функции этого типа, вы берете логарифмы с обеих сторон. Правая часть уравнения становится линейной функцией от X (заметим, что логарифм е на основание е равен 1). Следовательно, мы можем поместить модель с линейной регрессией log Y на X.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S

----------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     500
-------------+------------------------------           F(  1,   498) =   60.71
       Model |  16.5822819     1  16.5822819           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  136.016938   498  .273126381           R-squared     =  0.1087
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1069
       Total |   152.59922   499   .30581006           Root MSE      =  .52261
----------------------------------------------------------------------------
      LGEARN |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|      [95% Conf. Interval]
-------------+--------------------------------------------------------------
           S |   .0664621   .0085297     7.79   0.000      .0497034    .0832207
       _cons |    1.83624   .1289384    14.24   0.000       1.58291    2.089571
----------------------------------------------------------------------------
```

Ниже приведен регрессионный результат регрессии уравнения заработной платы с использованием набора данных 21(Data Set 21). Оценка β_2 равна 0,066. В качестве оценки это означает, что дополнительный год обучения увеличивается почасовой заработок на долю 0,066.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S

------------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     500
-------------+------------------------------           F(  1,   498) =   60.71
       Model |  16.5822819     1  16.5822819           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  136.016938   498  .273126381           R-squared     =  0.1087
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1069
       Total |   152.59922   499   .30581006           Root MSE      =  .52261
------------------------------------------------------------------------------
      LGEARN |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|      [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           S |   .0664621   .0085297     7.79   0.000      .0497034    .0832207
       _cons |    1.83624   .1289384    14.24   0.000       1.58291    2.089571
------------------------------------------------------------------------------
```

В повседневном языке более естественно говорить о процентах, а не о пропорциях, поэтому мы умножаем коэффициент на 100. Это означает, что дополнительный год обучения увеличивает почасовые доходы на 6,6%.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S

------------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     500
-------------+------------------------------           F(  1,   498) =   60.71
       Model |  16.5822819     1  16.5822819           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  136.016938   498  .273126381           R-squared     =  0.1087
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1069
       Total |   152.59922   499   .30581006           Root MSE      =  .52261
------------------------------------------------------------------------------
      LGEARN |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           S |   .0664621   .0085297     7.79   0.000     .0497034    .0832207
       _cons |    1.83624   .1289384    14.24   0.000      1.58291    2.089571
------------------------------------------------------------------------------
```

$(\beta_2 \Delta X)^2$ **not negligible**

Если $\Delta X = 1$**, то**

$$\frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} = \beta_2 + \frac{\beta_2^2}{2} + \ldots = 0.066 + \frac{(0.066)^2}{2} = 0.068$$

Если учесть тот факт, что год обучения является значительным изменением и точно работает, пропорциональное увеличение составляет 0,068, а процентное увеличение -на 6,8%.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S

------------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     500
-------------+------------------------------           F(  1,   498) =   60.71
       Model |  16.5822819     1  16.5822819           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  136.016938   498  .273126381           R-squared     =  0.1087
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1069
       Total |   152.59922   499   .30581006           Root MSE      =  .52261
------------------------------------------------------------------------------
      LGEARN |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           S |   .0664621   .0085297     7.79   0.000     .0497034    .0832207
       _cons |    1.83624   .1289384    14.24   0.000      1.58291    2.089571
------------------------------------------------------------------------------
```

$(\beta_2 \Delta X)^2$ **not negligible**

Если $\Delta X = 1$**, то**

$$\frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} = \beta_2 + \frac{\beta_2^2}{2} + \ldots \quad = 0.066 + \frac{(0.066)^2}{2} = 0.068$$

В общем случае, если единичное изменение в X действительно значимо, оценка β_2 будет мала, и ее можно интерпретировать непосредственно как оценку пропорционального изменения Y на единичное изменение в X.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S

