

**НЕРАВЕНСТВА
СИСТЕМЫ И
СОВОКУПНОСТИ
НЕРАВЕНСТВ**

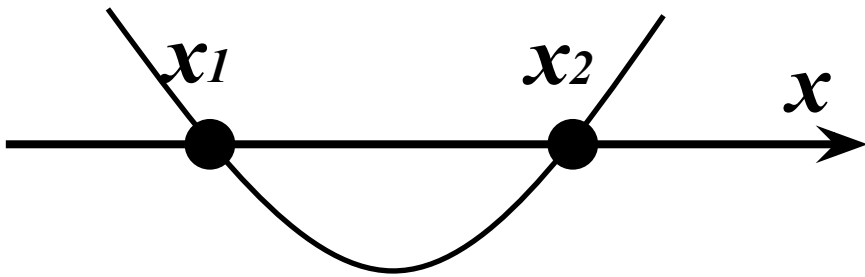
РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ, МЕТОДОМ ПАРАБОЛЫ

$$ax^2 + bx + c \leq 0, a > 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D > 0$$

$$\begin{cases} x = x_1, \\ x = x_2. \end{cases}$$



Ответ: $[x_1; x_2]$.

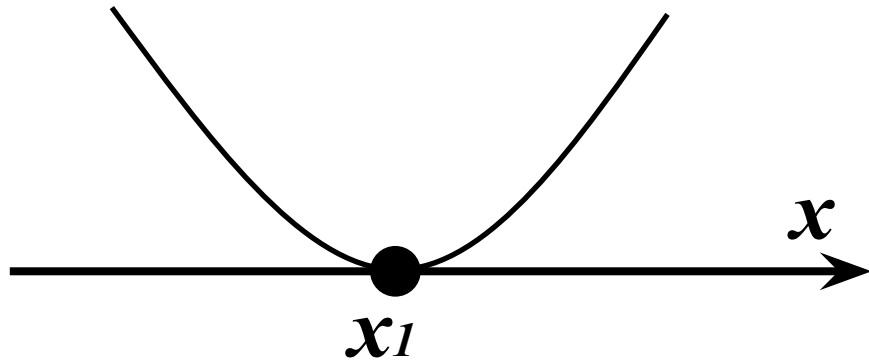
РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ, МЕТОДОМ ПАРАБОЛЫ

$$ax^2 + bx + c \leq 0, a > 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = 0$$

$$x = x_1.$$



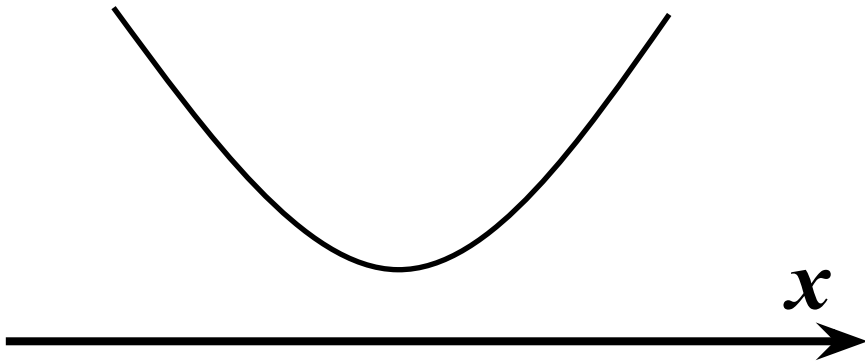
Ответ: $\{x_1\}$.

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ, МЕТОДОМ ПАРАБОЛЫ

$$ax^2 + bx + c \leq 0, a > 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D < 0$$



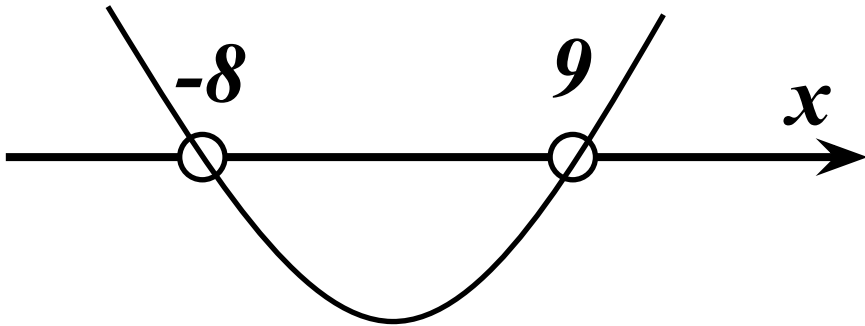
Ответ : \emptyset .

