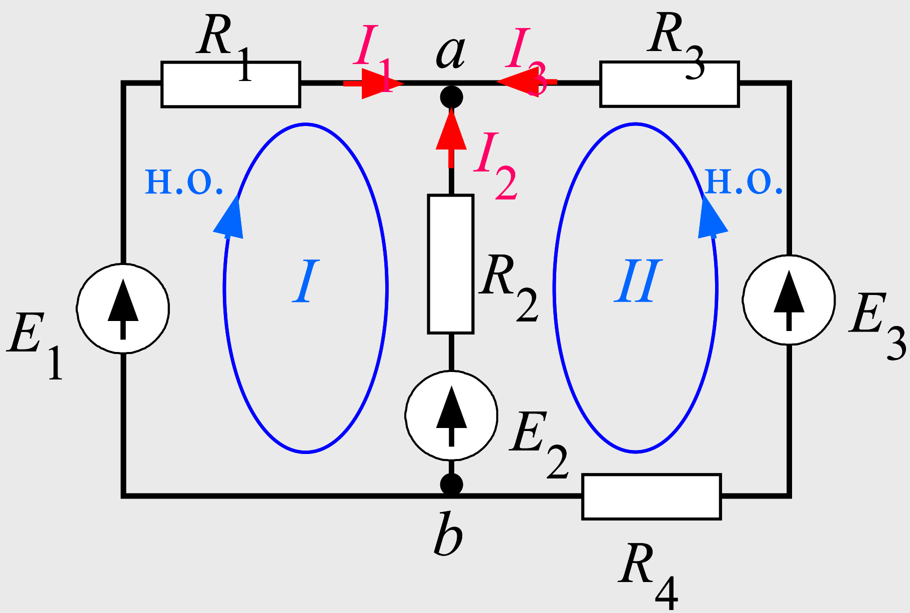
<u>МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ</u> (МКТ)

Вывод МКТ основан на решении полной системы уравнений, составленной по законам Кирхгофа.

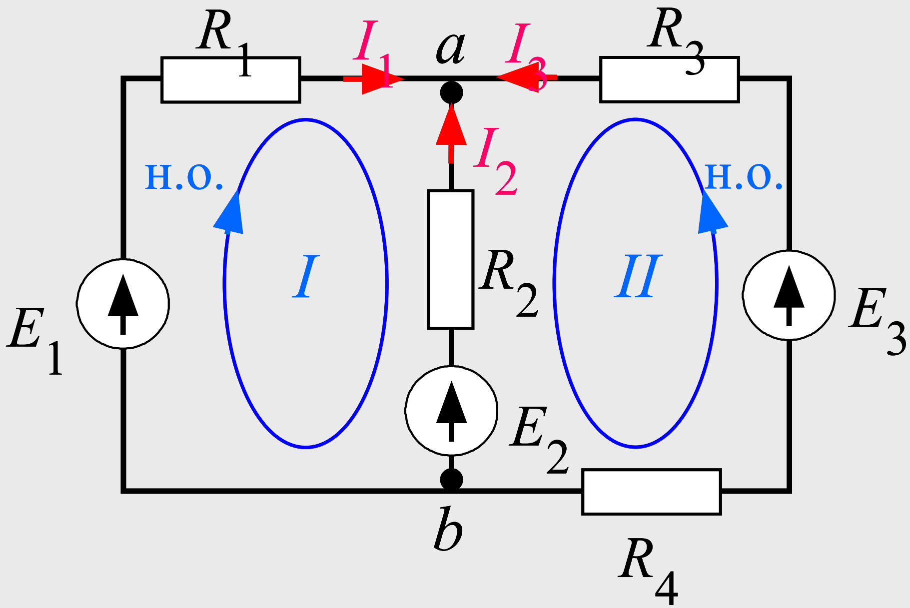


$$n = 2$$

$$m = 3$$

<u>МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ</u> (МКТ)

Вывод МКТ основан на решении полной системы уравнений, составленной по законам Кирхгофа.



$n = 2$

$m = 3$

узел «a»: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ (3.1)

I контур: $I_1R_1 - I_2R_2 = E_1 - E_2$ (3.2)

II контур: $-I_2R_2 + I_3(R_3 + R_4) = E_3 - E_2$ (3.3)

Из (3.1) выразим ток внутренней ветви I_2 :

$$I_2 = -(I_1 + I_3) \qquad (3.4)$$

Подставим (3.4) в (3.2), (3.3) и приведем подобные :

$$\left.\begin{aligned} I_1(R_1 + R_2) + I_3 R_2 = E_1 - E_2 \\ I_1 R_2 + I_3(R_2 + R_3 + R_4) = E_3 - E_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Из (3.1) выразим ток внутренней ветви I_2 :

$$I_2 = -(I_1 + I_3) \qquad (3.4)$$

Подставим (3.4) в (3.2), (3.3) и приведем подобные :

$$\left.\begin{aligned} I_1(R_1 + R_2) + I_3 R_2 = E_1 - E_2 \\ I_1 R_2 + I_3(R_2 + R_3 + R_4) = E_3 - E_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Формально введем понятие контурных токов, замкнув токи внешних ветвей по соответствующим контурам:

I_{11} - контурный ток I контура $\qquad I_1 = I_{11}$

I_{22} - контурный ток II контура $\qquad I_3 = I_{22}$

Обозначим:

$R_1 + R_2 = R_{11}$ - собственное сопротивление I контура

$R_2 + R_3 + R_4 = R_{22}$ -собственное сопротивление II контура

$R_2 = R_{12} = R_{21}$ - взаимное сопротивление контуров 1-го и 2-го

(3.6)

Обозначим:

$R_1 + R_2 = R_{11}$ - собственное сопротивление I контура

$R_2 + R_3 + R_4 = R_{22}$ -собственное сопротивление II контура

$R_2 = R_{12} = R_{21}$ - взаимное сопротивление контуров 1-го и 2-го

$$\left.\begin{aligned} E_1 - E_2 = E_{11} \\ E_3 - E_2 = E_{22} \end{aligned}\right\}$$ контурные ЭДС (алгебраическая сумма ЭДС, входящих в контур)

(3.6)

Обозначим:

$R_1 + R_2 = R_{11}$ - собственное сопротивление *I* контура

$R_2 + R_3 + R_4 = R_{22}$ -собственное сопротивление *II* контура

$R_2 = R_{12} = R_{21}$ - взаимное сопротивление контуров 1-го и 2-го

$$\left.\begin{aligned} E_1 - E_2 &= E_{11} \\ E_3 - E_2 &= E_{22} \end{aligned}\right\}$$ контурные ЭДС (алгебраическая сумма ЭДС, входящих в контур)

С учетом принятых обозначений систему (3.5) можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} &= E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} &= E_{22} \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

Структура уравнений, составленных по МКТ:

$$\left.\begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + \ldots + I_{nn}R_{1n} &= E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + \ldots + I_{nn}R_{2n} &= E_{22} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_{11}R_{n1} + I_{22}R_{n2} + \ldots + I_{nn}R_{nn} &= E_{nn} \end{aligned}\right\}$$

В результате решения полученной системы уравнений находим контурные токи $I_{11}, I_{2\,2}, \ldots, I_{n\,n}$, а затем реальные токи в ветвях схемы $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

Порядок решения задач методом контурных токов

1. Определить число узлов n и ветвей m схемы.