------------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     500
-------------+------------------------------           F(  1,   498) =   60.71
       Model |  16.5822819     1  16.5822819           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  136.016938   498  .273126381           R-squared     =  0.1087
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1069
       Total |   152.59922   499   .30581006           Root MSE      =  .52261
------------------------------------------------------------------------------
      LGEARN |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           S |   .0664621   .0085297     7.79   0.000     .0497034    .0832207
       _cons |    1.83624   .1289384    14.24   0.000      1.58291    2.089571
------------------------------------------------------------------------------
```

$(\beta_2 \Delta X)^2$ **not negligible**

Если $\Delta X=1$, **то** $$\frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} = \beta_2 + \frac{\beta_2^2}{2} + \ldots = 0.066 + \frac{(0.066)^2}{2} = 0.068$$

Однако, если изменение единицы в X не мало, коэффициент может быть большим, а второй член может быть незначительным. В данном случае год обучения не является значительным, но ясно, что уточнение делает лишь небольшую разницу.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S

----------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     500
-------------+------------------------------           F(  1,   498) =   60.71
       Model |  16.5822819     1  16.5822819           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  136.016938   498  .273126381           R-squared     =  0.1087
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1069
       Total |   152.59922   499   .30581006           Root MSE      =  .52261
----------------------------------------------------------------------------
      LGEARN |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+--------------------------------------------------------------
           S |   .0664621   .0085297     7.79   0.000     .0497034    .0832207
       _cons |    1.83624   .1289384    14.24   0.000      1.58291    2.089571
----------------------------------------------------------------------------
```

$(\beta_2 \Delta X)^2$ **not negligible**

If ΔX **is one unit,** $$\frac{\Delta Y / Y}{\Delta X} = \beta_2 + \frac{\beta_2^2}{2} + \ldots \quad = 0.066 + \frac{(0.066)^2}{2} = 0.068$$

В общем случае, когда β_2 меньше **0.1, there is little to be gained by working out the effect exactly.**

В общем случае, когда b2 меньше 0,1, мало что можно получить, разработав эффект точно.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S

----------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     500
-------------+------------------------------           F(  1,   498) =   60.71
       Model |  16.5822819     1  16.5822819           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  136.016938   498  .273126381           R-squared     =  0.1087
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1069
       Total |   152.59922   499   .30581006           Root MSE      =  .52261
----------------------------------------------------------------------------
      LGEARN |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+--------------------------------------------------------------
           S |   .0664621   .0085297     7.79   0.000     .0497034    .0832207
       _cons |    1.83624   .1289384    14.24   0.000      1.58291    2.089571
----------------------------------------------------------------------------
```

$$\log \hat{\beta}_1 = 1.836$$

$$\hat{\beta}_1 = e^{1.836} = 6.27$$

Константа в регрессии представляет собой возможное значение log β_1. Из него получаем возможное значение β_1 равную $e^{1.836}$, что равно 6.27.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

