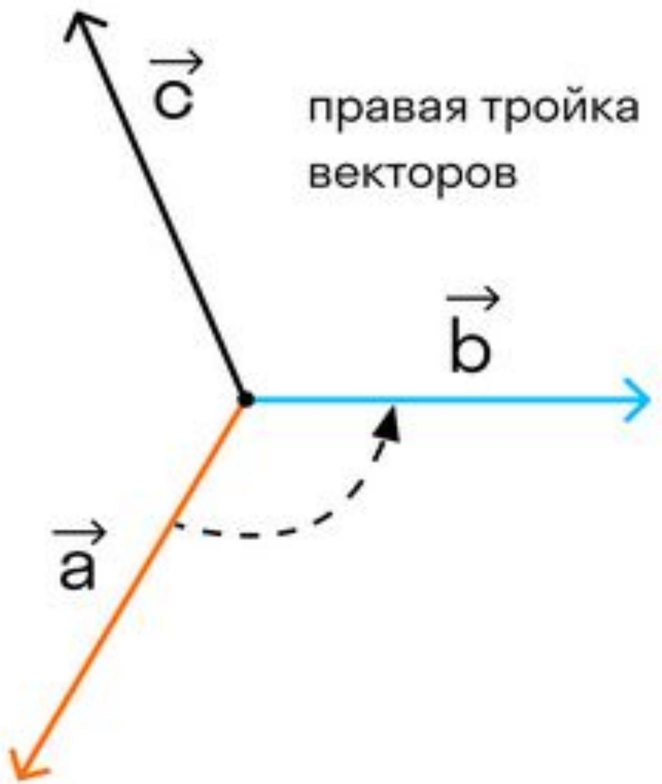
Векторное произведение

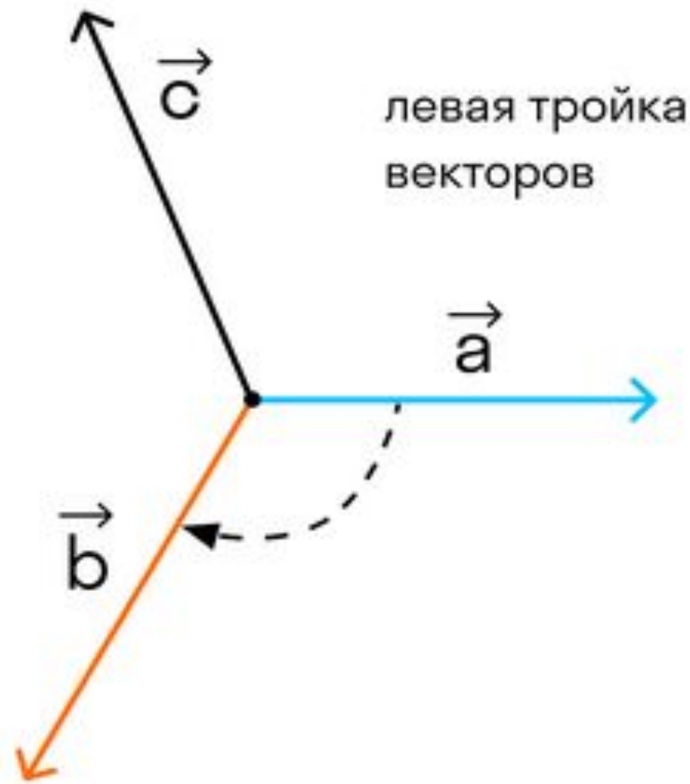
Подготовил: Хусаинов А.
Закиров А.
студенты 2-го курса «АПТ» группа
СТ-201б

Определение векторного произведения

- Система координат — способ определить положение и перемещение точки или тела с помощью чисел или других символов.
- Координаты — это совокупность чисел, которые определяют положение какого-либо объекта на прямой, плоскости, поверхности или в пространстве. Как найти координаты точки мы рассказали в этой статье.
- Скаляр — это величина, которая полностью определяется в любой координатной системе одним числом или функцией.
- Вектор — направленный отрезок прямой, для которого указано, какая точка является началом, а какая — концом.
- Вектор с началом в точке A и концом в точке B принято обозначать как →AB. Векторы также можно обозначать малыми латинскими буквами со стрелкой или черточкой над ними, вот так: →a.
- Коллинеарность — отношение параллельности векторов. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.
- Проще говоря это «параллельные» векторы. Коллинеарные векторы могут быть одинаково направлены или противоположно направлены.