2. Выбрать ($m - n + 1$) взаимно независимых контуров и задать для этих контуров направления обхода (**н.о.**).

Порядок решения задач методом контурных токов

1. Определить число узлов n и ветвей m схемы.

2. Выбрать (m - n + 1) взаимно независимых контуров и задать для этих контуров направления обхода (**н.о.**).

3. Принять направления контурных токов совпадающим с направлением обхода контуров.

4. Для выбранных контуров записать уравнения по МКТ и решить полученную систему уравнений.

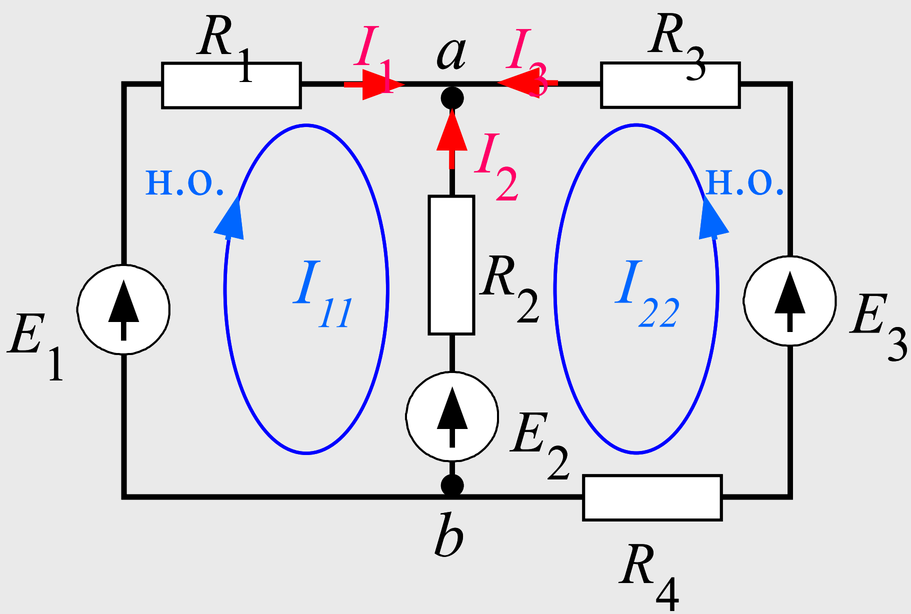
Порядок решения задач методом контурных токов

1. Определить число узлов n и ветвей m схемы.
2. Выбрать ($m - n + 1$) взаимно независимых контуров и задать для этих контуров направления обхода (**н.о.**).
3. Принять направления контурных токов совпадающим с направлением обхода контуров.
4. Для выбранных контуров записать уравнения по МКТ и решить полученную систему уравнений.
5. Произвольно расставить направления реальных токов в ветвях.
6. Определить реальные токи в ветвях как алгебраическую сумму контурных токов.

Порядок решения задач методом контурных токов

1. Определить число узлов n и ветвей m схемы.
2. Выбрать ($m - n + 1$) взаимно независимых контуров и задать для этих контуров направления обхода (**н.о.**).
3. Принять направления контурных токов совпадающим с направлением обхода контуров.
4. Для выбранных контуров записать уравнения по МКТ и решить полученную систему уравнений.
5. Произвольно расставить направления реальных токов в ветвях.
6. Определить реальные токи в ветвях как алгебраическую сумму контурных токов.
7. Произвести проверку решения с помощью баланса мощности.

Пример



$R_1 = 2\,\text{Ом}$

$R_2 = 5\,\text{Ом}$

$R_3 = 4\,\text{Ом}$

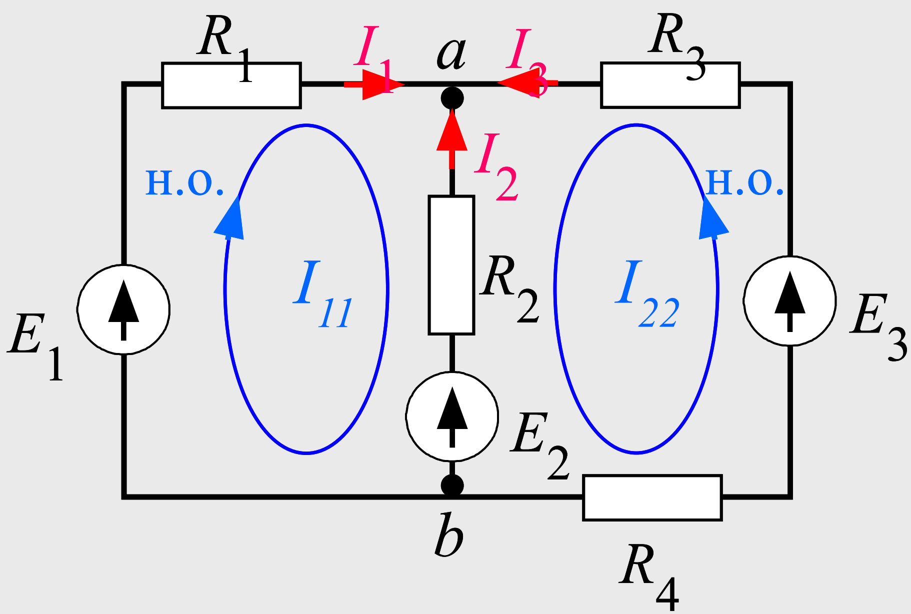
$R_4 = 1\,\text{Ом}$

$E_1 = 1\,\text{В}$

$E_2 = E_3 = 12\,\text{В}$

$I_1 - ?\quad I_2 - ?\quad I_3 - ?$

Пример



$R_1 = 2\,\text{Ом}$

$R_2 = 5\,\text{Ом}$

$R_3 = 4\,\text{Ом}$

$R_4 = 1\,\text{Ом}$

$E_1 = 3\,\text{В}$

$E_2 = E_3 = 12\,\text{В}$

$I_1 - ?\;\; I_2 - ?\;\; I_3 - ?$

Решение:

$$n = 2$$

$$m = 3$$

$$m - n + 1 = 2$$

$$\left.\begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_2) + I_{22}R_2 &= E_1 - E_2 \\ I_{11}R_2 + I_{22}(R_2 + R_3 + R_4) &= E_3 - E_2 \end{aligned}\right\}$$