№ 1

$$x^2 - x - 72 > 0$$

$$x^2 - x - 72 = 0$$

$$\begin{cases} x = -8, \\ x = 9. \end{cases}$$



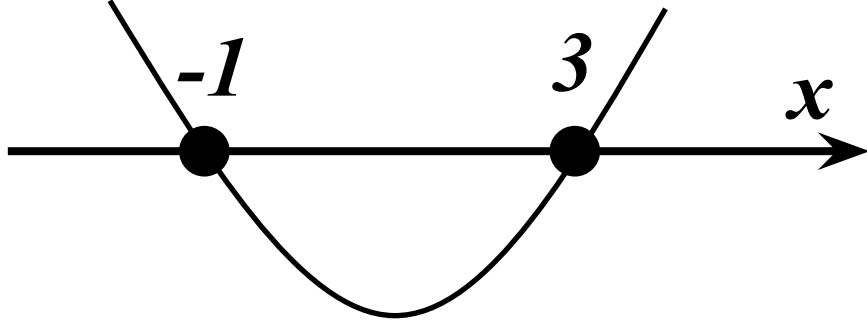
Ответ : $(-\infty; -8) \boxtimes (9; +\infty)$.

№ 2

$$0,5x^2 - x - 1,5 \leq 0$$

$$0,5x^2 - x - 1,5 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 3. \end{array} \right.$$



Ответ: $[-1; 3]$.

№ 3

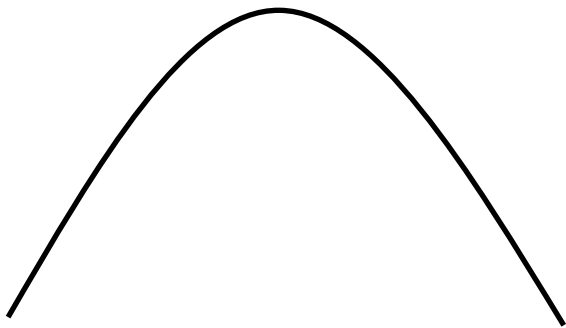
$$-\frac{1}{5}x^2 < \frac{1}{15}x + 1$$

$$-\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{15}x - 1 = 0 \quad | \cdot -15$$

$$-\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{15}x - 1 < 0$$

$$3x^2 + x + 15 = 0$$

$$D < 0$$



Ответ : R.

№ 4

$$x(3x-1) - x^2 + 16 > x(2-x) - x(11-2x)$$

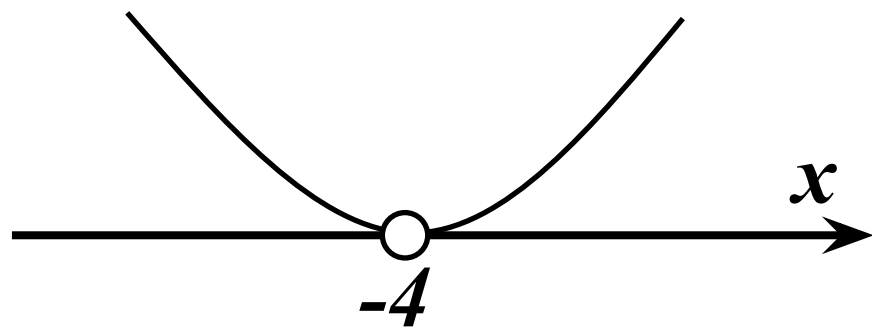
$$3x^2 - x - x^2 + 16 > 2x - x^2 - 11x + 2x^2$$

$$x^2 + 8x + 16 > 0$$

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$(x+4)^2 = 0$$

$$x = -4$$



Ответ: $(-\infty; -4) \boxtimes (-4; +\infty)$.

