Семинар 11

доцент Волков Н.П.

Занятие 11

Поверхности второго порядка.

К.887| 1) $x=0$ – плоскость Oyz

3) $z=0$ – координатная плоскость Oxy

5) $y+2=0$ – плоскость, проходящая через точку $M_0(0,-2,0)$ параллельно координатной плоскости Oxz.

7) $x^2+y^2+z^2=25$ – сфера с центром в точке $O(0,0,0)$ радиуса 5.

9) $x^2+2y^2+3z^2=0$ – точка $M_0(0,0,0)$

11) $x-y=0$ – биссекторная плоскость двугранного угла между координатными плоскостями Oxz и Oyz, проходящая через ось Oz.

15) $xz=0$ – 2 координатные плоскости: Oyz и Oxy.

17) $xyz=0$ – 3 координатные плоскости: Oyz, Oxz и Oxy

19) $xy-y^2=0 \Rightarrow y(x-y)=0$ – 2 плоскости:

1) биссекторная плоскость (см 11)) и
2) координатная плоскость Oxz.

903) 1) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ — ось Oz.

5) $\begin{cases} x+2=0 \\ y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ - прямая, проходящая через точку $M_0(-2;3;0)$ параллельно оси Oz.

8) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=9$ - окружность с центром в точке $O(0,0,0)$ радиуса 3.

910) 1) $x^2+z^2=25$ - круговой цилиндр с образующей параллельной оси Oy и направляющей окружностью в плоскости Oxz с центром в точке $O(0,0,0)$ радиуса 5.

3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ - гиперболический цилиндр с образующей параллельной оси Oz и направляющей гиперболой на плоскости Oxy с полуосями 4 и 3.

5) $x^2-xy=0 \Rightarrow x(x-y)=0$ -

1) координатная плоскость Oyz и

2) биссекторная плоскость $y=x$

7) $y^2+z^2=0$ – ось Ox.

9) $x^2+z^2=2z \Rightarrow x^2+(z^2-2z+1)-1=0$

$x^2+(z-1)^2=1$ – круговой цилиндр с образующей параллельной оси Oy и направляющей окружностью на плоскости Oxz с центром в точке $M_0(0;0;1)$ радиуса 1.

1. $x^2+y^2+z^2+10x-8y+4z-4=0$

$(x^2+10x+25)-25+(y^2-8y+16)-16+(z^2+4z+4)-4-4=0$

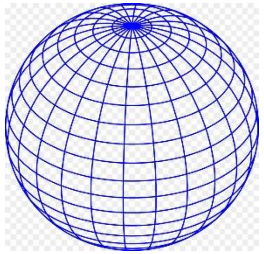
$(x+5)^2+(y-4)^2+(z+2)^2-49=0$

Замены: $x'=x+5$, $y'=y-4$, $z'=z+2$

$\Rightarrow \boxed{(x')^2+(y')^2+(z')^2=7^2}$ (*)

Преобразование параллельного переноса:

$$\begin{cases} x=x'-5 \\ y=y'+4 \\ z=z'-2 \end{cases} \Rightarrow$$ (*) – каноническое ур-ние сферы с центром в точке $O'(-5;4;-2)$ радиуса 7.



2. $4x^2 - y^2 + 9z^2 - 16x + 6y + 8 = 0$

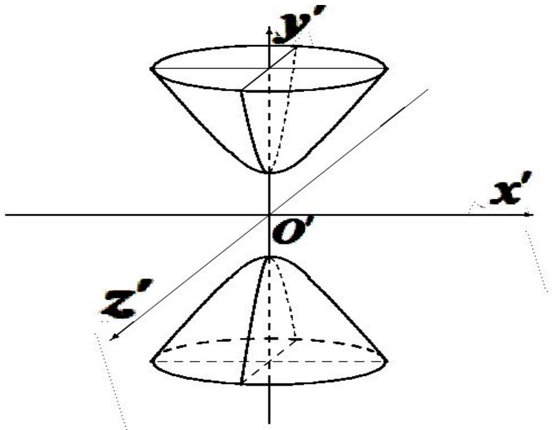
$$4(x^2 - 4x + 4) - 16 - (y^2 - 6y + 9) + 9 + 9z^2 + 8 = 0$$

$$4(x-2)^2 - (y-3)^2 + 9z^2 + 1 = 0$$

Замены: $x' = x - 2$, $y' = y - 3$, $z' = z$

$$\boxed{\frac{(x')^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{(y')^2}{1^2} + \frac{(z')^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -1} \quad (*)$$