```
. reg LGEARN S

------------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     500
-------------+------------------------------           F(  1,   498) =   60.71
       Model |  16.5822819     1  16.5822819           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  136.016938   498  .273126381           R-squared     =  0.1087
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1069
       Total |   152.59922   499   .30581006           Root MSE      =  .52261
------------------------------------------------------------------------------
      LGEARN |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           S |   .0664621   .0085297     7.79   0.000     .0497034    .0832207
       _cons |    1.83624   .1289384    14.24   0.000      1.58291    2.089571
------------------------------------------------------------------------------
```

$$\log \hat{\beta}_1 = 1.836$$

$$\hat{\beta}_1 = e^{1.836} = 6.27$$

В буквальном смысле это означает, что человек без образования зарабатывает 6,27 долл. США в час. Тем не менее это опасно экстраполировать так далеко от диапазона, для которого у нас есть данные.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

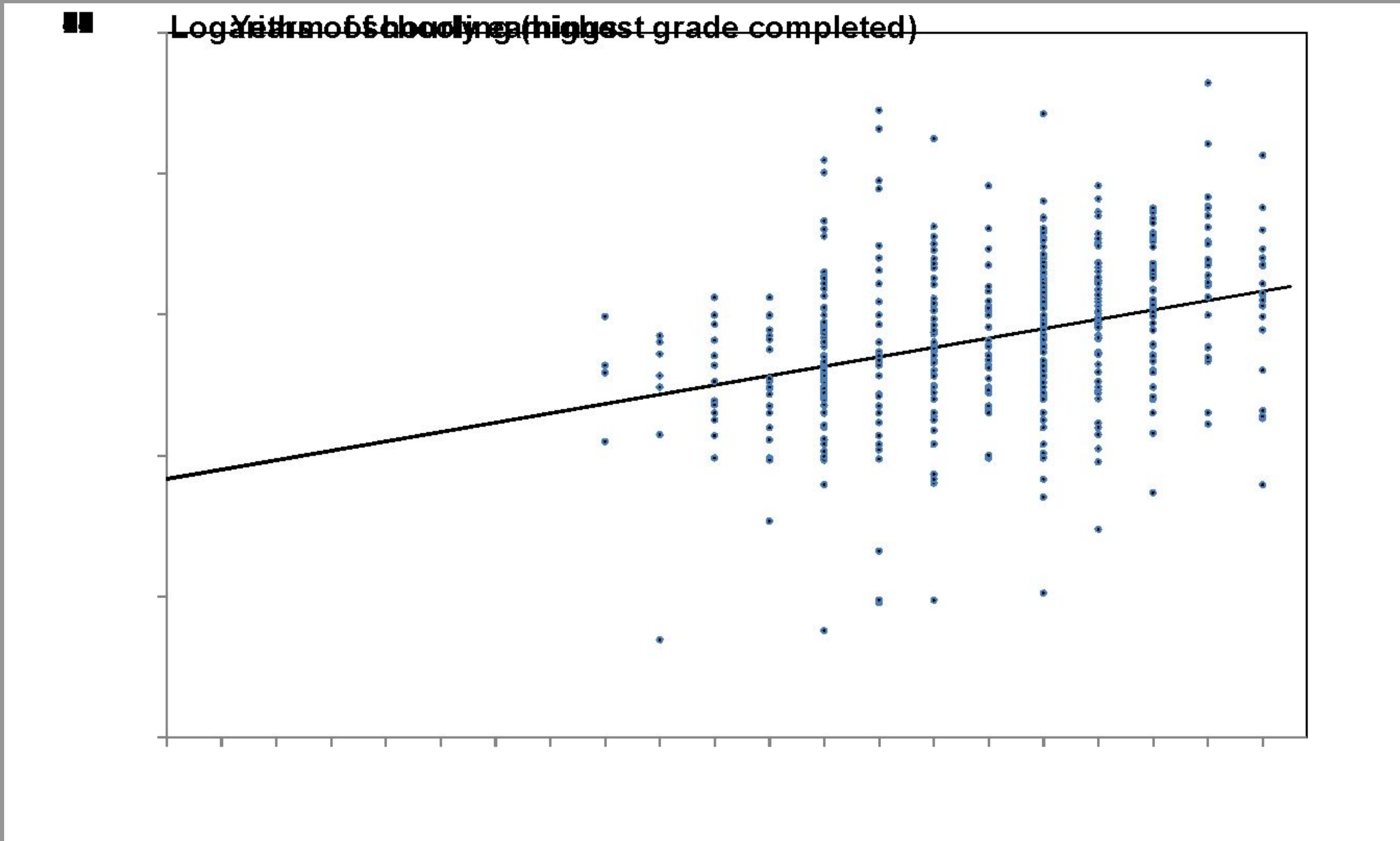
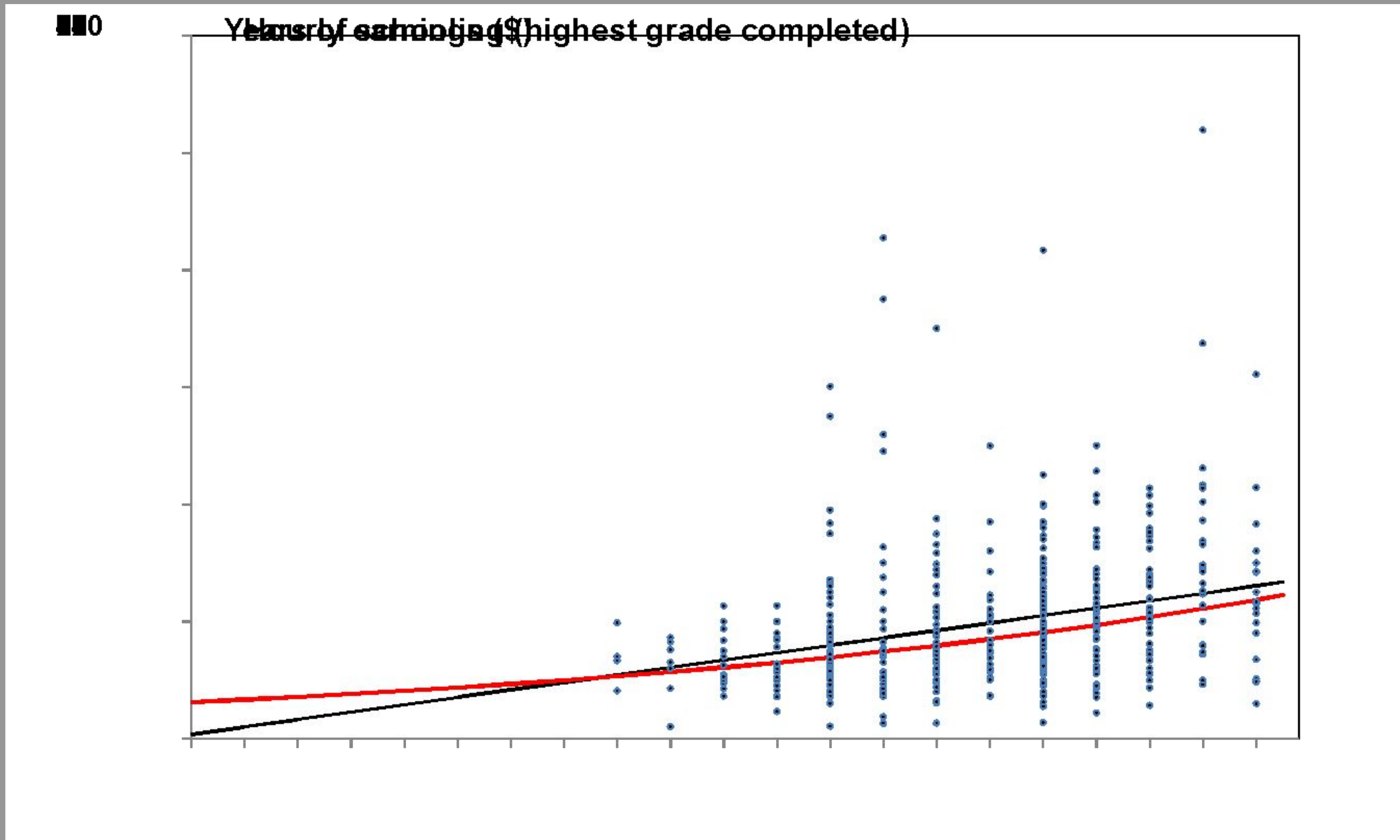


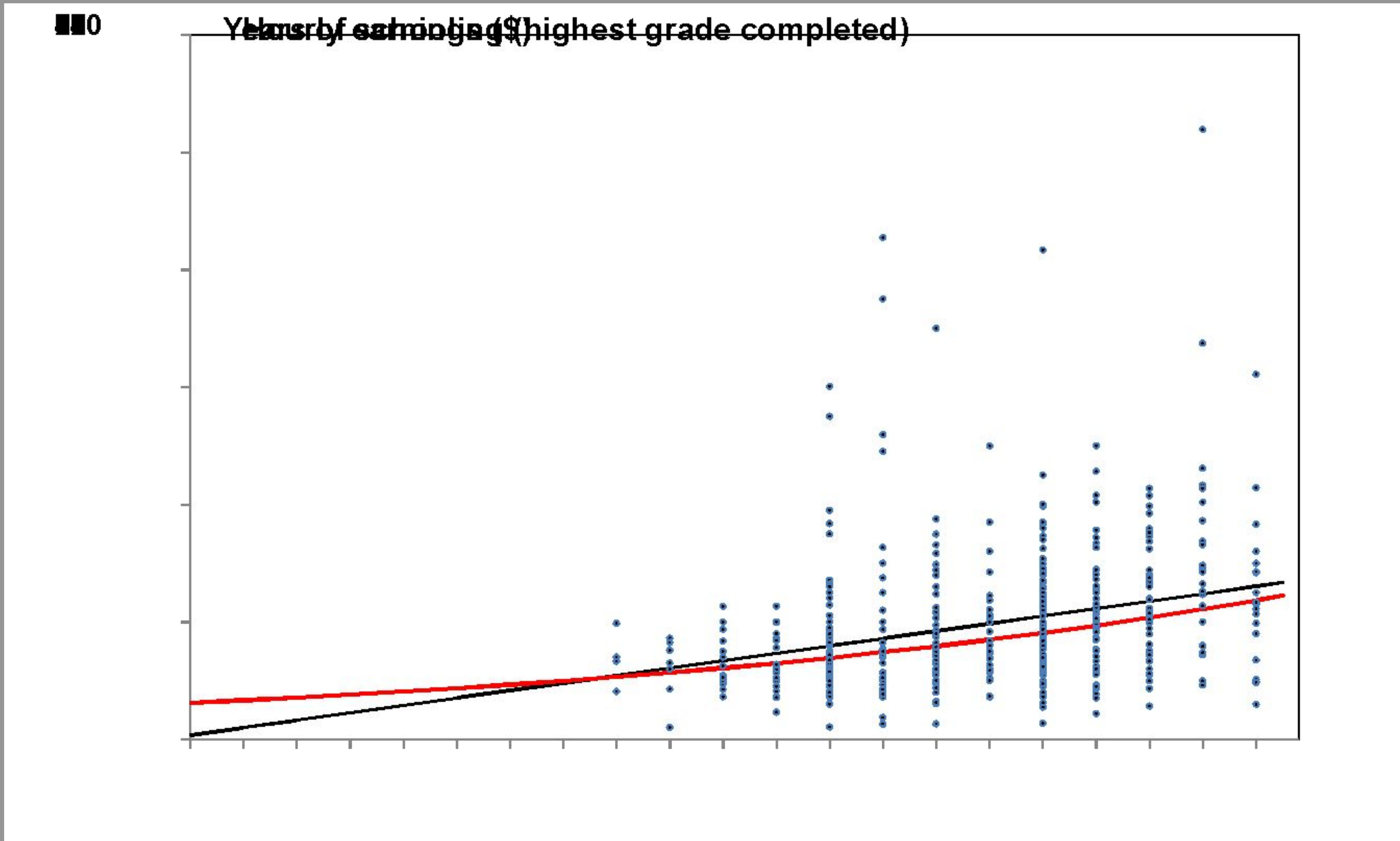
Диаграмма рассеивания с полулогарифмической регрессией.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ



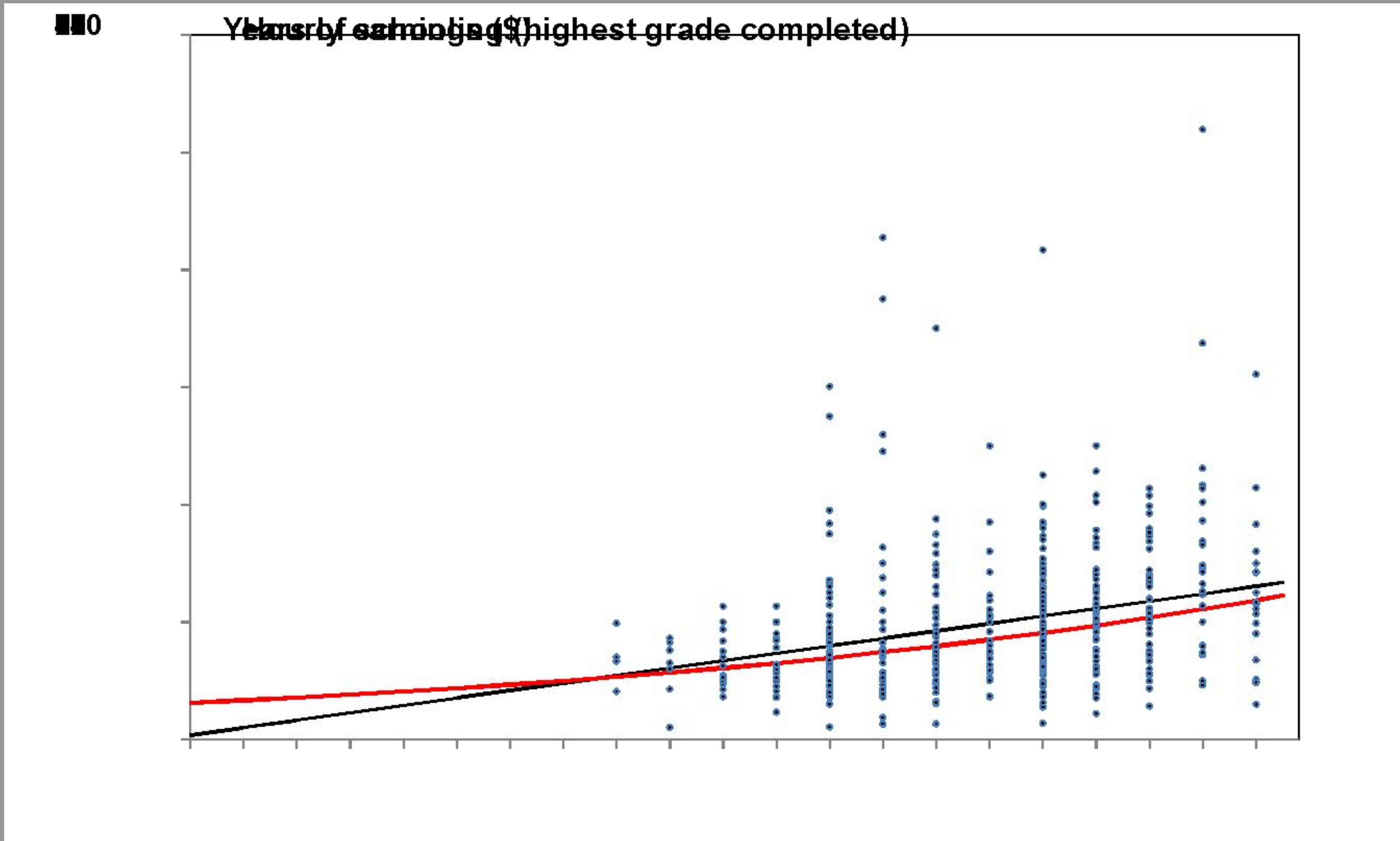