№ 5

$$(2x-1)^2 \leq 3(1+x)(x-1)$$

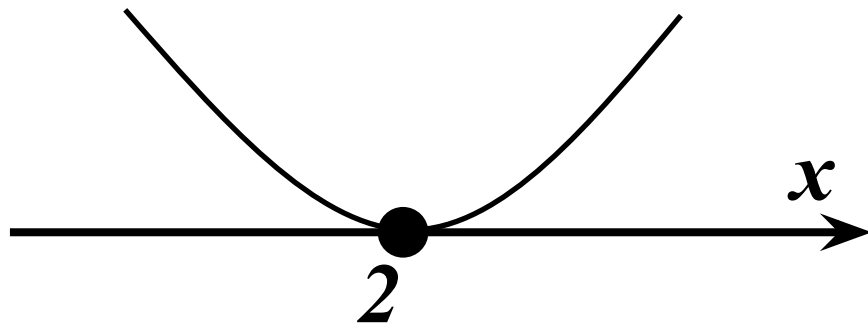
$$4x^2 + 1 - 4x \leq 3x^2 - 3$$

$$x^2 - 4x + 4 \leq 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2$$



Ответ : {2}.

**РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ,
СОДЕРЖАЩИХ
ПЕРЕМЕННУЮ ПОД
ЗНАКОМ МОДУЛЯ**

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

Система

Пересечение

Двойная штриховка в ответ

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Система

Пересечение

Двойная штриховка в ответ

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$$

Совокупность

Объединение

***Все, что заштриховано –
в ответ***

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases}$$

Совокупность

Объединение

***Все, что заштриховано –
в ответ***

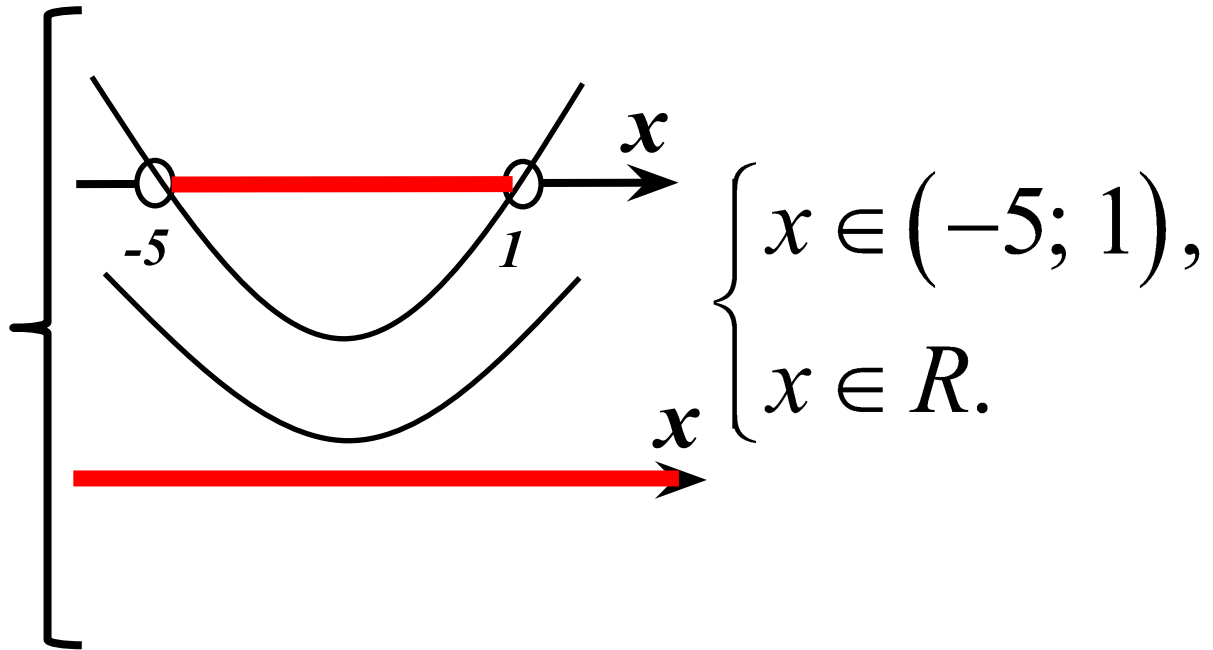
$$|x^2 + 4x| < 5 \quad \begin{cases} x^2 + 4x < 5, \\ x^2 + 4x > -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 4x - 5 < 0, \\ x^2 + 4x + 5 > 0. \end{cases}$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ x = -5. \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 - 5 < 0.$$



Ответ : $(-5; 1)$.