- Посмотрим с конца вектора $\vec{c}$ на то, как происходит кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$. Если кратчайший поворот происходит против часовой стрелки, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется правой, по часовой стрелке —



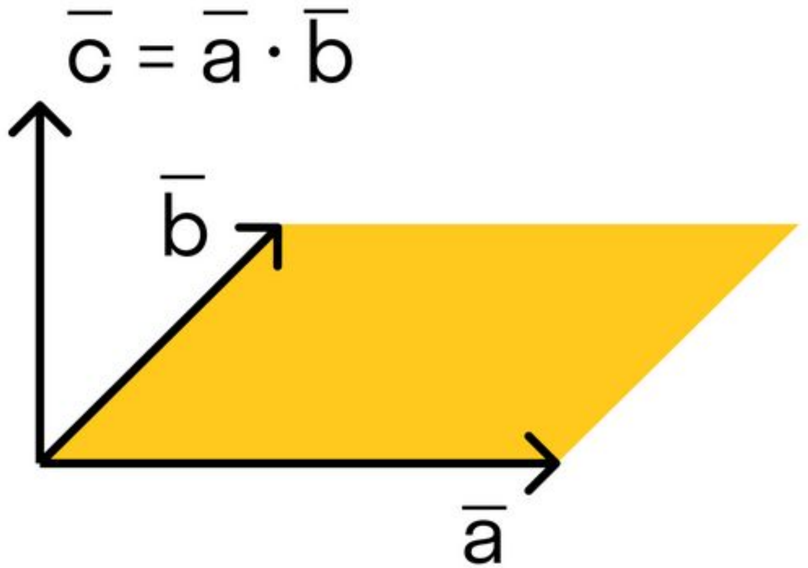


- **Векторным произведением** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которые заданы в прямоугольной системе координат трехмерного пространства, называется такой вектор $\vec{c}$, что:
- он является нулевым, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные;
- он перпендикулярен и вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$;
- $$\left(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}\right) = \left(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}\right) = \frac{\pi}{2}$$
- длина векторного произведения равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

- тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ориентирована так же, как и заданная система координат.

- Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, длина которого численно равна площади параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный так, чтобы наименьшее вращение от $\vec{a}$ к $(\vec{b})$ вокруг вектора c осуществлялось против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{c}$



- Векторное произведение двух векторов a = {ax; ay; az} и b = {bx; by; bz} в декартовой системе координат — это вектор, значение которого можно вычислить, используя формулы вычисления векторного произведения векторов:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = i\,(a_y b_z - a_z b_y) - j\,(a_x b_z - a_z b_x) + k\,(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$a \times b = \{a_y b_z - a_z b_y;\ a_z b_x - a_x b_z;\ a_x b_y - a_y b_x\}$$

Координаты векторного произведения

- Рассмотрим векторное произведение векторов в координатах.
- Сформулируем второе определение векторного произведения, которое позволяет находить его координаты по координатам заданных векторов.
- В прямоугольной системе координат трехмерного пространства

az) и $\vec{b}$ = (bx, by, bz)

$$\vec{c} = \left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}$$

-
- где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$,— координатные векторы.
- Это определение показывает нам векторное произведение в координатной форме.
- Векторное произведение удобно представлять в виде определителя квадратной матрицы третьего порядка, первая строка которой есть орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, во второй строке находятся координаты вектора $\vec{a}$, а в

заданной прямоугольной системе

$$\vec{c} = \left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

- Если разложим этот определитель по элементам первой строки, то получим равенство из определения векторного произведения в координатах:

$$\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot k =$$

$$= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}$$

Свойства векторного произведения

- Векторное произведение в координатах представляется в виде определителя матрицы:

$$\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

- На основании свойств определителя можно легко обосновать свойства векторного произведения векторов:3. Сочетательное свойство
- 1. Антикоммутативность

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$$

$$[\gamma \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}] = \gamma \cdot [\vec{a} \cdot \vec{b}]$$

- 2.Свойство дистрибутивности

$$[(\vec{a}^{(1)} + \vec{a}^{(2)}) \cdot \vec{b}] = [\vec{a}^{(1)} \cdot \vec{b}] + [\vec{a}^{(2)} \cdot \vec{b}]$$