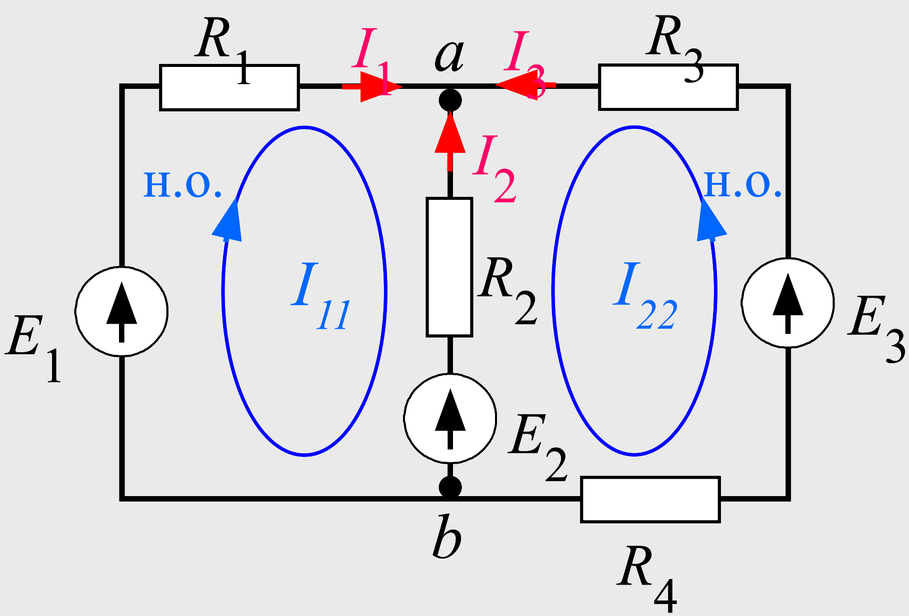
Решение полученной системы методом подстановки :

$$\begin{cases} 7 \cdot I_{11} + 5 \cdot I_{22} = -9 \\ 5 \cdot I_{11} + 10 \cdot I_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{11} = -2\, I_{22} \\ 9\, I_{22} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{11} = -2 \\ I_{22} = 1 \end{cases}$$

Решение полученной системы методом подстановки :

$$\begin{cases} 7 \cdot I_{11} + 5 \cdot I_{22} = -9 \\ 5 \cdot I_{11} + 10 \cdot I_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{11} = -2\, I_{22} \\ 9\, I_{22} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{11} = -2 \\ I_{22} = 1 \end{cases}$$

Определение реальных токов в ветвях :

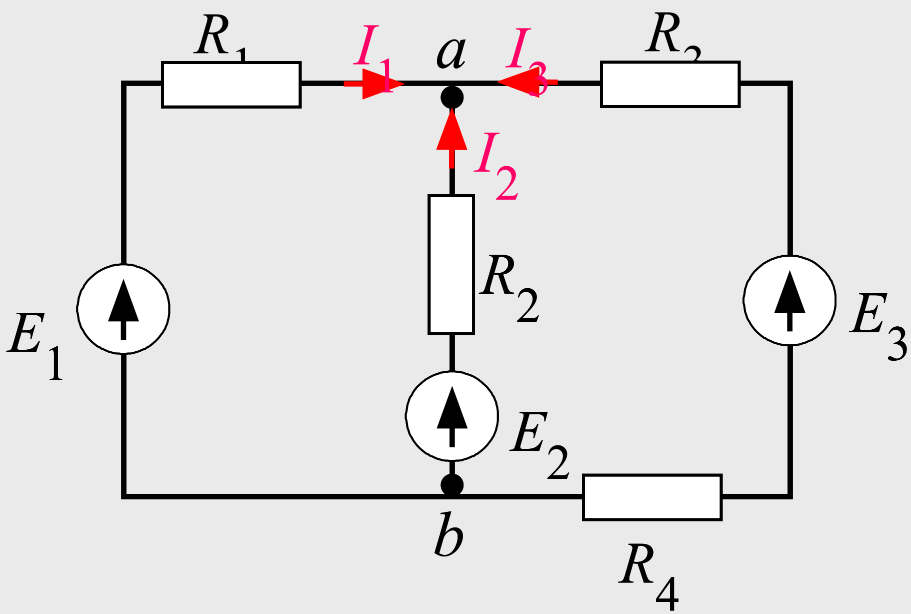


$$I_1 = I_{11} = -2\text{A}$$

$$I_2 = -(I_{11} + I_{22}) = 1\text{A}$$

$$I_3 = I_{22} = 1\text{A}$$

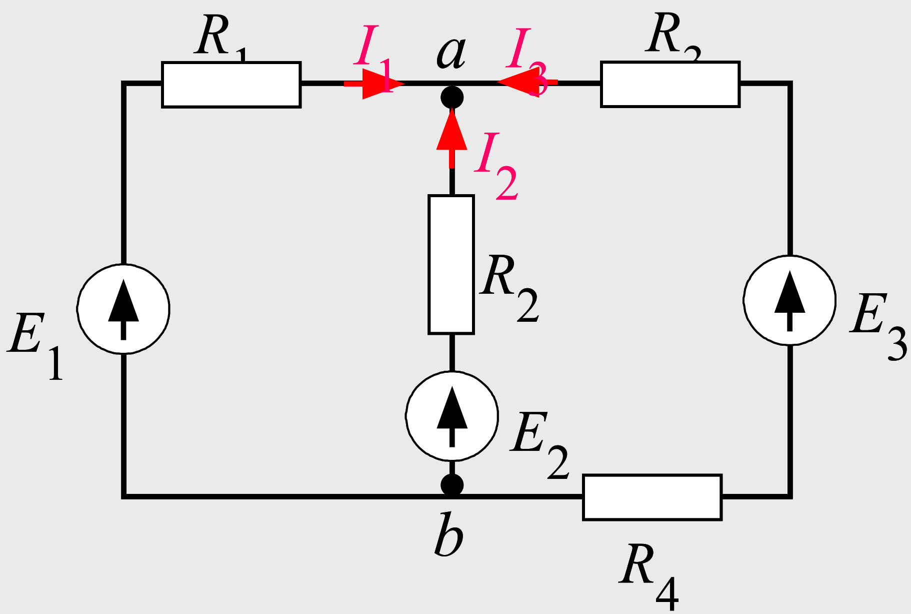
Проверка решения (баланс мощности)



Баланс мощности:

$$\sum P_{ucm} = \sum P_{nomp}$$

Проверка решения (баланс мощности)