После преобразования параллельного переноса: $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 3 \\ z = z' \end{cases}$ получим уравнение $(*)$, которое описывает двуполостный гиперболоид с полуосями $\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{3}$ с центром в точке $O'(2; 3; 0)$.



3. $36x^2+4y^2+9z^2+144x+16y-18z=0$

Полные квадраты:

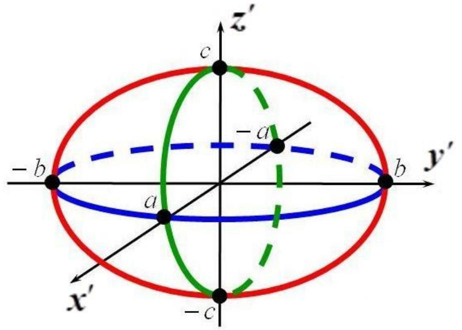
$36(x^2+4x+4)-144+4(y^2+4y+4)-16+$
$+9(z^2-2z+1)-9=0$

$36(x+2)^2+4(y+2)^2+9(z-1)^2-169=0$

Замены: $x'=x+2$, $y'=y+2$, $z'=z-1$

$36(x')^2+4(y')^2+9(z')^2=169$

$\boxed{\dfrac{(x')^2}{\left(\frac{13}{6}\right)^2}+\dfrac{(y')^2}{\left(\frac{13}{2}\right)^2}+\dfrac{(z')^2}{\left(\frac{13}{3}\right)^2}=1}$ – уравнение эллипсоида с центром $O'(-2;-2;1)$ и полуосями $\frac{13}{6}$; $\frac{13}{2}$; $\frac{13}{3}$.



4.) $9x^2-y^2-4z^2+4yz=0$

Перепишем в виде $9x^2-(y^2-4yz+4z^2)=0$

В плоскости Oyz сделаем преобразование поворота: $tg\,\varphi_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{-4}=\dfrac{3\pm5}{-4}$

$tg\,\varphi_1=-2$, $tg\,\varphi_2=\dfrac{1}{2}$

Возьмем угол $\varphi_2 \Rightarrow \cos\varphi_2=\dfrac{2}{\sqrt5}$, $\sin\varphi_2=\dfrac{1}{\sqrt5}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{\sqrt5}(2\tilde{y}-\tilde{z}) \\ z=\frac{1}{\sqrt5}(\tilde{y}+2\tilde{z}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9x^2-\left[\frac15(2\tilde{y}-\tilde{z})^2-\frac45(2\tilde{y}-\tilde{z})(\tilde{y}+2\tilde{z})+\right.$$
$$\left.+\frac45(\tilde{y}+2\tilde{z})^2\right]=0$$

$$\Rightarrow 9x^2-\left[\frac15(4-8+4)\tilde{y}^2+\frac15(-4-16+4+16)\tilde{y}\tilde{z}+\right.$$
$$\left.+\frac15(1+8+16)\tilde{z}^2\right]=0$$

$$\Rightarrow 9x^2-\frac15\left[(4-8+4)\tilde{y}^2+(-4-16+4+16)\tilde{y}\tilde{z}+\right.$$
$$\left.+(1+8+16)\tilde{z}^2\right]=0$$

После замены $x=\tilde{x}$ получим

$$9\tilde{x}^2-5\tilde{z}^2=0$$

$$\Rightarrow (3\tilde{x}-\sqrt5\tilde{z})(3\tilde{x}+\sqrt5\tilde{z})=0$$

$$\boxed{\pi_1: 3\tilde{x}-\sqrt5\tilde{z}=0, \quad \pi_2: 3\tilde{x}+\sqrt5\tilde{z}=0}$$

Две плоскости, проходящие через ось $O\tilde{y}$.

