

# Векторное произведение

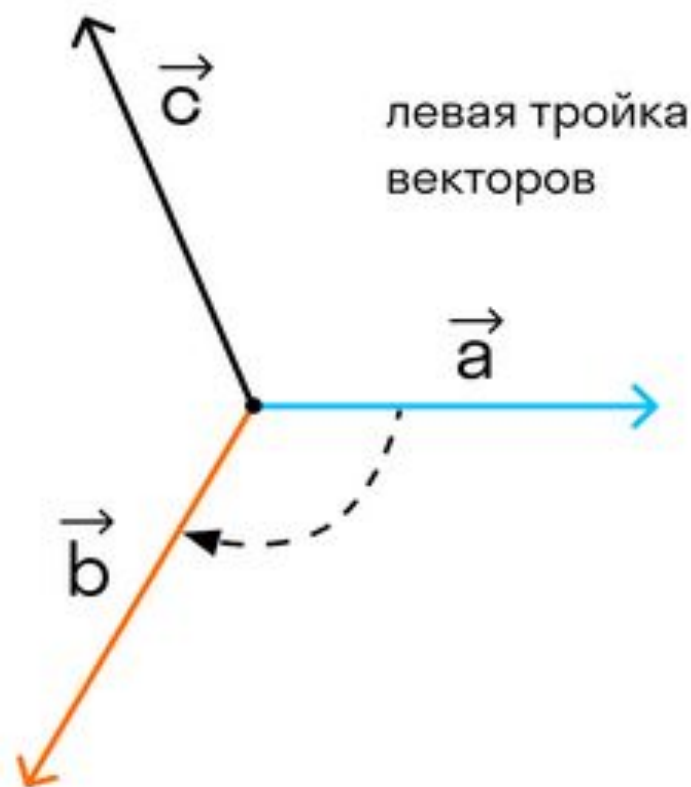
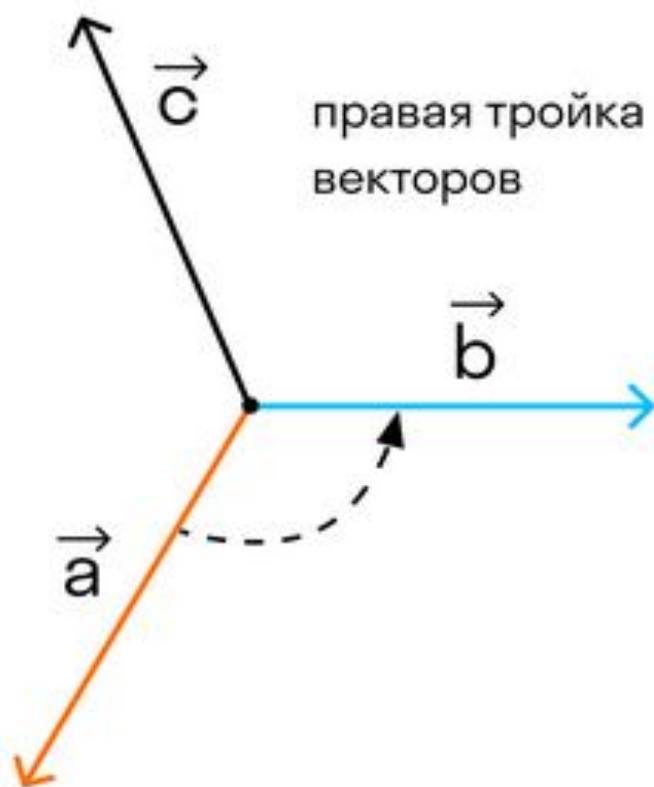
Подготовил: Хусаинов А.  
Закиров А.  
студенты 2-го курса «АПТ» группа  
СТ-2016



# Определение векторного произведения

- Система координат — способ определить положение и перемещение точки или тела с помощью чисел или других символов.
- Координаты — это совокупность чисел, которые определяют положение какого-либо объекта на прямой, плоскости, поверхности или в пространстве. Как найти координаты точки мы рассказали в этой статье.
- Скаляр — это величина, которая полностью определяется в любой координатной системе одним числом или функцией.
- Вектор — направленный отрезок прямой, для которого указано, какая точка является началом, а какая — концом.
- Вектор с началом в точке А и концом в точке В принято обозначать как  $\rightarrow AB$ . Векторы также можно обозначать малыми латинскими буквами со стрелкой или черточкой над ними, вот так:  $\rightarrow a$ .
- Коллинеарность — отношение параллельности векторов. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.
- Проще говоря это «параллельные» векторы. Коллинеарные векторы могут быть одинаково направлены или противоположно направлены.