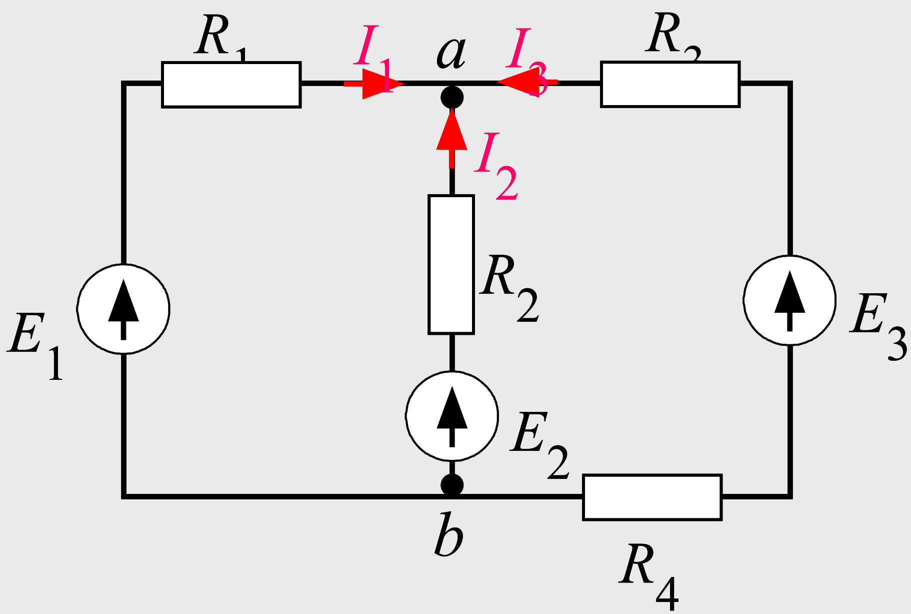
Баланс мощности:

$$\sum P_{ист} = \sum P_{потр}$$

Мощность источников: $\sum P_{ист} = \sum E \cdot I_E$

$$E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 = 3 \cdot (-2) + 12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 18 \text{ Вт}$$

Проверка решения (баланс мощности)



Баланс мощности:

$$\sum P_{ист} = \sum P_{потр}$$

Мощность источников: $\sum P_{ист} = \sum E \cdot I_E$

$$E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 = 3 \cdot (-2) + 12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 18$$ Вт

Мощность потребителей: $\sum P_{потр} = \sum I_R^2 \cdot R$

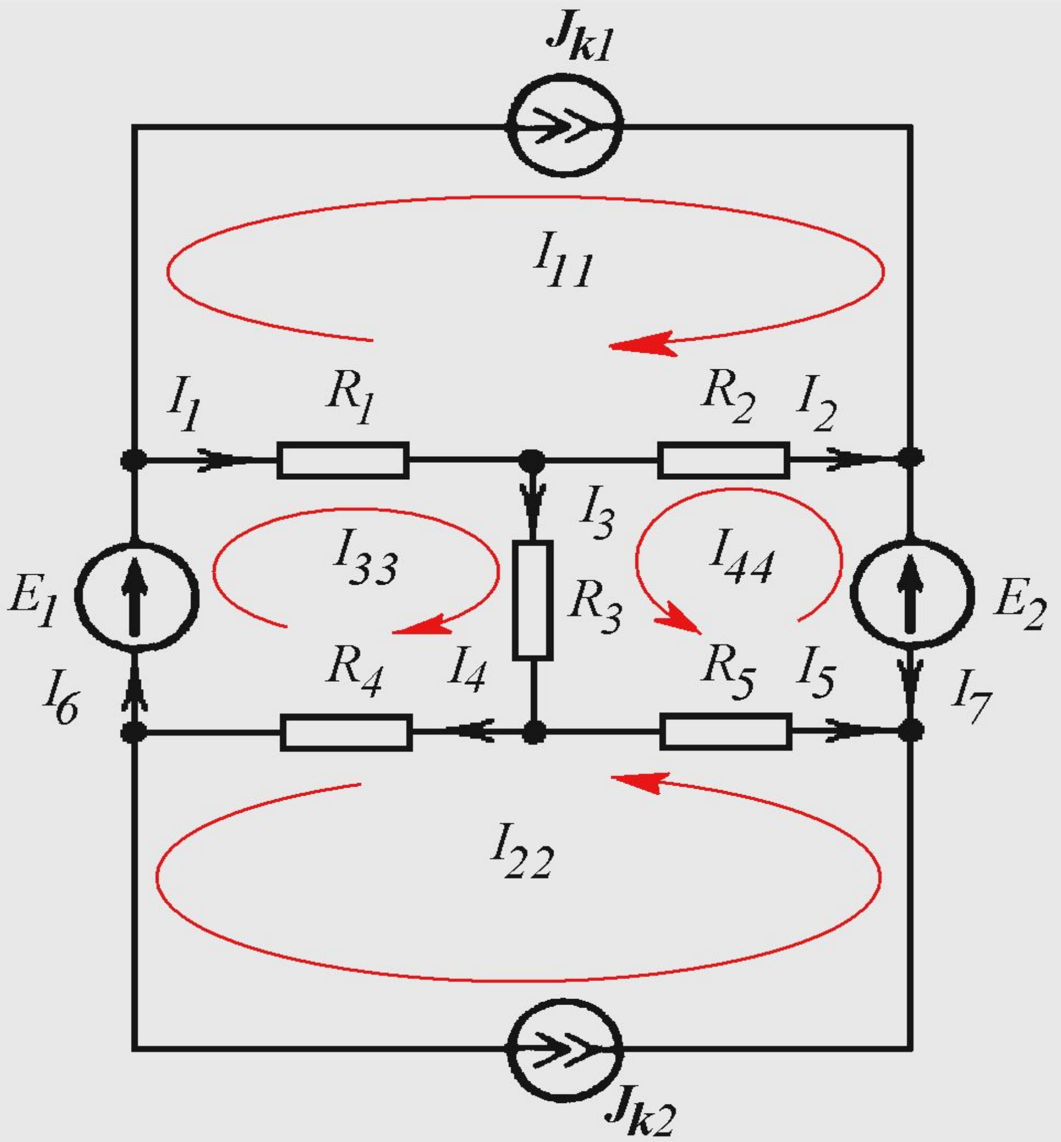
$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 (R_3 + R_4) = (-2)^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 5 + 1^2 (4+1) = 18$$ Вт

Особенности применения метода контурных токов при наличии в цепи источников тока

При наличии в схеме источника тока расчетные контуры нужно выбрать так, чтобы каждый источник тока входил **только в один** независимый контур. Тогда реальный ток источника будет равен контурному току, и, следовательно, этот контурный ток уже будет известен (для него не надо записывать уравнения по МКТ). Но он будет входить в уравнения для других контурных токов. При формировании системы уравнений его необходимо перенести в правую часть системы как известную величину.

Ток источника тока может замыкаться по произвольным контурам, состоящим из ветвей, дополняющих ветвь источника до замкнутого контура.

