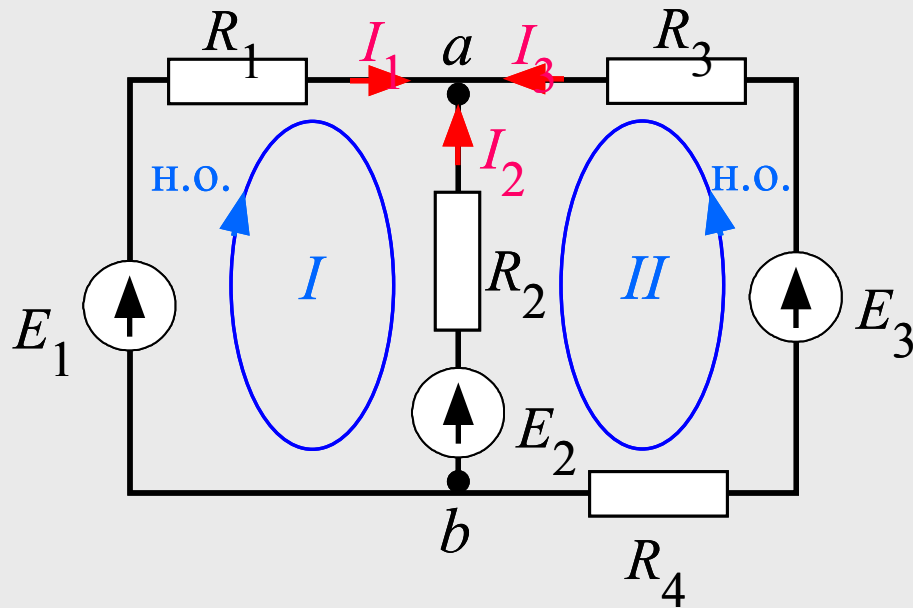


# МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ (МКТ)

Вывод МКТ основан на решении полной системы уравнений, составленной по законам Кирхгофа.

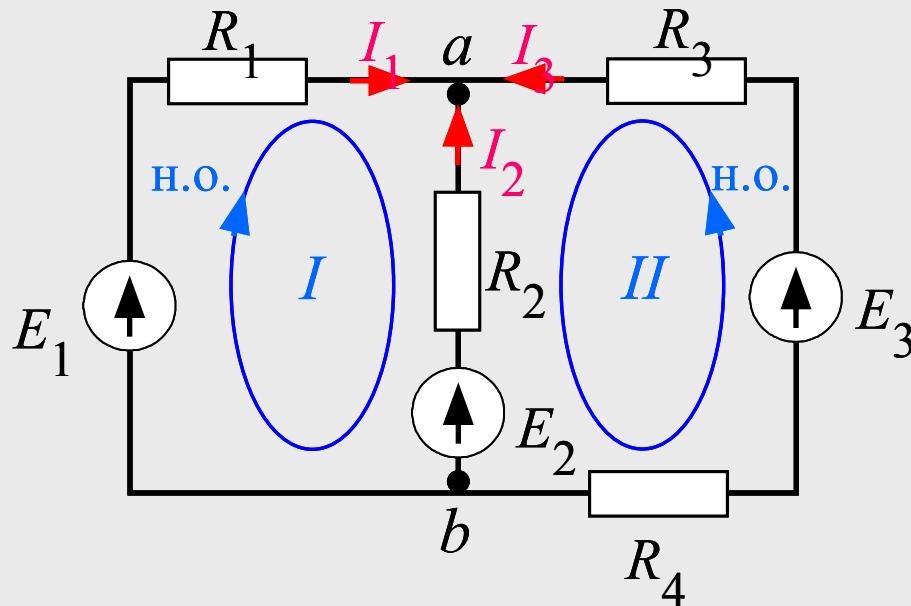


$$n = 2$$

$$m = 3$$

# МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ (МКТ)

Вывод МКТ основан на решении полной системы уравнений, составленной по законам Кирхгофа.



$$n = 2$$

$$m = 3$$

$$\text{узел «a»}: I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (3.1)$$

$$I \text{ контур}: I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2 \quad (3.2)$$

$$II \text{ контур}: -I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4) = E_3 - E_2 \quad (3.3)$$

Из (3.1) выразим ток внутренней ветви  $I_2$  :

$$I_2 = -(I_1 + I_3) \quad (3.4)$$

Подставим (3.4) в (3.2), (3.3) и приведем подобные :

$$\left. \begin{aligned} I_1(R_1 + R_2) + I_3R_2 &= E_1 - E_2 \\ I_1R_2 + I_3(R_2 + R_3 + R_4) &= E_3 - E_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Из (3.1) выразим ток внутренней ветви  $I_2$  :

$$I_2 = -(I_1 + I_3) \quad (3.4)$$

Подставим (3.4) в (3.2), (3.3) и приведем подобные :

$$\left. \begin{aligned} I_1(R_1 + R_2) + I_3R_2 &= E_1 - E_2 \\ I_1R_2 + I_3(R_2 + R_3 + R_4) &= E_3 - E_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Формально введем понятие контурных токов, замкнув токи внешних ветвей по соответствующим контурам:

$I_{II}$  - контурный ток  $I$  контура

$$I_1 = I_{II}$$

$I_{22}$  - контурный ток  $II$  контура

$$I_3 = I_{22}$$

Обозначим:

$R_1 + R_2 = R_{11}$  - собственное сопротивление  $I$  контура

$R_2 + R_3 + R_4 = R_{22}$  - собственное сопротивление  $II$  контура

$R_2 = R_{12} = R_{21}$  - взаимное сопротивление контуров 1-го и 2-го

(3.6)

Обозначим:

$R_1 + R_2 = R_{11}$  - собственное сопротивление  $I$  контура

$R_2 + R_3 + R_4 = R_{22}$  - собственное сопротивление  $II$  контура

$R_2 = R_{12} = R_{21}$  - взаимное сопротивление контуров 1-го и 2-го

$$\left. \begin{array}{l} E_1 - E_2 = E_{11} \\ E_3 - E_2 = E_{22} \end{array} \right\} \text{ контурные ЭДС (алгебраическая сумма} \\ \text{ЭДС, входящих в контур)}$$

(3.6)

Обозначим:

$R_1 + R_2 = R_{11}$  - собственное сопротивление  $I$  контура

$R_2 + R_3 + R_4 = R_{22}$  - собственное сопротивление  $II$  контура

$R_2 = R_{12} = R_{21}$  - взаимное сопротивление контуров 1-го и 2-го

$$\left. \begin{array}{l} E_1 - E_2 = E_{11} \\ E_3 - E_2 = E_{22} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{контурные ЭДС (алгебраическая сумма} \\ \text{ЭДС, входящих в контур)} \end{array}$$

С учетом принятых обозначений систему (3.5)

можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} = E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} = E_{22} \end{array} \right\} \quad (3.6)$$





## Порядок решения задач методом контурных токов

1. Определить число узлов  $n$  и ветвей  $m$  схемы.
2. Выбрать  $(m - n + 1)$  взаимно независимых контуров и задать для этих контуров направления обхода (**н.о.**).