Полулогарифмическая линия регрессии, построенная на диаграмме рассеивания с нетрансформированными данными, с приведенной для сравнения линейной регрессией.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ



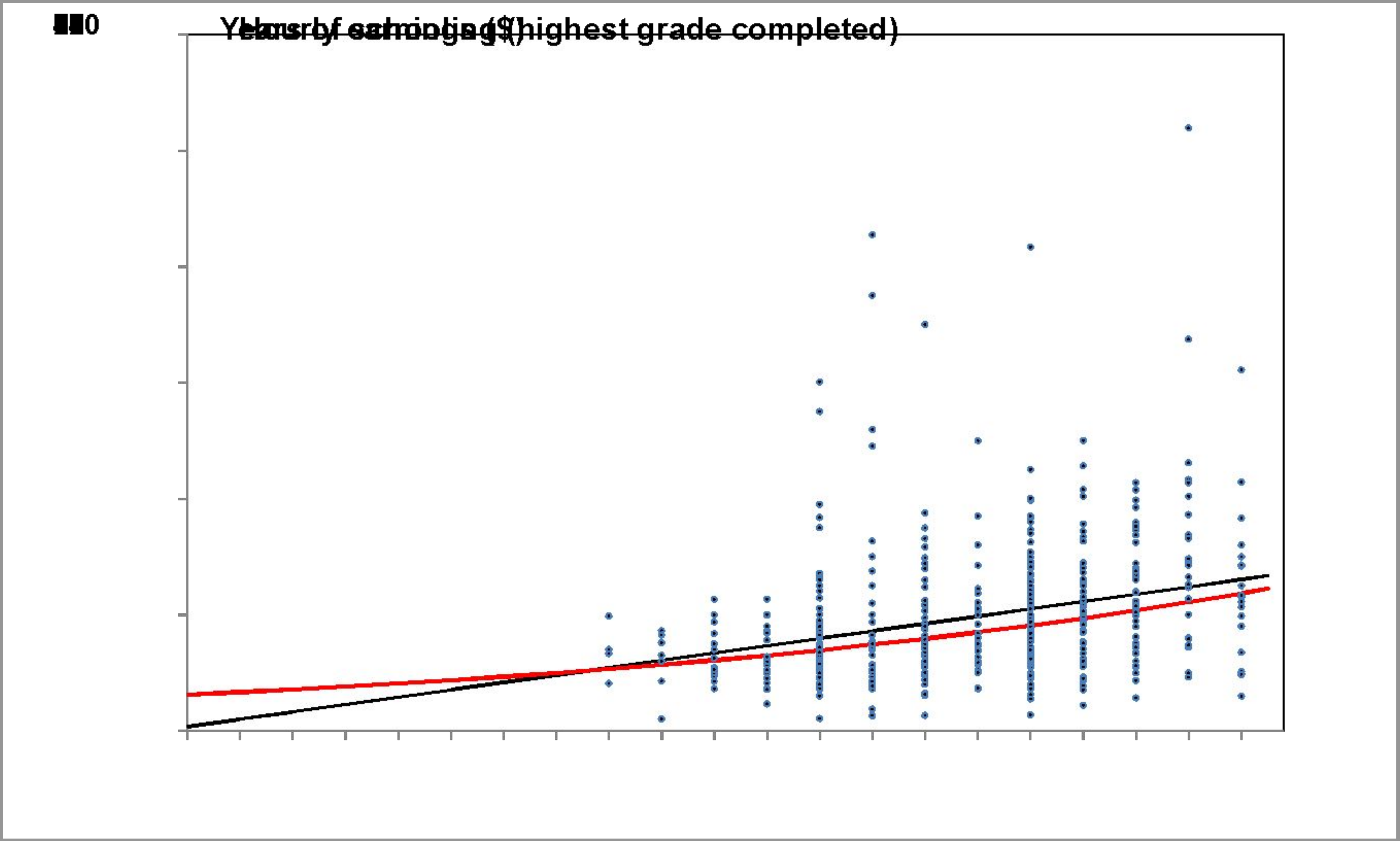
Нет большой разницы в подходе регрессионных линий, но полулогарифмическая регрессия более удовлетворительна в двух отношениях.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ



Линейная спецификация предсказывает, что ежечасная заработная плата будет увеличиваться на фиксированную сумму, 1,27 доллара США, с каждым дополнительным годом обучения. Это неправдоподобно для высокого уровня образования. Полулогарифмическая спецификация позволяет увеличить прирост с уровнем образования.

ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ



Во-вторых, линейная спецификация предсказывает очень низкие доходы для человека без обучения. Полулогарифмическая спецификация предсказывает почасовой заработок в размере 6,27 доллара.