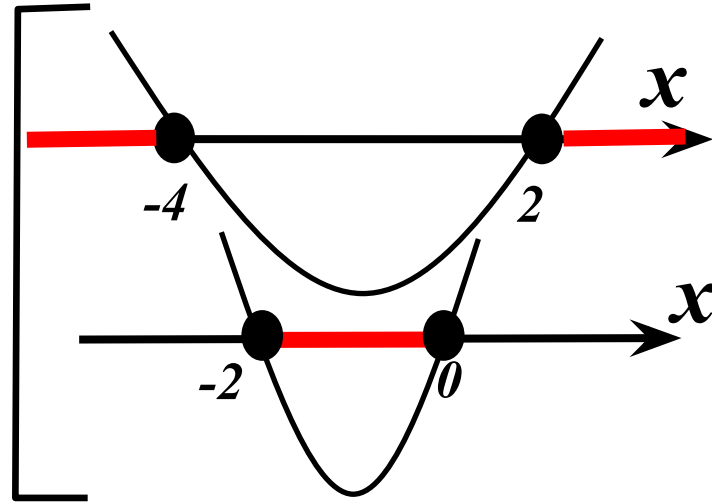
$$|x^2 + 2x - 4| \geq 4 \quad \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 4 \geq 4, \\ x^2 + 2x - 4 \leq -4; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 8 \geq 0, \\ x^2 + 2x \leq 0; \end{array} \right.$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 2. \end{array} \right.$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 0. \end{array} \right. \cdot$$



Ответ : $(-\infty; -4] \boxtimes [-2; 0] \boxtimes [2; +\infty)$.

СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ

Системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной

Система

$$\begin{cases} x > a, \\ x < b. \end{cases}$$

Пересечение

*Двойная штриховка
в ответ*

Совокупность

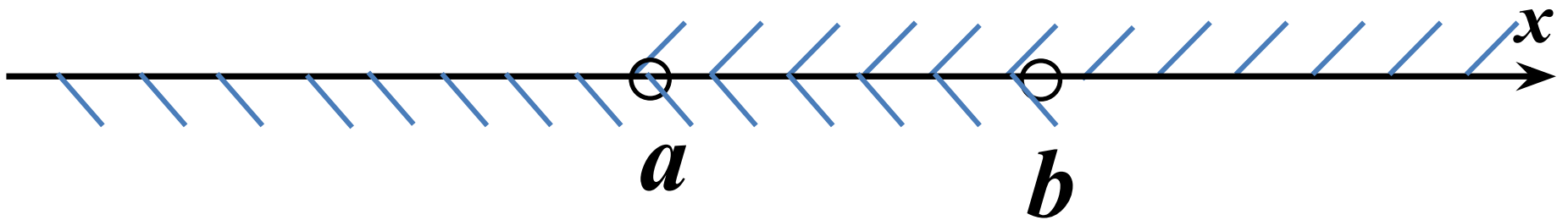
$$\begin{cases} x > a, \\ x < b. \end{cases}$$

Объединение

*Все, что
заштриховано –
в ответ*

Система неравенств

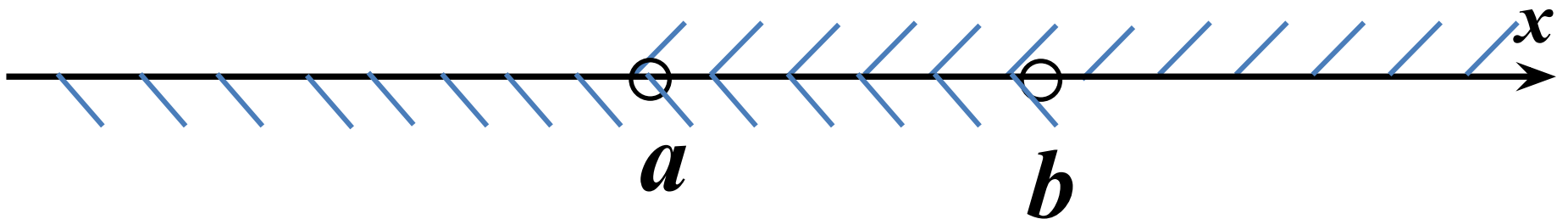
$$\begin{cases} x > a, \\ x < b. \end{cases}$$



Ответ: $(a; b)$.