## Порядок решения задач методом контурных токов

1. Определить число узлов  $n$  и ветвей  $m$  схемы.
2. Выбрать  $(m - n + 1)$  взаимно независимых контуров и задать для этих контуров направления обхода (н.о.).
3. Принять направления контурных токов совпадающим с направлением обхода контуров.
4. Для выбранных контуров записать уравнения по МКТ и решить полученную систему уравнений.

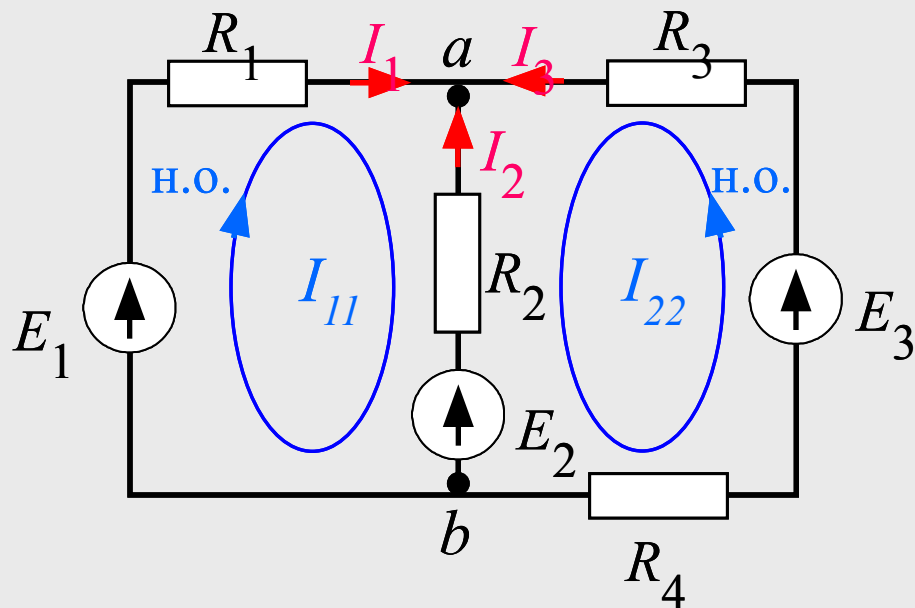
## Порядок решения задач методом контурных токов

1. Определить число узлов  $n$  и ветвей  $m$  схемы.
2. Выбрать  $(m - n + 1)$  взаимно независимых контуров и задать для этих контуров направления обхода (н.о.).
3. Принять направления контурных токов совпадающим с направлением обхода контуров.
4. Для выбранных контуров записать уравнения по МКТ и решить полученную систему уравнений.
5. Произвольно расставить направления реальных токов в ветвях.
6. Определить реальные токи в ветвях как алгебраическую сумму контурных токов.

## Порядок решения задач методом контурных токов

1. Определить число узлов  $n$  и ветвей  $m$  схемы.
2. Выбрать  $(m - n + 1)$  взаимно независимых контуров и задать для этих контуров направления обхода (**н.о.**).
3. Принять направления контурных токов совпадающим с направлением обхода контуров.
4. Для выбранных контуров записать уравнения по МКТ и решить полученную систему уравнений.
5. Произвольно расставить направления реальных токов в ветвях.
6. Определить реальные токи в ветвях как алгебраическую сумму контурных токов.
7. Произвести проверку решения с помощью баланса мощности.

# Пример



$$R_1 = \mathcal{O}_M$$

$$R_2 = \mathcal{O}_M$$

$$R_3 = \mathcal{O}_M$$

$$R_4 = \mathcal{O}_M$$

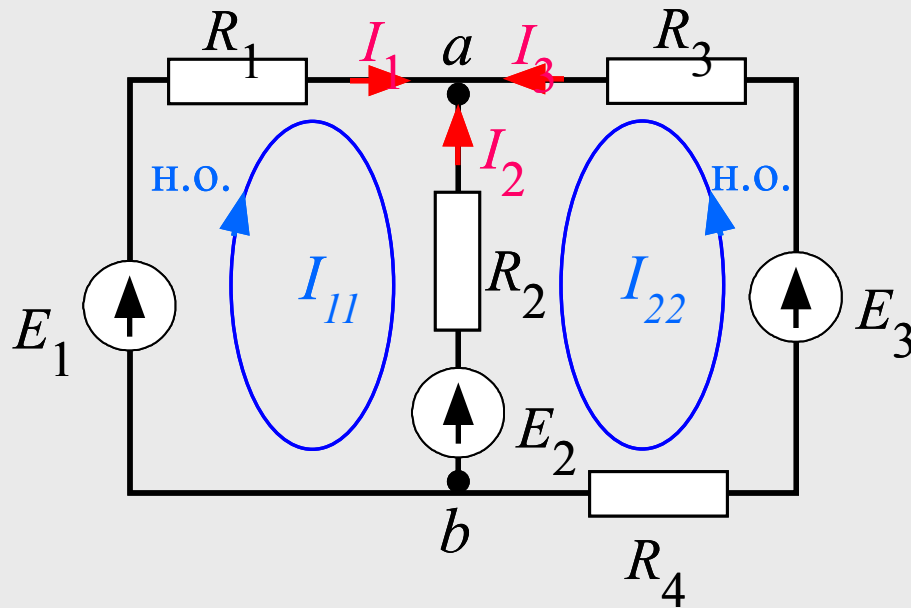
$$E_1 = \mathcal{B}$$

$$E_2 = E_3 = \mathcal{B}2$$

---


$$I_1 - ? \quad I_2 - ? \quad I_3 - ?$$

# Пример



$$R_1 = \mathcal{O}_M$$

$$R_2 = \mathcal{O}_M$$

$$R_3 = \mathcal{O}_M$$

$$R_4 = \mathcal{O}_M$$

$$E_1 = \mathcal{B}$$

$$E_2 = E_3 = \mathcal{B}2$$

---


$$I_1 - ? \quad I_2 - ? \quad I_3 - ?$$

Решение:

$$n = 2$$

$$m = 3$$

$$m - n + 1 = 2$$

$$\left. \begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_2) + I_{22}R_2 &= E_1 - E_2 \\ I_{11}R_2 + I_{22}(R_2 + R_3 + R_4) &= E_3 - E_2 \end{aligned} \right\}$$