Пример



$R_1 = 1$ Ом

$R_2 = 3$ Ом

$R_3 = 2$ Ом

$R_4 = 3$ Ом

$R_5 = 4$ Ом

$E_1 = 10$ В

$E_2 = 15$ В

$J_{k1} = 2$ А

$J_{k2} = 1$ А

найти неизвестные токи

Решение:

$$I_{11} = J_{k1}$$

$$I_{22} = J_{k2}$$

$$\boldsymbol{n = 6}$$

$$\boldsymbol{m = 9;\ m_{\text{н}} = 7}$$

$$\boldsymbol{m_{\text{н}} - n + 1 = 2}$$

Решение:

$$I_{11} = J_{k1}$$

$$I_{22} = J_{k2}$$

$$\boldsymbol{n = 6}$$

$$\boldsymbol{m = 9;\ m_{\text{н}} = 7}$$

$$\boldsymbol{m_{\text{н}} - n + 1 = 2}$$

$$\begin{cases} I_{33}(R_1 + R_3 + R_4) + I_{44}R_3 - I_{11}R_1 + I_{22}R_4 = E_1 \\ I_{33}R_3 + I_{44}(R_2 + R_3 + R_5) + I_{11}R_2 - I_{22}R_5 = E_2 \end{cases}$$

Решение:

$$I_{11} = J_{k1}$$

$$I_{22} = J_{k2}$$

$$\boldsymbol{n = 6}$$

$$\boldsymbol{m = 9;\ m_{\text{н}} = 7}$$

$$\boldsymbol{m_{\text{н}} - n + 1 = 2}$$

$$\begin{cases} I_{33}(R_1 + R_3 + R_4) + I_{44}R_3 - I_{11}R_1 + I_{22}R_4 = E_1 \\ I_{33}R_3 + I_{44}(R_2 + R_3 + R_5) + I_{11}R_2 - I_{22}R_5 = E_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{33}(R_1 + R_3 + R_4) + I_{44}R_3 = E_1 + I_{11}R_1 - I_{22}R_4 \\ I_{33}R_3 + I_{44}(R_2 + R_3 + R_5) = E_2 - I_{11}R_2 + I_{22}R_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 \cdot I_{33} + 2 \cdot I_{44} = 9 \\ 2 \cdot I_{33} + 9 \cdot I_{44} = 13 \end{cases}$$

Решение полученной системы методом Крамера :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 6 \cdot 9 - 2 \cdot 2 = 50 \text{Ом}^2$$

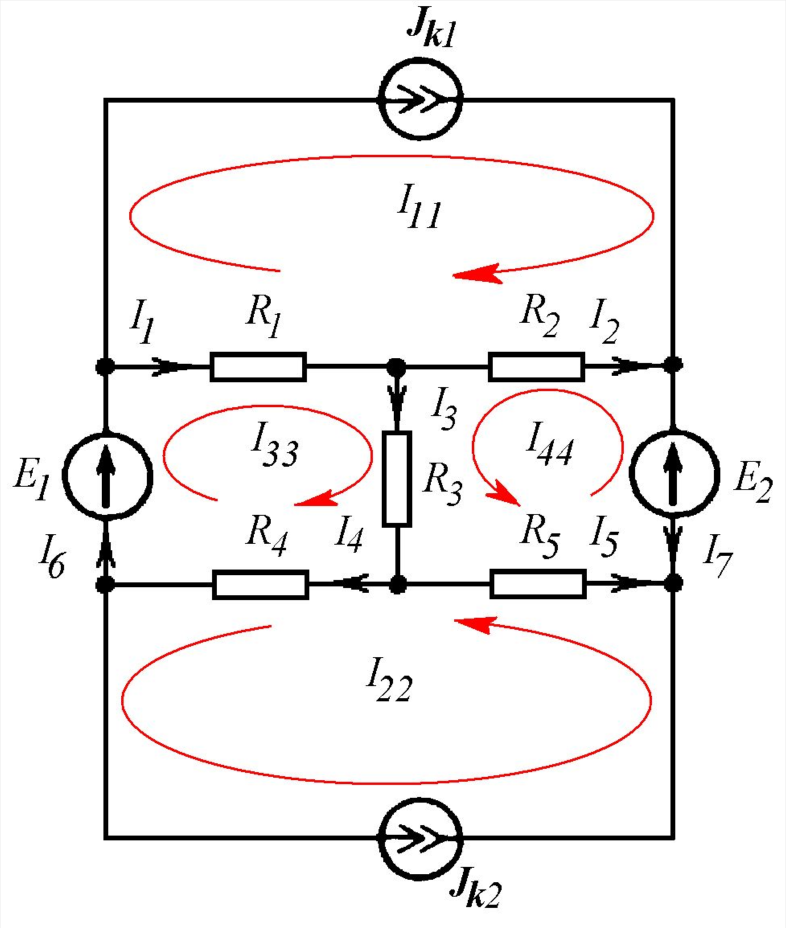
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 13 & 9 \end{vmatrix} = 9 \cdot 9 - 2 \cdot 13 = 55 B \cdot \text{Ом}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 6 \cdot 13 - 9 \cdot 2 = 60 B \cdot \text{Ом}$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{55}{50} = 1{,}1 A$$

$$I_{44} = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{60}{50} = 1{,}2 A$$

Определение реальных токов в ветвях



$$I_1 = I_{33} - I_{11} = 1{,}1 - 2 = -0{,}9\,A$$

$$I_2 = -I_{44} - I_{11} = -1{,}2 - 2 = -3{,}2\,A$$

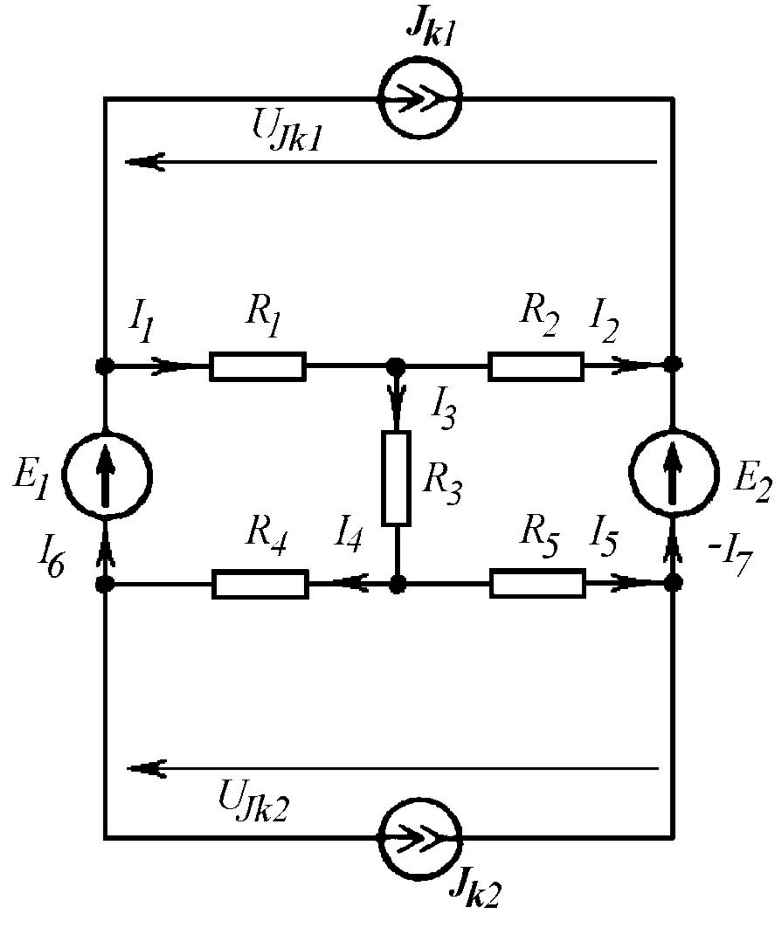
$$I_3 = I_{33} + I_{44} = 1{,}1 + 1{,}2 = 2{,}3\,A$$