- Посмотрим с конца вектора  $\vec{c}$  на то, как происходит кратчайший поворот от вектора  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$ . Если кратчайший поворот происходит против часовой стрелки, то тройка векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  называется правой, по часовой стрелке —



- **Векторным произведением** двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , которые заданы в прямоугольной системе координат трехмерного пространства, называется такой вектор  $\vec{c}$ , что:
  - он является нулевым, если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарные;
  - он перпендикулярен и вектору  $\vec{a}$  и вектору  $\vec{b}$ ;

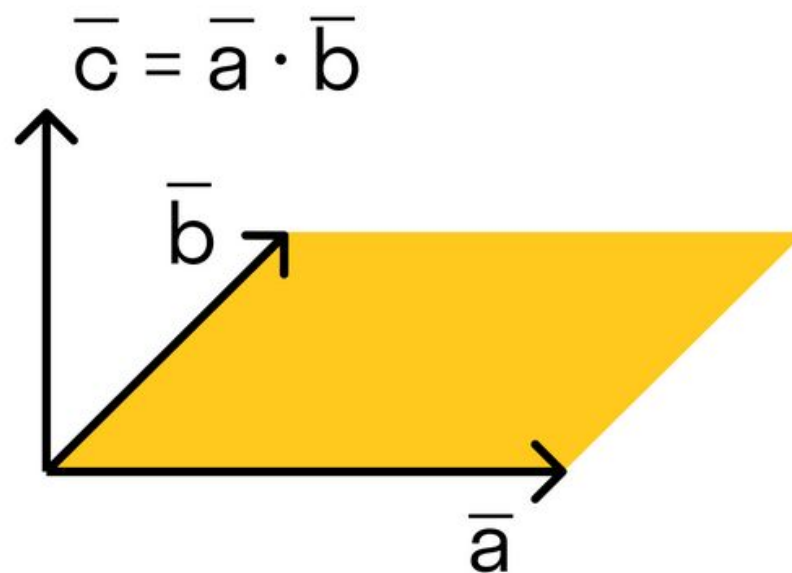
$$\left( \vec{a}, \vec{c} \right) = \left( \vec{b}, \vec{c} \right) = \frac{\pi}{2}$$

- длина векторного произведения равна произведению длин векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на синус угла между ними

$$\left| \vec{c} \right| = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \sin \left( \vec{a}, \vec{b} \right)$$

- тройка векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  ориентирована так же, как и заданная система координат.

- Векторным произведением вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , длина которого численно равна площади параллелограмма построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный так, чтобы наименьшее вращение от  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  вокруг вектора  $\vec{c}$  осуществлялось против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\vec{c}$



- Векторное произведение двух векторов  $a = \{a_x; a_y; a_z\}$  и  $b = \{b_x; b_y; b_z\}$  в декартовой системе координат — это вектор, значение которого можно вычислить, используя формулы вычисления векторного произведения векторов:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = i(a_y b_z - a_z b_y) - j(a_x b_z - a_z b_x) + k(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$a \times b = \{a_y b_z - a_z b_y; a_z b_x - a_x b_z; a_x b_y - a_y b_x\}$$

# Координаты векторного произведения

- Рассмотрим векторное произведение векторов в координатах.
- Сформулируем второе определение векторного произведения, которое позволяет находить его координаты по координатам заданных векторов.

- В прямоугольной системе координат трехмерного пространства  $\vec{a} = (ax, ay, az)$  и  $\vec{b} = (bx, by, bz)$

$$\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y) \cdot \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \cdot \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot \vec{k}$$

- где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , — координатные векторы.
- Это определение показывает нам векторное произведение в координатной форме.
- Векторное произведение удобно представлять в виде определителя квадратной матрицы третьего порядка, первая строка которой есть орты  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , во второй строке находятся координаты вектора  $\vec{a}$ , а в заданной прямоугольной системе

$$\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

- Если разложим этот определитель по элементам первой строки, то получим равенство из определения векторного произведения в координатах:

$$\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =$$

$$= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}$$



# Свойства векторного произведения

- Векторное произведение в координатах представляется в виде определителя матрицы:

$$\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

- На основании свойств определителя можно легко обосновать свойства векторного произведения векторов: 3. Сочетательное свойство

- 1. Антикоммутативность

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$$

$$[\gamma \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}] = \gamma \cdot [\vec{a} \cdot \vec{b}]$$

- 2. Свойство дистрибутивности

$$[(\vec{a}^{(1)} + \vec{a}^{(2)}) \cdot \vec{b}] = [\vec{a}^{(1)} \cdot \vec{b}] + [\vec{a}^{(2)} \cdot \vec{b}]$$