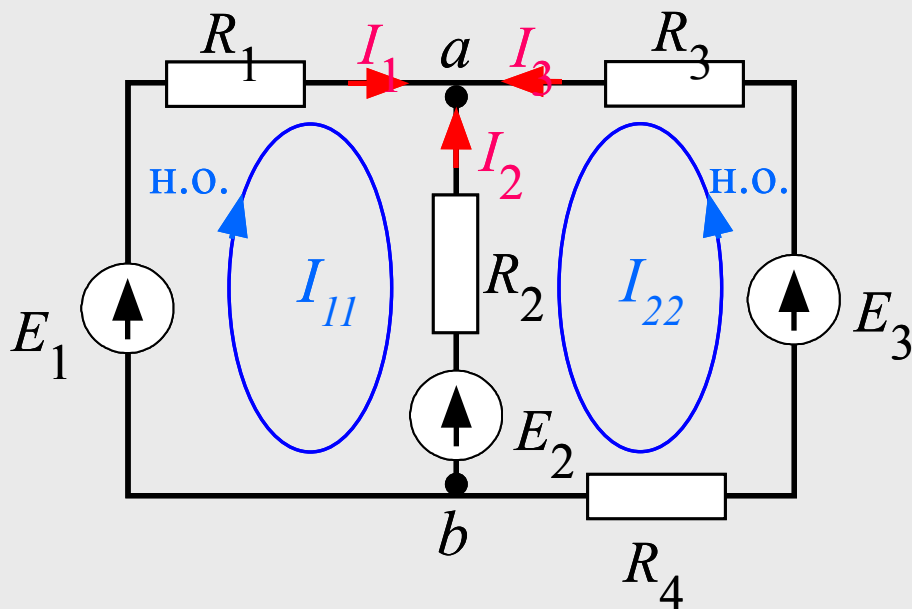
Решение полученной системы методом подстановки :

$$\begin{cases} 7 \cdot I_{11} + 5 \cdot I_{22} = -9 \\ 5 \cdot I_{11} + 10 \cdot I_{22} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} I_{11} = -2 I_{22} \\ 9 I_{22} = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} I_{11} = -2 \\ I_{22} = 1 \end{cases}$$

Решение полученной системы методом подстановки :

$$\begin{cases} 7 \cdot I_{11} + 5 \cdot I_{22} = -9 \\ 5 \cdot I_{11} + 10 \cdot I_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{11} = -2 I_{22} \\ 9 I_{22} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{11} = -2 \\ I_{22} = 1 \end{cases}$$

Определение реальных токов в ветвях :



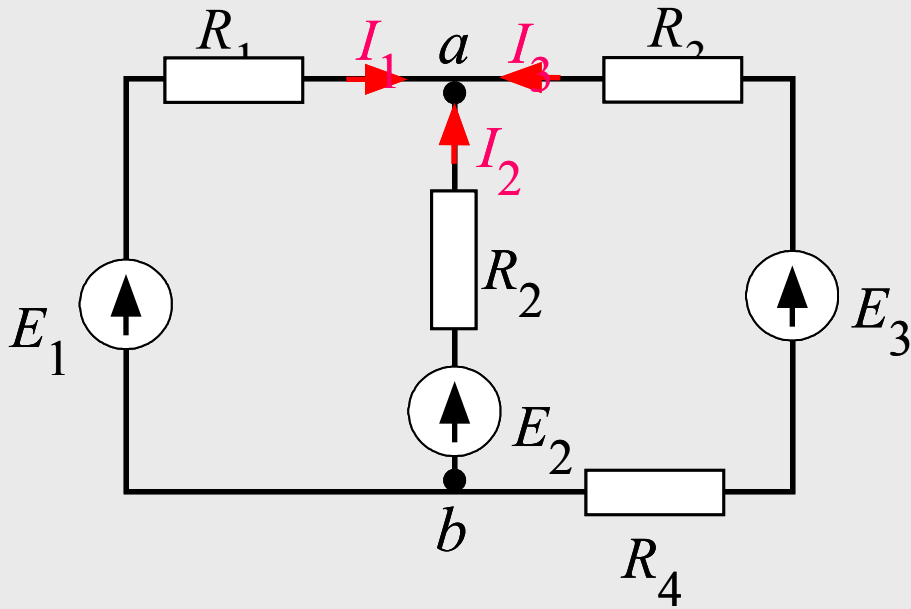
$$I_1 = I_{11} = -2 \text{ A}$$

$$I_2 = -(I_{11} + I_{22}) = 1$$

$$I_3 = I_{22} = 1 \text{ A}$$



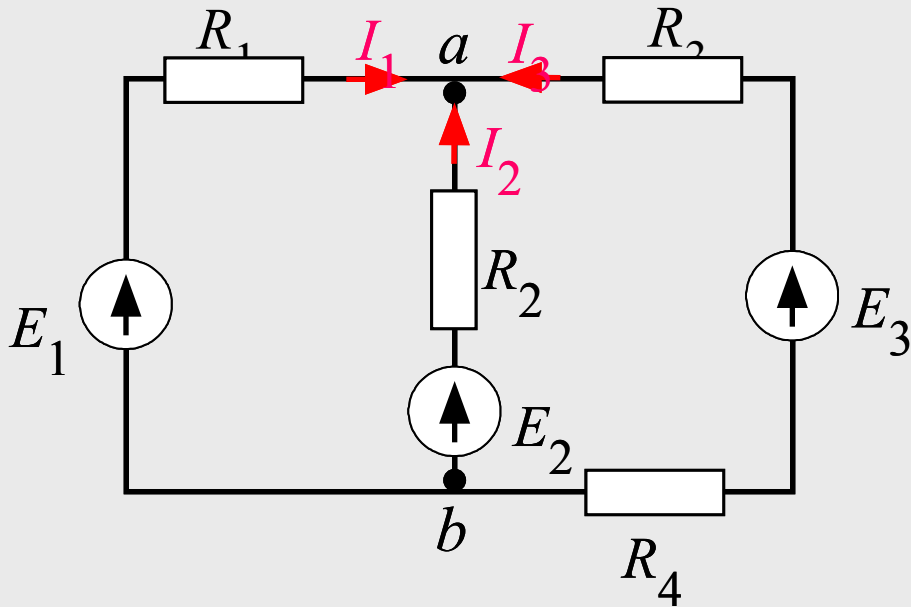
# Проверка решения (баланс мощности)