$$I_4 = I_{33} + I_{22} = 1{,}1 + 1 = 2{,}1\,A$$

$$I_5 = I_{44} - I_{22} = 1{,}2 - 1 = 0{,}2\,A$$

$$I_6 = I_{33} = 1{,}1\,A$$

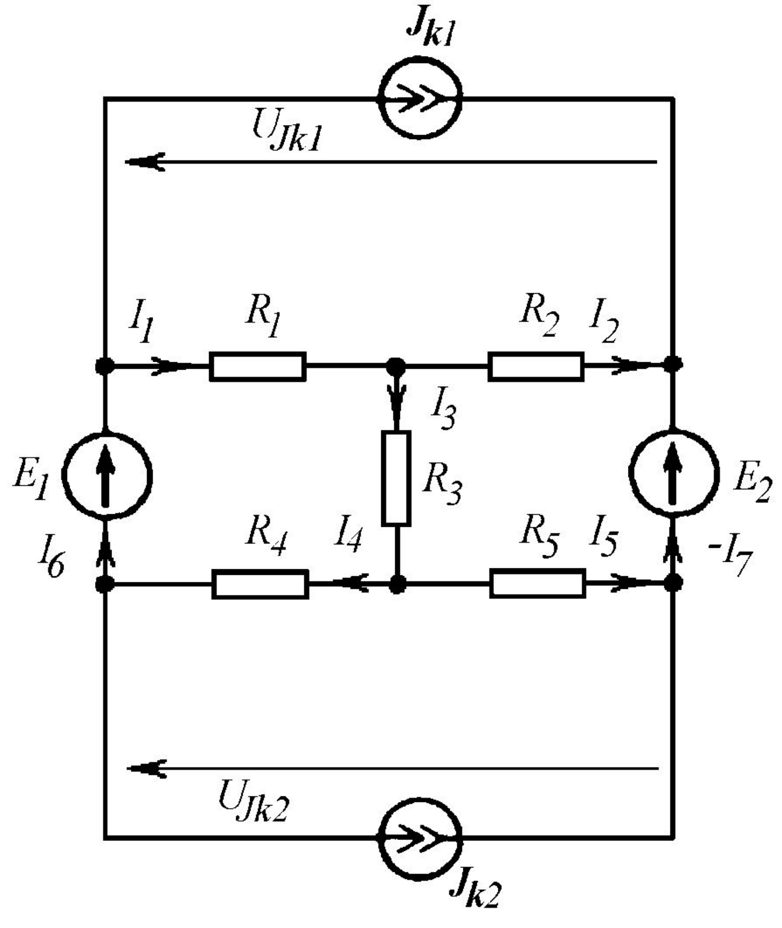
$$I_7 = -I_{44} = -1{,}2\,A$$



Проверка решения (баланс мощности)

$$U_{Jk1} = -I_2R_2 - I_1R_1 =$$
$$= 3{,}2 \cdot 3 + 0{,}9 \cdot 1 = 10{,}5B$$

$$U_{Jk2} = -I_5R_5 + I_4R_4 =$$
$$= -0{,}2 \cdot 4 + 2{,}1 \cdot 3 = 5{,}5B$$

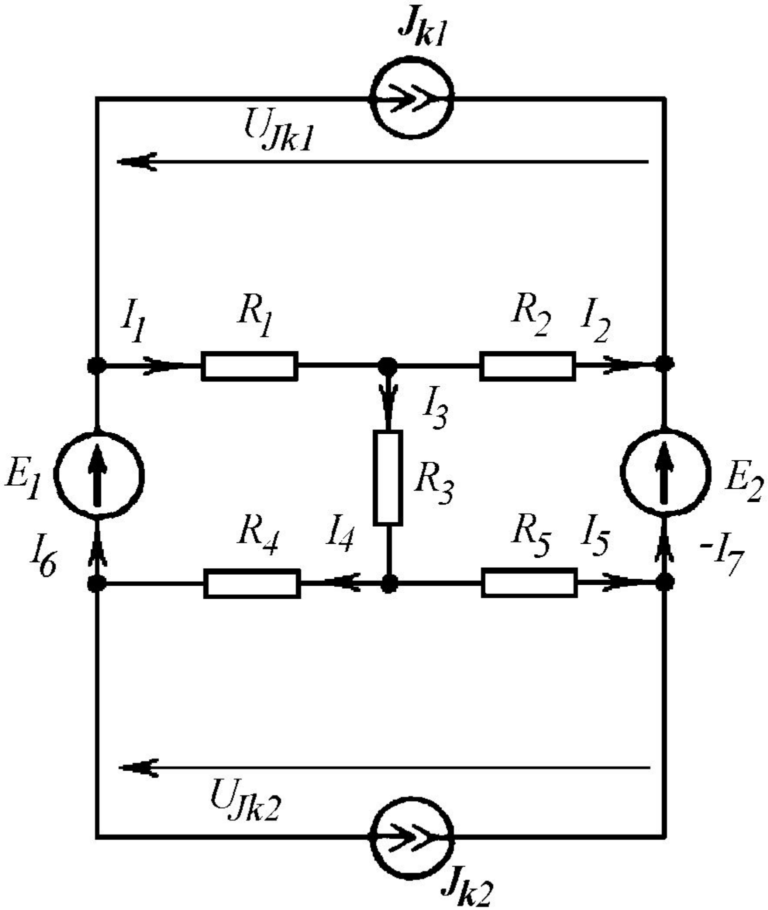


Проверка решения (баланс мощности)

$$U_{Jk1} = -I_2R_2 - I_1R_1 =$$
$$= 3{,}2 \cdot 3 + 0{,}9 \cdot 1 = 10{,}5B$$

$$U_{Jk2} = -I_5R_5 + I_4R_4 =$$
$$= -0{,}2 \cdot 4 + 2{,}1 \cdot 3 = 5{,}5B$$

$$P_{ист} = J_{k1} \cdot U_{Jk1} + J_{k2} \cdot U_{Jk2} + E_1 \cdot I_6 + E_2 \cdot (-I_7) =$$
$$= 2 \cdot 10{,}5 + 1 \cdot 5{,}5 + 10 \cdot 1{,}1 + 15 \cdot 1{,}2 = 55{,}5Bm$$