5. $y - 2xz = 0$

Произведем преобразование поворота в плоскости Oxz вокруг оси Oy.

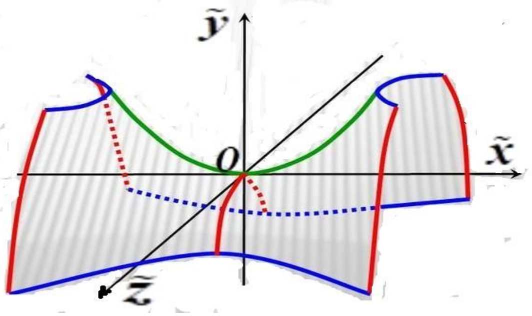
$\operatorname{tg}\varphi_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{4}}{-2} = \pm 1$ Возьмем $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x} - \tilde{z}) \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x} + \tilde{z}) \end{cases} \Rightarrow y - 2\left[\frac{1}{2}(\tilde{x} - \tilde{z})(\tilde{x} + \tilde{z})\right] = 0$

или $y - \tilde{x}^2 + \tilde{z}^2 = 0$

После замены $y = \tilde{y}$ получим уравнение

$\tilde{y} = \tilde{x}^2 - \tilde{z}^2$ – гиперболический параболоид.



6. $z^2 - 4yz = 0 \Rightarrow z(z - 4y) = 0$

$\boxed{\pi_1 : z = 0, \quad \pi_2 : 4y - z = 0}$

Две плоскости, проходящие через ось Ox.

7. $y^2+2xz+2x+2y+2z+2=0$

$(y^2+2y+1)-1+2(xz+x)+2(z+1)=0$

$(y+1)^2+2(x+1)(z+1)-1=0$

Замены: $x+1=x'$, $y+1=y'$, $z+1=z'$

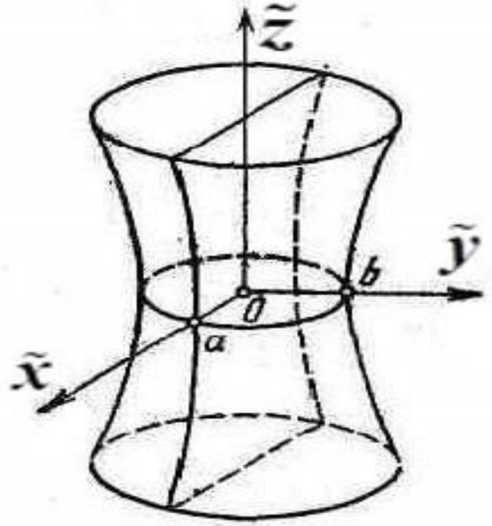
$\Rightarrow (y')^2+2x'z'-1=0$

Поворот в плоскости $O'x'z'$

$tg\varphi_1=1$, $tg\varphi_2=-1$

Возьмем угол φ_1 $\Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x}-\tilde{z}) \\ z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x}+\tilde{z}) \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{y}^2+\tilde{x}^2-\tilde{z}^2=1}$ – каноническое уравнение однополостного гиперболоида



Дома: К. 887 (четные), 903 (ост.), 910 (четн.),

1. $x^2+y^2-z^2+8x-6y-4z+25=0$
2. $6x^2+4y^2+9z^2-36x+8y+59=0$
3. $3x^2+4y^2-9z^2-18x-8y-18z+22=0$
4. $2x^2+y^2-16x+4y-3z=0$
5. $xy-x+y-z-2=0$
6. $4y^2+9z^2-12yz+2y+10z+1=0$
7. $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz-1=0$