Баланс мощности:

$$\sum P_{ист} = \sum P_{номр}$$

## Проверка решения (баланс мощности)



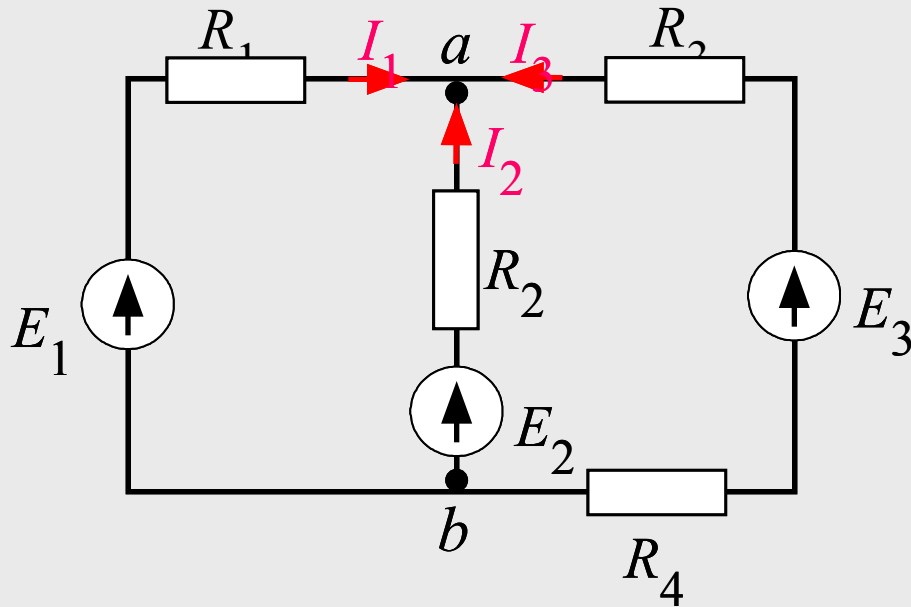
Баланс мощности:

$$\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{потр}}$$

Мощность источников:  $\sum P_{\text{ист}} = \sum E \cdot I_E$

$$E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 = \text{Вт}(-2) + 12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 18$$

## Проверка решения (баланс мощности)



Баланс мощности:

$$\sum P_{уст} = \sum P_{номр}$$

Мощность источников: 
$$\sum P_{уст} = \sum E \cdot I_E$$

$$E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 = \text{Вт}(-2) + 12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 18$$

Мощность потребителей: 
$$\sum P_{номр} = \sum I_R^2 \cdot R$$

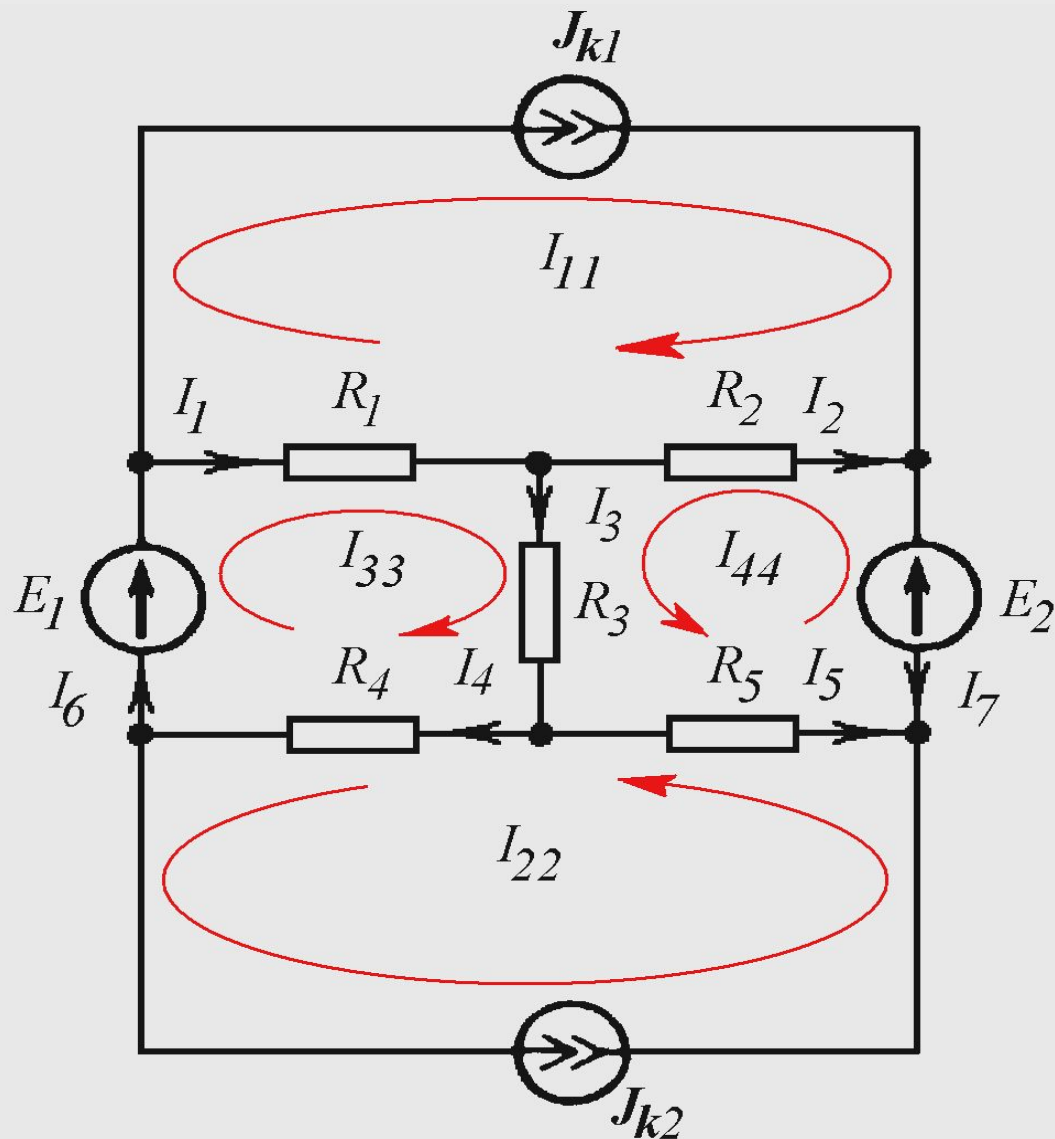
$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 (R_3 + R_4) = (-2)^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 5 + 1^2 (4 + 1) = 18$$

## Особенности применения метода контурных токов при наличии в цепи источников тока

При наличии в схеме источника тока расчетные контуры нужно выбрать так, чтобы каждый источник тока входил **только в один** независимый контур. Тогда реальный ток источника будет равен контурному току, и, следовательно, этот контурный ток уже будет известен (для него не надо записывать уравнения по МКТ). Но он будет входить в уравнения для других контурных токов. При формировании системы уравнений его необходимо перенести в правую часть системы как известную величину.

Ток источника тока может замыкаться по произвольным контурам, состоящим из ветвей, дополняющих ветвь источника до замкнутого контура.