Проверка решения (баланс мощности)

$$U_{Jk1} = -I_2 R_2 - I_1 R_1 =$$
$$= 3,2 \cdot 3 + 0,9 \cdot 1 = 10,5B$$

$$U_{Jk2} = -I_5 R_5 + I_4 R_4 =$$
$$= -0,2 \cdot 4 + 2,1 \cdot 3 = 5,5B$$

$$P_{ucm} = J_{k1} \cdot U_{Jk1} + J_{k2} \cdot U_{Jk2} + E_1 \cdot I_6 + E_2 \cdot (-I_7) =$$
$$= 2 \cdot 10,5 + 1 \cdot 5,5 + 10 \cdot 1,1 + 15 \cdot 1,2 = 55,5Bm$$

$$P_{nomp} = I_1^{\;2} R_1 + I_2^{\;2} R_2 + I_3^{\;2} R_3 + I_4^{\;2} R_4 + I_5^{\;2} R_5 =$$
$$= (-0,9)^2 \cdot 1 + (-3,2)^2 \cdot 3 + (2,3)^2 \cdot 2 + (2,1)^2 \cdot 3 + (0,2)^2 \cdot 4 = 55,5Bm$$

МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

При расчете токов МКТ всегда можно добиться того, чтобы ветвь с искомым током входила только в один независимый контур. Тогда реальный ток будет совпадать с контурным, и для него будет справедливо соотношение:

$$I_{kk} = E_{11} \cdot \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \ldots + E_{nn} \cdot \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}$$

<u>МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ</u>

При расчете токов МКТ всегда можно добиться того, чтобы ветвь с искомым током входила только в один независимый контур. Тогда реальный ток будет совпадать с контурным, и для него будет справедливо соотношение:

$$I_{kk} = E_{11} \cdot \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \ldots + E_{nn} \cdot \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}$$

Каждую из контурных ЭДС можно выразить через ЭДС ветвей E_1, E_2, E_3… Тогда:

$$I_k = E_1 \cdot a_{k1} + E_2 \cdot a_{k2} + E_3 \cdot a_{k3} + \ldots = I_k^{'} + I_k^{''} + I_k^{'''} + \ldots$$

Ток в произвольной ветви равен алгебраической сумме частичных токов, порождаемых каждым из источников в отдельности.

Порядок решения задач методом наложения

1. Определить число ***источников энергии*** в схеме. Количество источников энергии равно количеству частичных токов, подлежащих определению.

<u>Порядок решения задач методом наложения</u>

1. Определить число ***источников энергии*** в схеме. Количество источников энергии равно количеству частичных токов, подлежащих определению.

2. Поочередно рассчитать частичные токи в ветвях, возникающие от действия каждого источника в отдельности. При этом остальные источники мысленно удаляются из цепи, но сохраняются их внутренние сопротивления.

<u>Порядок решения задач методом наложения</u>

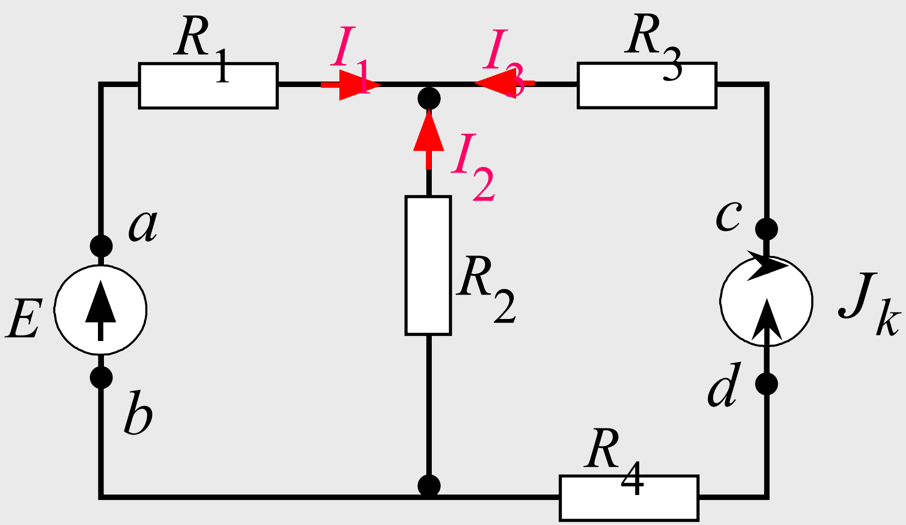
1. Определить число ***источников энергии*** в схеме. Количество источников энергии равно количеству частичных токов, подлежащих определению.

2. Поочередно рассчитать частичные токи в ветвях, возникающие от действия каждого источника в отдельности. При этом остальные источники мысленно удаляются из цепи, но сохраняются их внутренние сопротивления.

3. Истинные токи определяется алгебраической суммой частичных токов.

4. Произвести проверку решения с помощью баланса мощности.

Пример



$R_1 = 4\,Ом$

$R_2 = 6\,Ом$

$R_3 = 4\,Ом$

$R_4 = 1\,Ом$

$E = 30\,В$

$J_k = 2\,А$

$I_1 - ?\ \ I_2 - ?\ \ I_3 - ?$

(метод наложения)