Совокупность неравенств

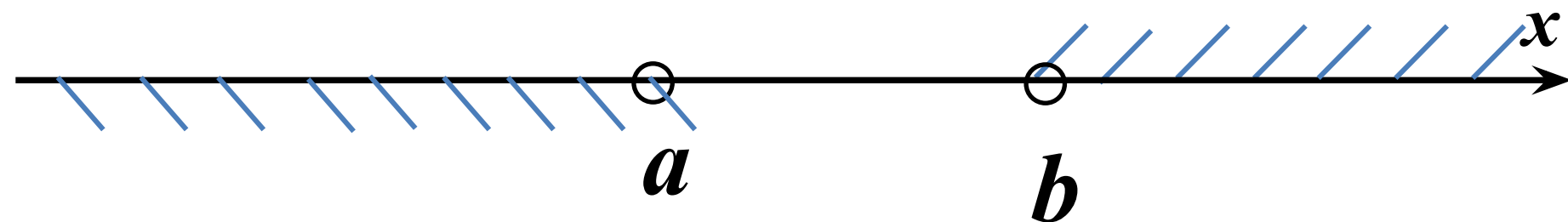
$$\begin{cases} x > a, \\ x < b. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Система неравенств

$$\begin{cases} x < a, \\ x > b. \end{cases}$$



Ответ: \emptyset .

Совокупность неравенств

$$\begin{cases} x < a, \\ x > b. \end{cases}$$



Ответ : $(-\infty; a) \boxtimes (b; +\infty)$.

Частные случаи решения систем неравенств

$$\begin{cases} \emptyset, \\ ax > b. \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\begin{cases} R, \\ ax > b. \end{cases} \Leftrightarrow ax > b.$$

$$\begin{cases} R, \\ \emptyset. \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

Частные случаи решения совокупностей неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \emptyset, \\ ax > b. \end{array} \right] \Leftrightarrow ax > b.$$

$$\left[\begin{array}{l} R, \\ ax > b. \end{array} \right] \Leftrightarrow R$$

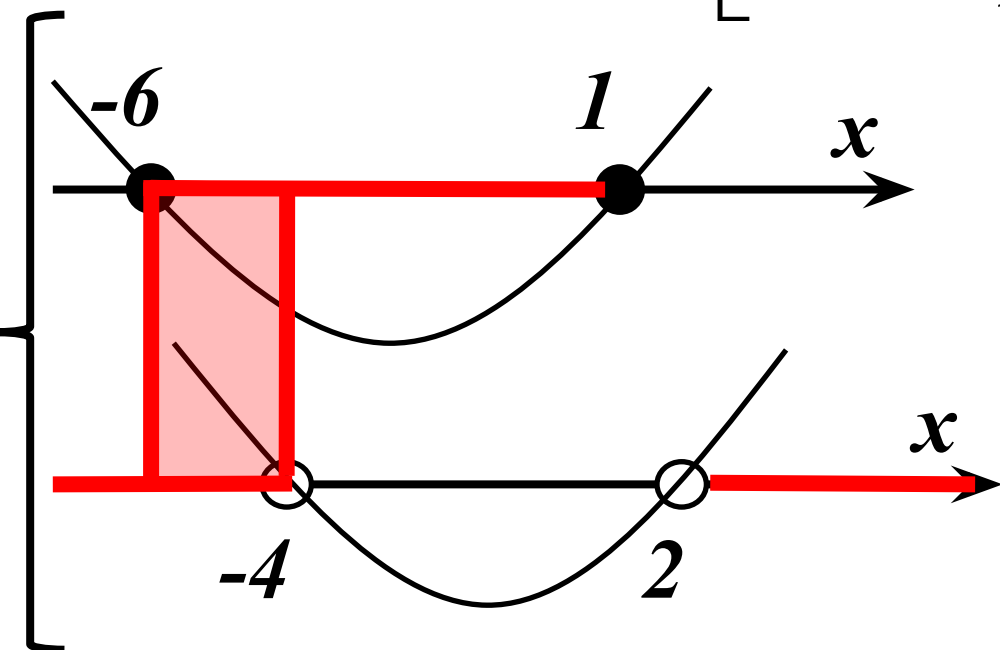
$$\left[\begin{array}{l} \emptyset, \\ R. \end{array} \right] \Leftrightarrow R$$