# Пример



$$R_1 = 1 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 3 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 2 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 3 \text{ Ом}$$

$$R_5 = 4 \text{ Ом}$$

$$E_1 = 10 \text{ В}$$

$$E_2 = 15 \text{ В}$$

$$J_{k1} = 2 \text{ А}$$

$$J_{k2} = 1 \text{ А}$$

найти неизвестные токи

Решение:

$$I_{11} = J_{k1}$$

$$I_{22} = J_{k2}$$

$$n = 6$$

$$m = 9; m_{\text{H}} = 7$$

$$m_{\text{H}} - n + 1 = 2$$

Решение:

$$I_{11} = J_{k1}$$

$$I_{22} = J_{k2}$$

$$n = 6$$

$$m = 9; m_{\text{H}} = 7$$

$$m_{\text{H}} - n + 1 = 2$$

$$\begin{cases} I_{33}(R_1 + R_3 + R_4) + I_{44}R_3 - I_{11}R_1 + I_{22}R_4 = E_1 \\ I_{33}R_3 + I_{44}(R_2 + R_3 + R_5) + I_{11}R_2 - I_{22}R_5 = E_2 \end{cases}$$

Решение:

$$I_{11} = J_{k1}$$

$$I_{22} = J_{k2}$$

$$n = 6$$

$$m = 9; m_H = 7$$

$$m_H - n + 1 = 2$$

$$\begin{cases} I_{33}(R_1 + R_3 + R_4) + I_{44}R_3 - I_{11}R_1 + I_{22}R_4 = E_1 \\ I_{33}R_3 + I_{44}(R_2 + R_3 + R_5) + I_{11}R_2 - I_{22}R_5 = E_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{33}(R_1 + R_3 + R_4) + I_{44}R_3 = E_1 + I_{11}R_1 - I_{22}R_4 \\ I_{33}R_3 + I_{44}(R_2 + R_3 + R_5) = E_2 - I_{11}R_2 + I_{22}R_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 \cdot I_{33} + 2 \cdot I_{44} = 9 \\ 2 \cdot I_{33} + 9 \cdot I_{44} = 13 \end{cases}$$



Решение полученной системы методом Крамера :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 6 \cdot 9 - 2 \cdot 2 = 50 \text{ Ом}^2$$

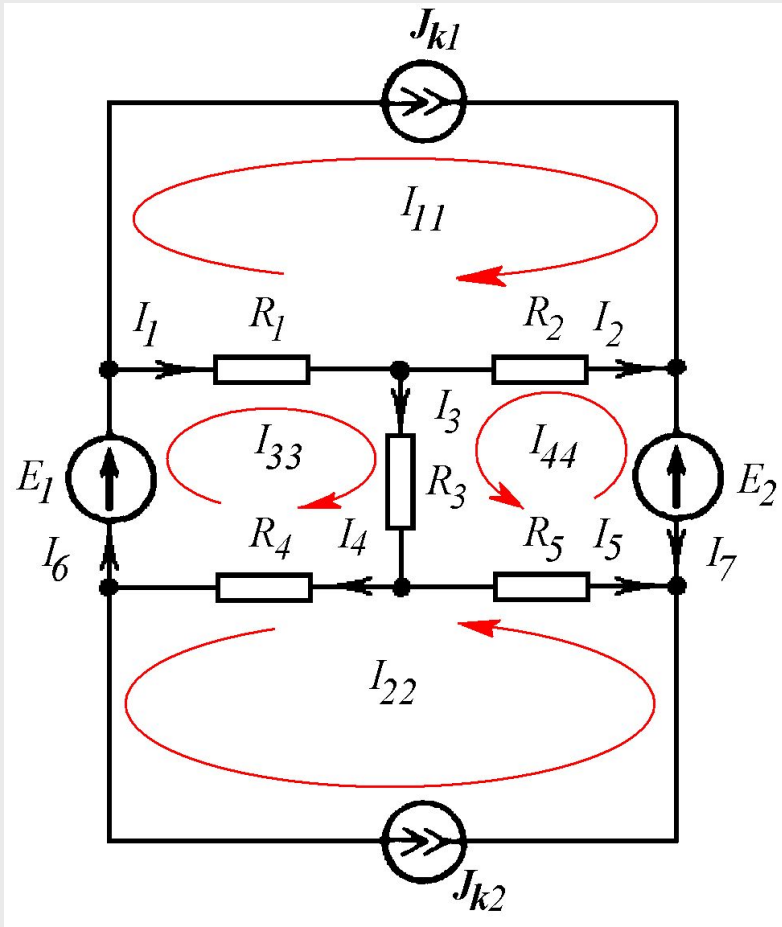
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 13 & 9 \end{vmatrix} = 9 \cdot 9 - 2 \cdot 13 = 55 \text{ В} \cdot \text{Ом}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 6 \cdot 13 - 9 \cdot 2 = 60 \text{ В} \cdot \text{Ом}$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{55}{50} = 1,1 \text{ А}$$

$$I_{44} = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{60}{50} = 1,2 \text{ А}$$

# Определение реальных токов в ветвях



$$I_1 = I_{33} - I_{11} = 1,1 - 2 = -0,9 A$$

$$I_2 = -I_{44} - I_{11} = -1,2 - 2 = -3,2 A$$

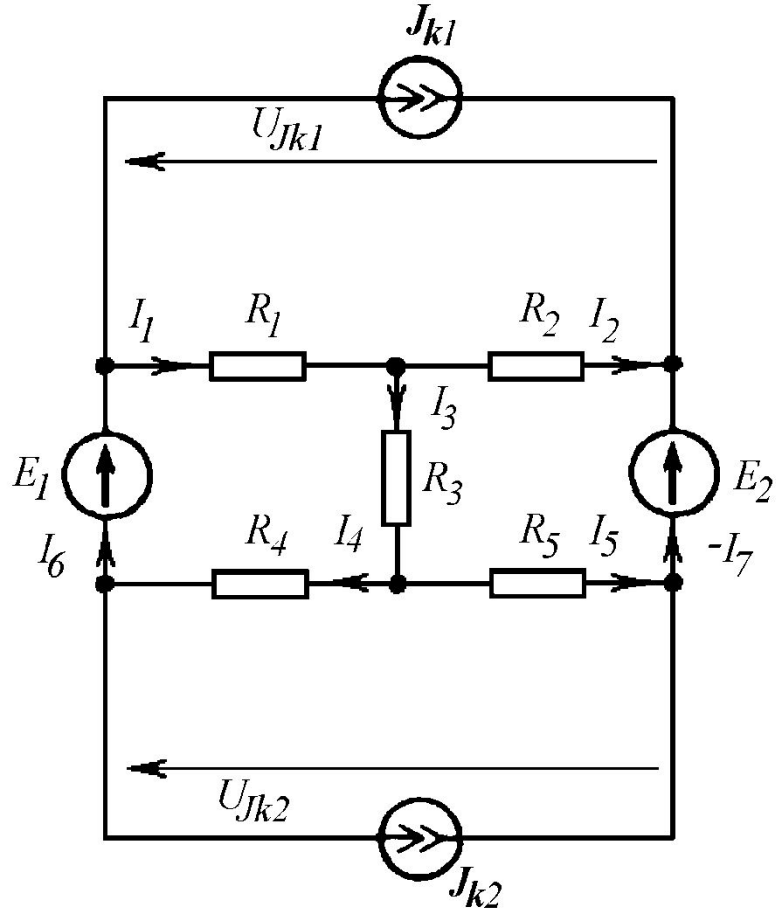
$$I_3 = I_{33} + I_{44} = 1,1 + 1,2 = 2,3 A$$