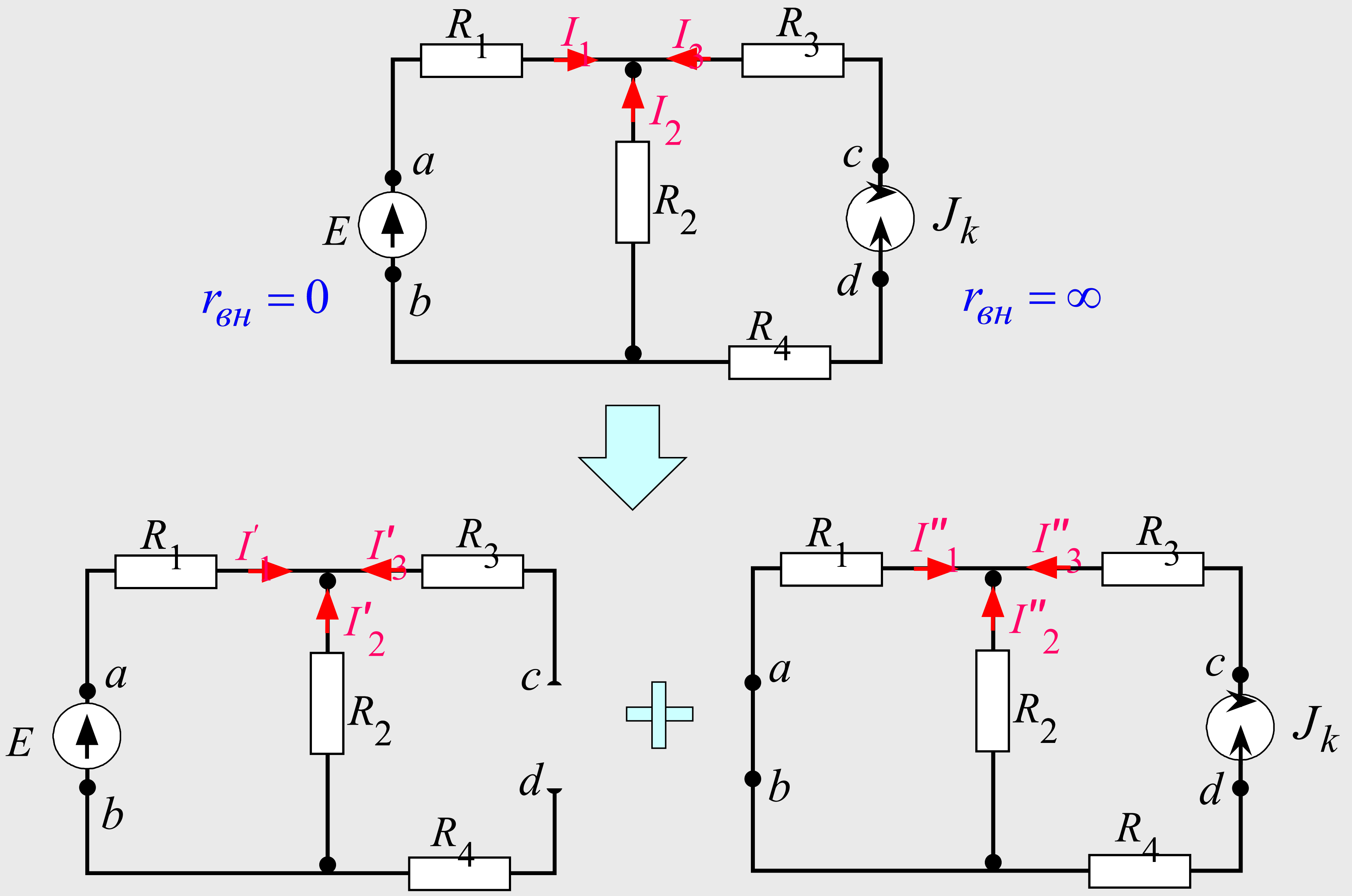
Решение:

источники энергии $\boldsymbol{: J_k, E}$

$$I_1 = I_1' + I_1''$$

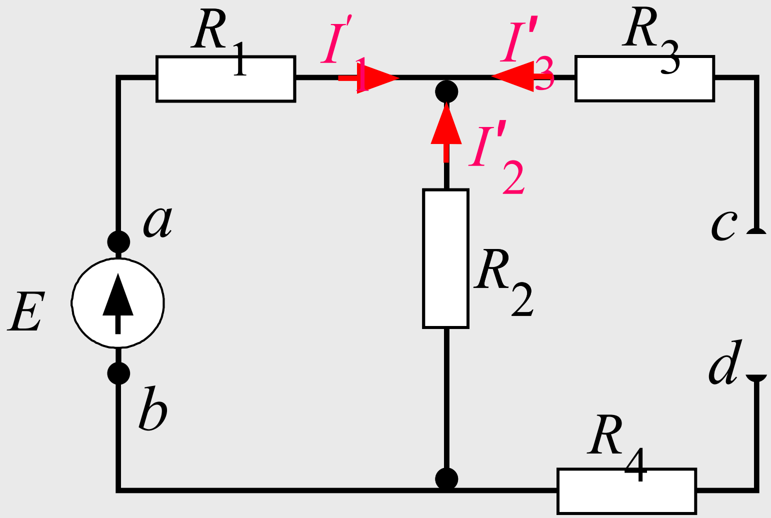
$$I_2 = I_2' + I_2''$$

$$I_3 = I_3' + I_3''$$



R1
I1
I3
R3
I2
a
c
E
R2
Jk
b
d
rвн = 0
R4
rвн = ∞
R1
I'1
I'3
R3
I'2
a
c
E
R2
b
d
R4
+
R1
I''1
I''3
R3
I''2
a
c
R2
Jk
b
d
R4

Определение частичных токов в ветвях от действия источника ЭДС :

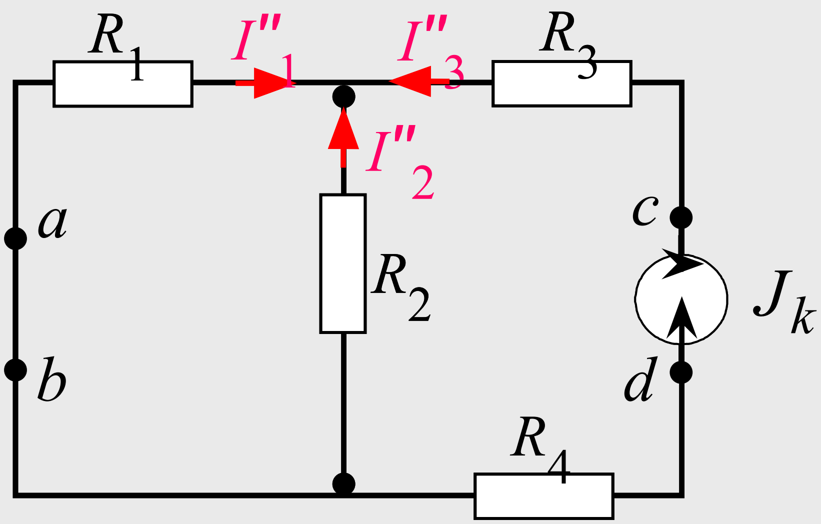


$$I_3' = 0$$

$$I_1' = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10}{4 + 6} = 1\,\text{A}$$

$$I_2' = -I_1' = -1\,\text{A}$$

Определение частичных токов в ветвях от действия источника тока :



$$I_3'' = J_k = 2\text{A}$$

$$I_2'' = -I_3'' \frac{R_1}{R_1 + R_2} = -2\text{A} \frac{4}{4+6} = -0,8$$

$$I_1'' = -I_3'' \frac{R_2}{R_1 + R_2} = -2\text{A} \frac{6}{4+6} = -1,2$$

Определение истинных токов в ветвях :

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 1 - 1{,}2 = -0{,}2 \text{ A}$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = -1 - 0{,}8 = -1{,}8 \text{ A}$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 0 + 2 = 2 \text{ A}$$

После определения искомых токов следует сделать проверку решения одним из известных методов.