Двойное неравенство

$$a < x < b \Leftrightarrow \begin{cases} x < b, \\ x > a. \end{cases}$$
$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq b, \\ x \geq a. \end{cases}$$

Система квадратных неравенств

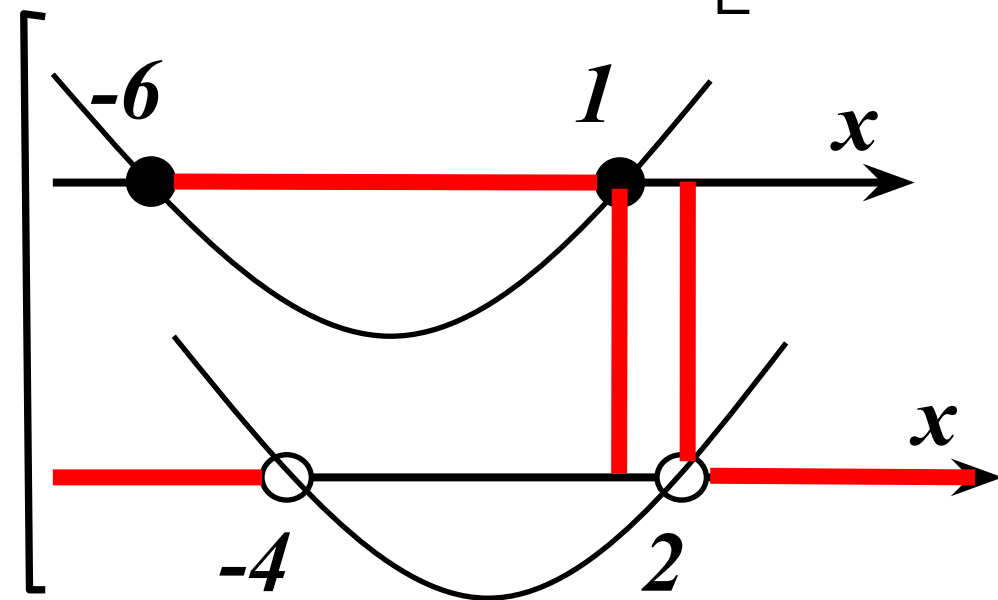
$$\begin{cases} x^2 + 5x - 6 \leq 0, & x^2 + 5x - 6 = 0 & x^2 + 2x - 8 = 0 \\ x^2 + 2x - 8 > 0. & \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -6; \end{array} \right. & \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -4. \end{array} \right. \end{cases}$$



Ответ: $[-6; -4)$.

Совокупность квадратных неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 5x - 6 \leq 0, & x^2 + 5x - 6 = 0 & x^2 + 2x - 8 = 0 \\ x^2 + 2x - 8 > 0. & \begin{cases} x = 1, \\ x = -6; \end{cases} & \begin{cases} x = 2, \\ x = -4. \end{cases} \end{cases}$$



Ответ : $(-\infty; 1] \cap (2; +\infty)$.

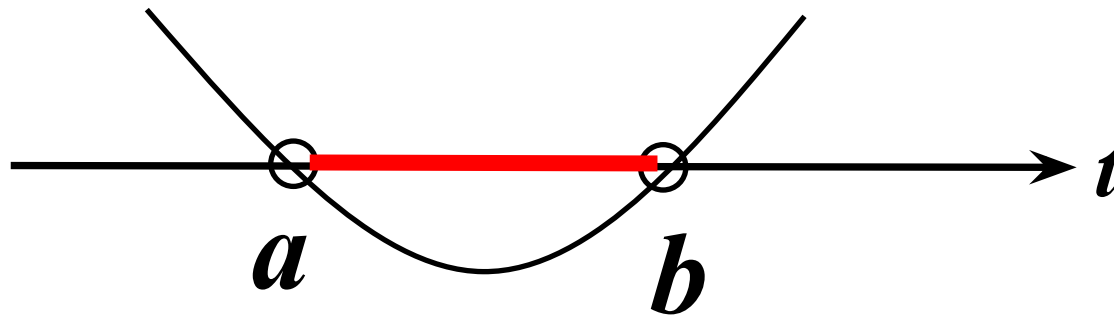
РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Алгоритм решения