$$I_4 = I_{33} + I_{22} = 1,1 + 1 = 2,1 A$$

$$I_5 = I_{44} - I_{22} = 1,2 - 1 = 0,2 A$$

$$I_6 = I_{33} = 1,1 A$$

$$I_7 = -I_{44} = -1,2 A$$



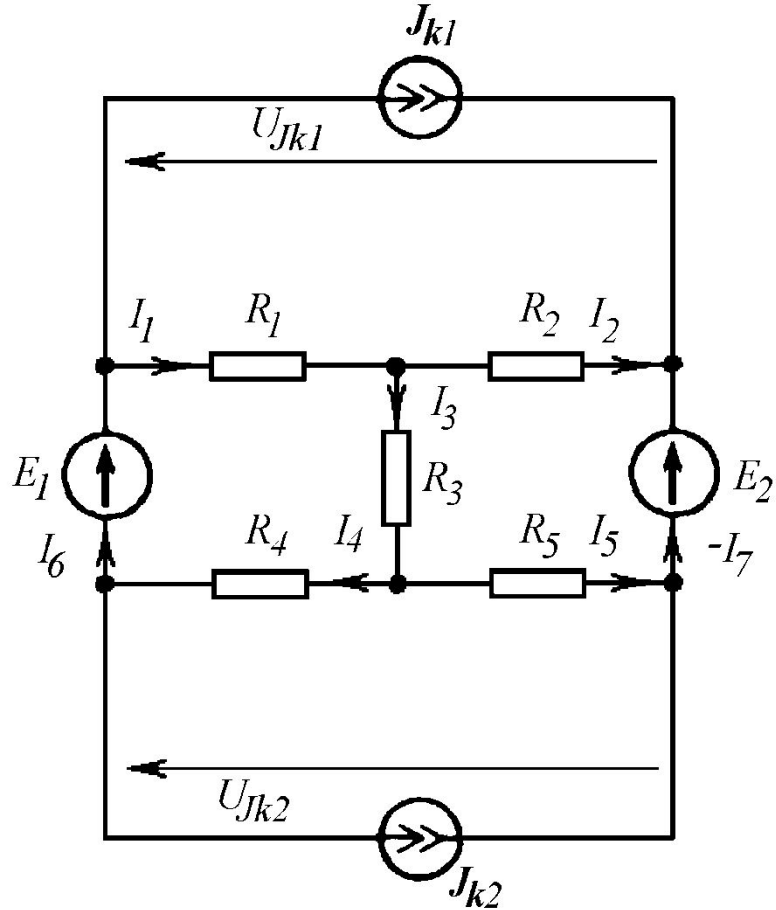
Проверка решения  
(баланс мощности)

$$U_{Jk1} = -I_2 R_2 - I_1 R_1 =$$

$$= 3,2 \cdot 3 + 0,9 \cdot 1 = 10,5 B$$

$$U_{Jk2} = -I_5 R_5 + I_4 R_4 =$$

$$= -0,2 \cdot 4 + 2,1 \cdot 3 = 5,5 B$$



Проверка решения  
(баланс мощности)

$$U_{Jk1} = -I_2 R_2 - I_1 R_1 =$$

$$= 3,2 \cdot 3 + 0,9 \cdot 1 = 10,5 B$$

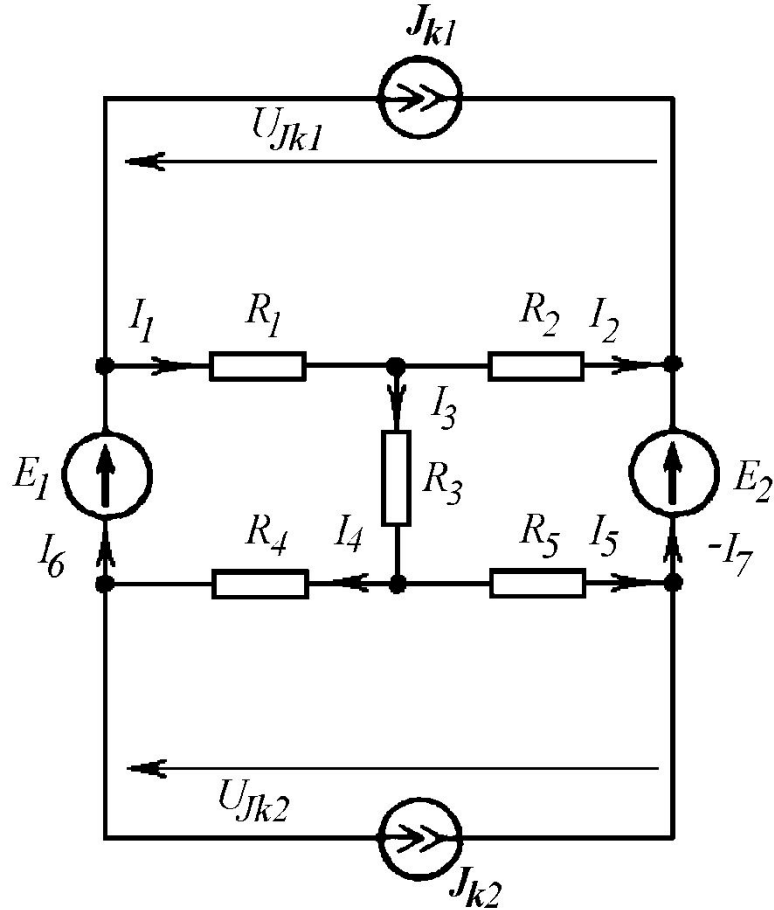
$$U_{Jk2} = -I_5 R_5 + I_4 R_4 =$$

$$= -0,2 \cdot 4 + 2,1 \cdot 3 = 5,5 B$$

$$P_{ucm} = J_{k1} \cdot U_{Jk1} + J_{k2} \cdot U_{Jk2} + E_1 \cdot I_6 + E_2 \cdot (-I_7) =$$

$$= 2 \cdot 10,5 + 1 \cdot 5,5 + 10 \cdot 1,1 + 15 \cdot 1,2 = 55,5 Bm$$

Проверка решения  
(баланс мощности)



$$U_{Jk1} = -I_2 R_2 - I_1 R_1 =$$

$$= 3,2 \cdot 3 + 0,9 \cdot 1 = 10,5 B$$

$$U_{Jk2} = -I_5 R_5 + I_4 R_4 =$$

$$= -0,2 \cdot 4 + 2,1 \cdot 3 = 5,5 B$$

$$P_{ucm} = J_{k1} \cdot U_{Jk1} + J_{k2} \cdot U_{Jk2} + E_1 \cdot I_6 + E_2 \cdot (-I_7) =$$

$$= 2 \cdot 10,5 + 1 \cdot 5,5 + 10 \cdot 1,1 + 15 \cdot 1,2 = 55,5 Bm$$

$$P_{nomp} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 =$$

$$= (-0,9)^2 \cdot 1 + (-3,2)^2 \cdot 3 + (2,3)^2 \cdot 2 + (2,1)^2 \cdot 3 + (0,2)^2 \cdot 4 = 55,5 Bm$$

## МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

При расчете токов МКТ всегда можно добиться того, чтобы ветвь с искомым током входила только в один независимый контур. Тогда реальный ток будет совпадать с контурным, и для него будет справедливо соотношение:

$$I_{kk} = E_{11} \cdot \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \dots + E_{nn} \cdot \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}$$

## МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

При расчете токов МКТ всегда можно добиться того, чтобы ветвь с искомым током входила только в один независимый контур. Тогда реальный ток будет совпадать с контурным, и для него будет справедливо соотношение:

$$I_{kk} = E_{11} \cdot \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \dots + E_{nn} \cdot \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}$$

Каждую из контурных ЭДС можно выразить через ЭДС ветвей  $E_1, E_2, E_3, \dots$ . Тогда:

$$I_k = E_1 \cdot a_{k1} + E_2 \cdot a_{k2} + E_3 \cdot a_{k3} + \dots = I_k' + I_k'' + I_k''' + \dots$$

**Ток в произвольной ветви равен алгебраической сумме частичных токов, порождаемых каждым из источников в отдельности.**

## Порядок решения задач методом наложения

1. Определить число *источников энергии* в схеме. Количество источников энергии равно количеству частичных токов, подлежащих определению.



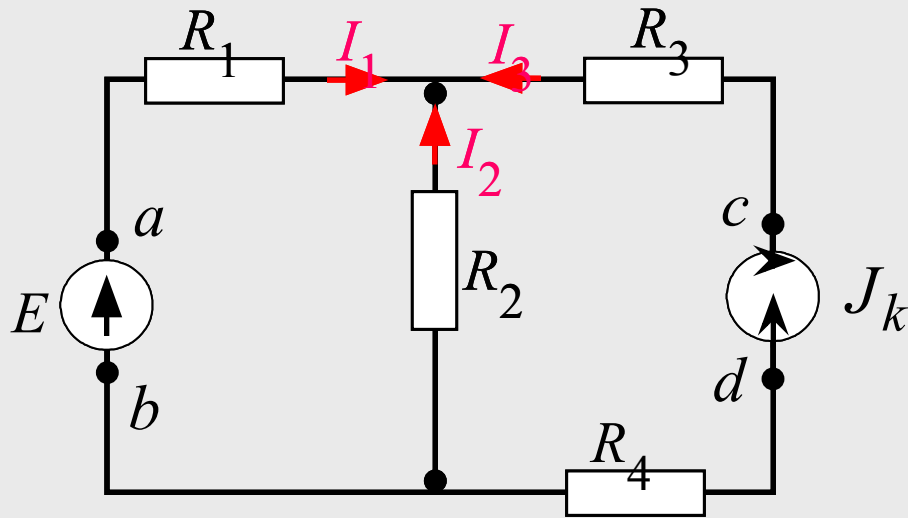
## Порядок решения задач методом наложения

1. Определить число *источников энергии* в схеме. Количество источников энергии равно количеству частичных токов, подлежащих определению.
2. Поочередно рассчитать частичные токи в ветвях, возникающие от действия каждого источника в отдельности. При этом остальные источники мысленно удаляются из цепи, но сохраняются их внутренние сопротивления.

## Порядок решения задач методом наложения

1. Определить число *источников энергии* в схеме. Количество источников энергии равно количеству частичных токов, подлежащих определению.
2. Поочередно рассчитать частичные токи в ветвях, возникающие от действия каждого источника в отдельности. При этом остальные источники мысленно удаляются из цепи, но сохраняются их внутренние сопротивления.
3. Истинные токи определяются алгебраической суммой частичных токов.
4. Произвести проверку решения с помощью баланса мощности.

# Пример



$$R_1 = \oplus_M$$

$$R_2 = \ominus_M$$

$$R_3 = \oplus_M$$

$$R_4 = \ominus_M$$

$$E = \mathbf{B0}$$

$$J_k = \mathbf{A}$$

---


$$I_1 - ? \quad I_2 - ? \quad I_3 - ?$$

(метод наложения)

Решение:

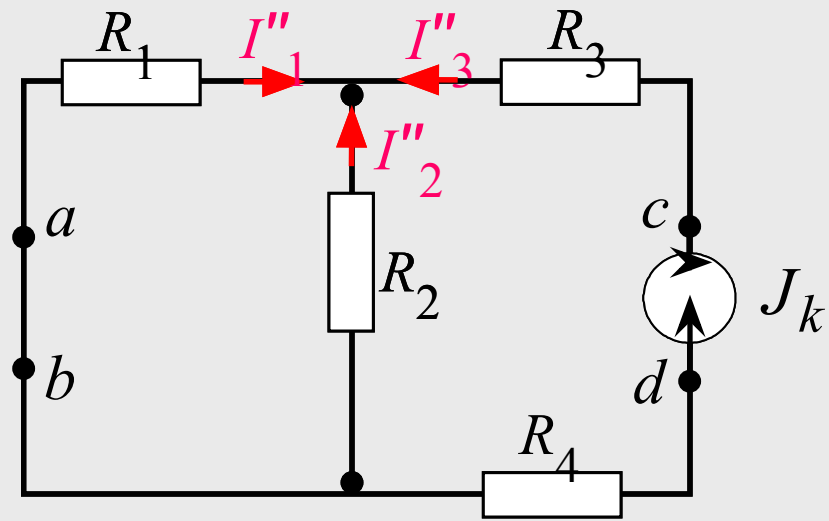
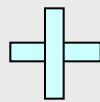
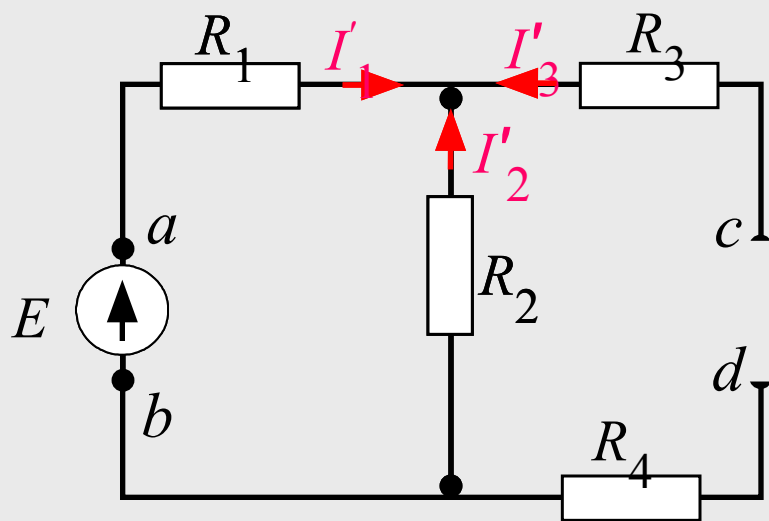
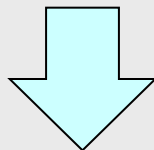
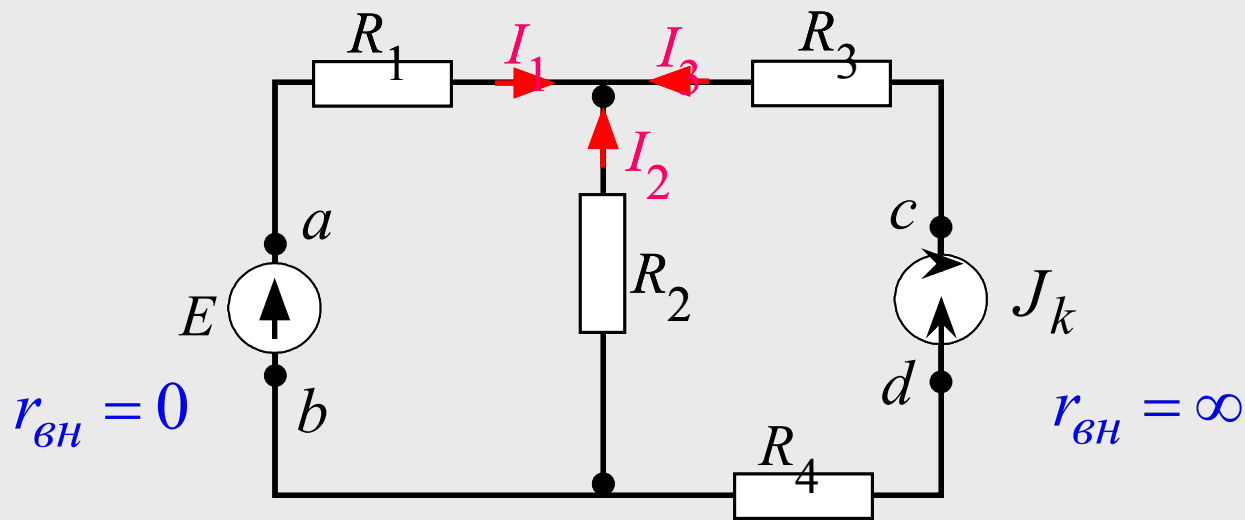
**источники**

**энергии :  $J_k, E$**

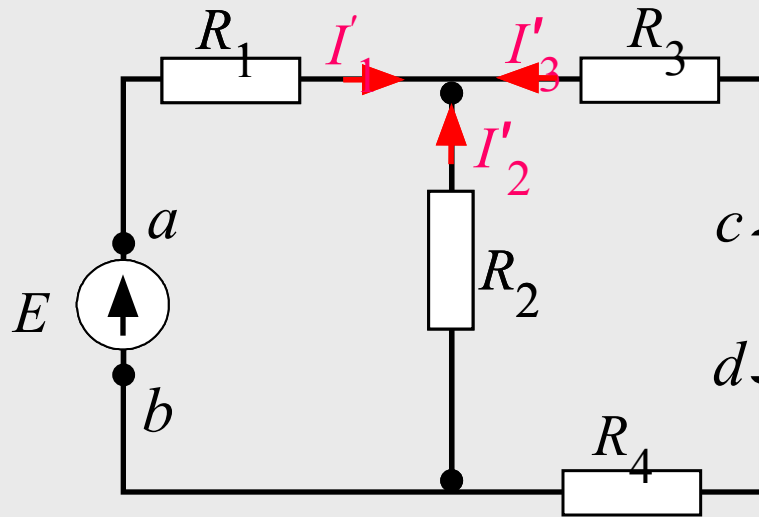
$$I_1 = I_1' + I_1''$$

$$I_2 = I_2' + I_2''$$

$$I_3 = I_3' + I_3''$$



Определение частичных токов в ветвях от действия источника ЭДС :

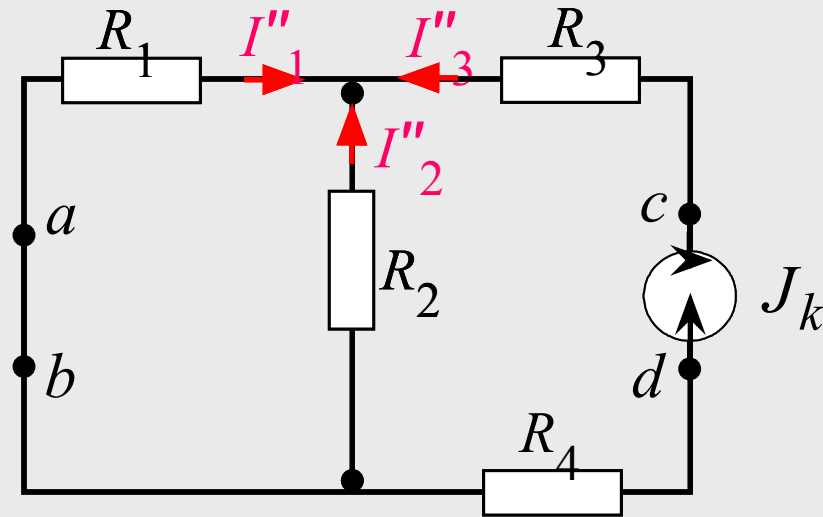


$$I'_3 = 0$$

$$I'_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10}{4 + 6} = \text{A}$$

$$I'_2 = -I'_1 = -\text{A}$$

Определение частичных токов в ветвях от действия  
источника тока :



$$I_3'' = J_k = 2 \text{ A}$$

$$I_2'' = -I_3'' \frac{R_1}{R_1 + R_2} = -2 \text{ A} \frac{4}{4 + 6} = -0,8$$

$$I_1'' = -I_3'' \frac{R_2}{R_1 + R_2} = -2 \text{ A} \frac{6}{4 + 6} = -1,2$$

Определение истинных токов в ветвях :

$$I_1 = I_1' + I_1'' = \mathbb{A} - 1,2 = -0,2$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = -\mathbb{A} - 0,8 = -1,8$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = \mathbb{A} + 2 = 2$$

После определения искоемых токов следует сделать проверку решения одним из известных методов.