- 1) Сделать замену переменной;*
- 2) Решить неравенство с новой переменной;*
- 3) Вернуться к замене и решить новое неравенство или систему или совокупность неравенств;*
- 4) Записать ответ.*

Алгоритм решения

$$\left[f(x) = t \right]$$

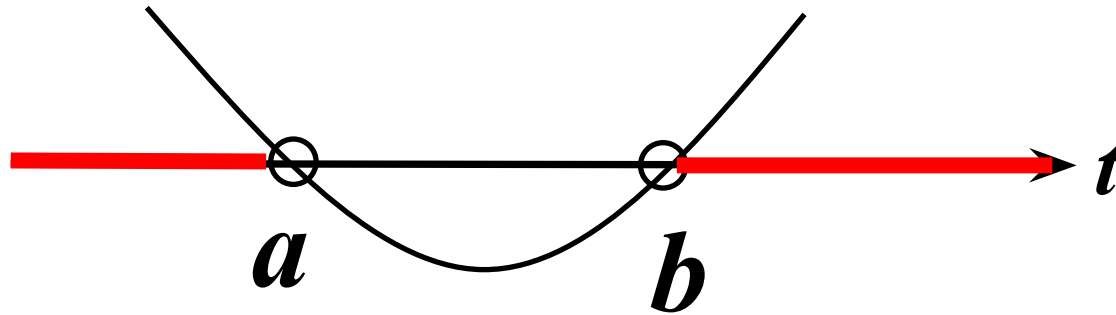


~~$(a; b)$~~

$$\begin{cases} t > a, \\ t < b; \end{cases} \begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < b. \end{cases}$$

Алгоритм решения

$$\left[f(x) = t \right]$$



$$\left(-\infty; a \right) \boxtimes \left(b; +\infty \right)$$

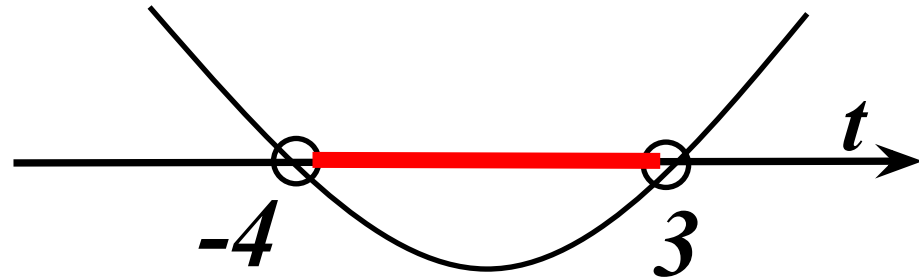
$$\left[\begin{array}{l} t > b, \\ t < a; \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} f(x) > b, \\ f(x) < a. \end{array} \right]$$

Решите неравенство

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x) < 12$$

$$\left[x^2 + 2x = t \right] (t+1)t < 12, t^2 + t - 12 < 0$$

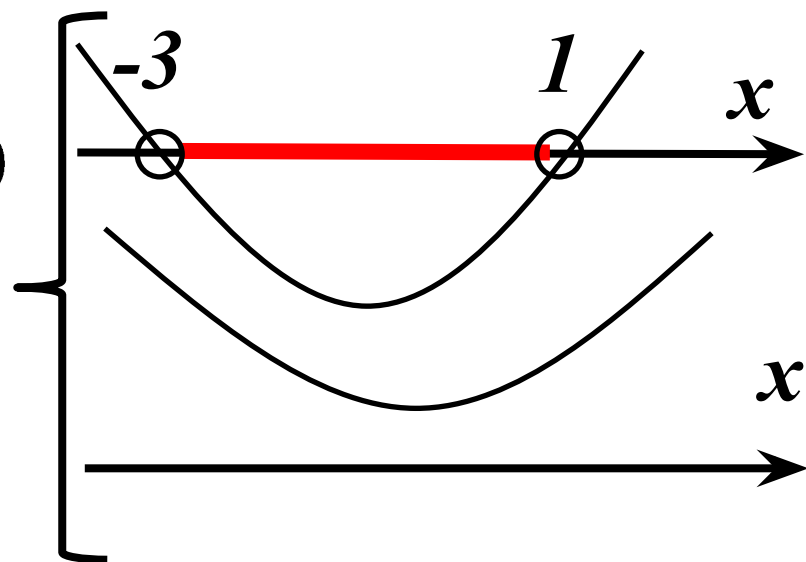
$$t^2 + t - 12 = 0, \begin{cases} t = -4, \\ t = 3. \end{cases}$$



$$\begin{cases} t < 3 \\ t > -4 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ x^2 + 2x + 4 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ x = -3; \end{cases} \quad D < 0.$$



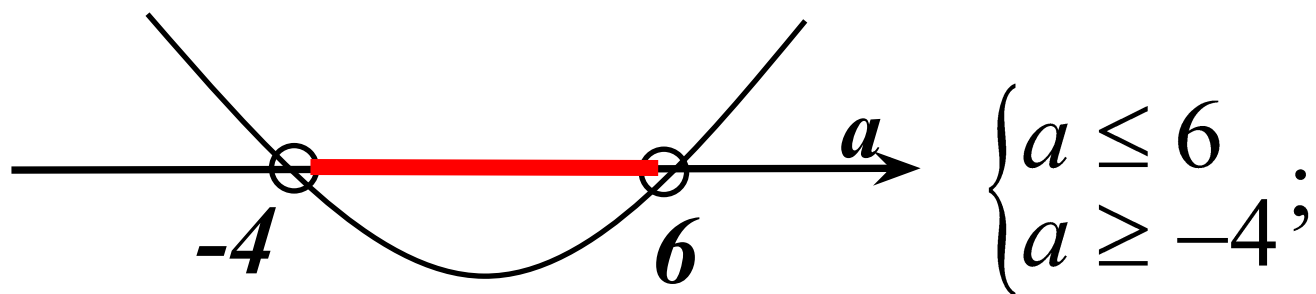
Ответ : $(-3; 1)$.

Решите неравенство

$$x(x-1)(x+1)(x+2) \leq 24$$

$$(x^2 + x)(x^2 + x - 2) - 24 \leq 0, \quad [x^2 + x = a]$$

$$a(a-2) - 24 \leq 0, \quad a^2 - 2a - 24 \leq 0,$$

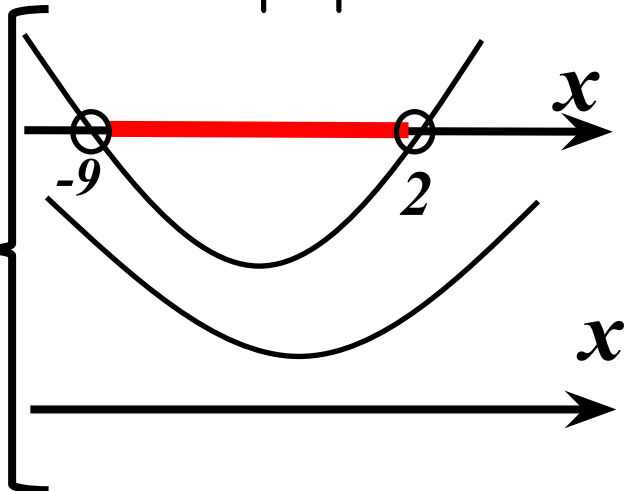


$$\begin{cases} x^2 + x \leq 6 \\ x^2 + x \geq -4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0 \\ x^2 + x + 4 \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \in [-3; 2] \\ R \end{cases}$$

Ответ: $[-3; 2]$

Решите неравенство

$$|x^2 + 7|x|| < 18 \quad \begin{cases} x^2 + 7|x| < 18, \\ x^2 + 7|x| > -18; \end{cases} \quad [|x| = t]$$

$$\begin{cases} t^2 + 7t - 18 < 0, \\ t^2 + 7t + 18 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t < 2, \\ t > -9; \end{cases}$$


$$\begin{cases} |x| < 2, \\ |x| > -9; \end{cases} \quad \begin{cases} |x| < 2, \\ R; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x > -2. \end{cases}$$

Ответ : $(-2; 2)$.