

Векторное произведение

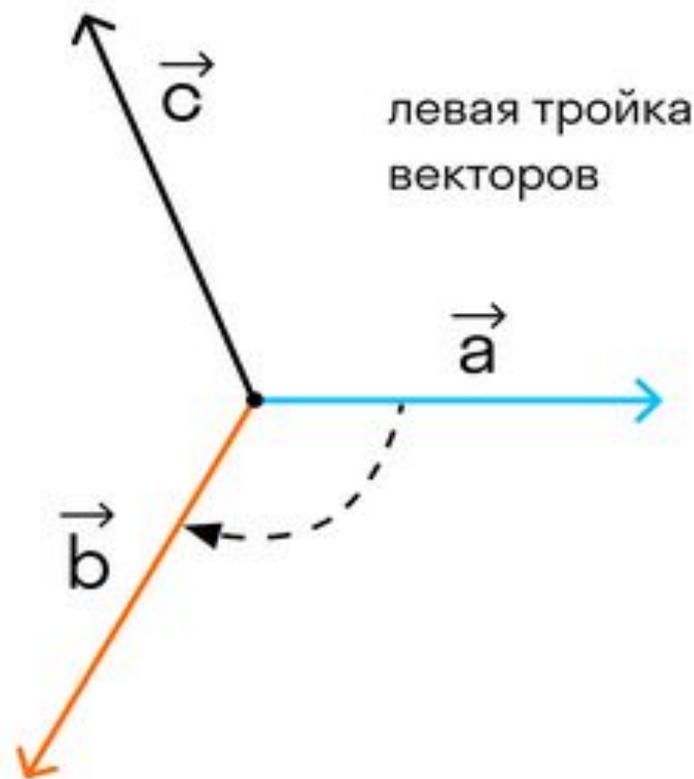
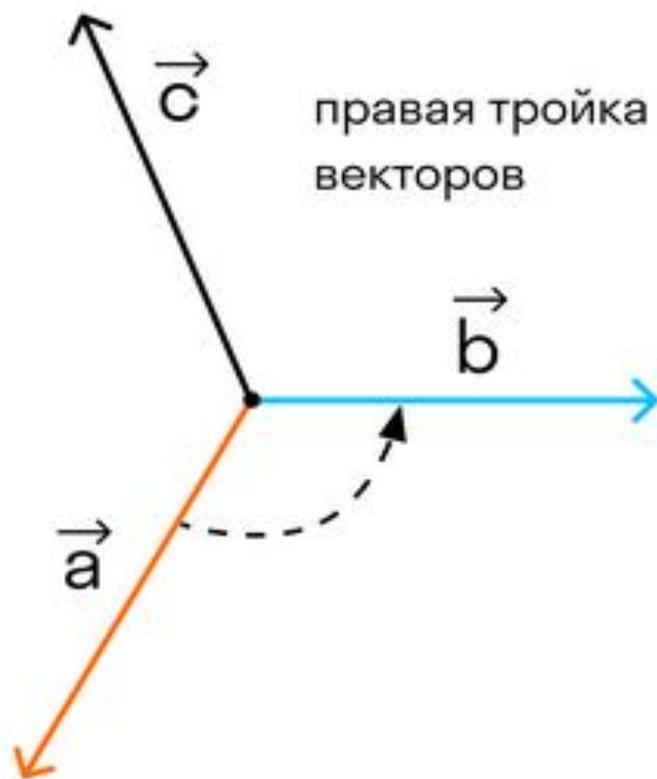
Подготовил: Хусаинов А.
Закиров А.
студенты 2-го курса «АПТ» группа
СТ-2016



Определение векторного произведения

- Система координат — способ определить положение и перемещение точки или тела с помощью чисел или других символов.
- Координаты — это совокупность чисел, которые определяют положение какого-либо объекта на прямой, плоскости, поверхности или в пространстве. Как найти координаты точки мы рассказали в этой статье.
- Скаляр — это величина, которая полностью определяется в любой координатной системе одним числом или функцией.
- Вектор — направленный отрезок прямой, для которого указано, какая точка является началом, а какая — концом.
- Вектор с началом в точке А и концом в точке В принято обозначать как \vec{AB} . Векторы также можно обозначать малыми латинскими буквами со стрелкой или черточкой над ними, вот так: \vec{a} .
- Коллинеарность — отношение параллельности векторов. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.
- Проще говоря это «параллельные» векторы. Коллинеарные векторы могут быть одинаково направлены или противоположно направлены.

- Посмотрим с конца вектора \vec{c} на то, как происходит кратчайший поворот от вектора \vec{a} к \vec{b} . Если кратчайший поворот происходит против часовой стрелки, то тройка векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} называется правой, по часовой стрелке —



- **Векторным произведением** двух векторов \vec{a} и \vec{b} , которые заданы в прямоугольной системе координат трехмерного пространства, называется такой вектор \vec{c} , что:
 - он является нулевым, если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарные;
 - он перпендикулярен и вектору \vec{a} и вектору \vec{b} ;

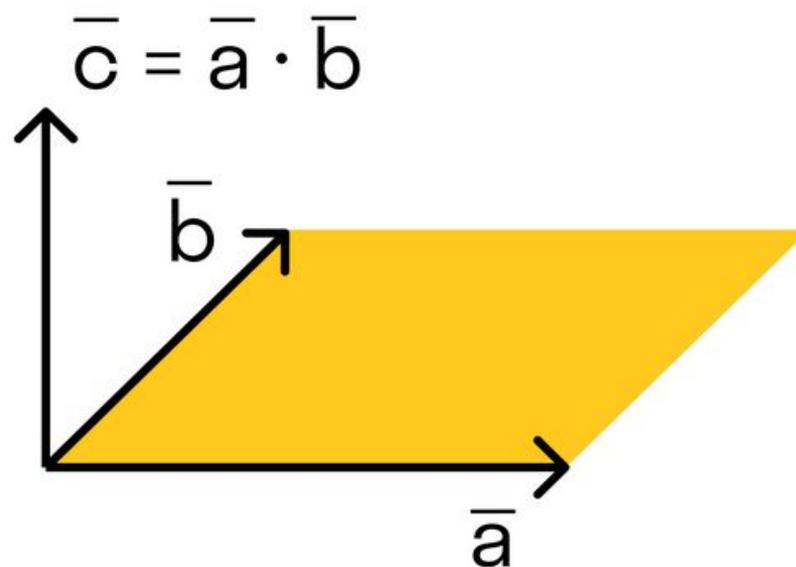
$$\left(\vec{a}, \vec{c} \right) = \left(\vec{b}, \vec{c} \right) = \frac{\pi}{2}$$

- длина векторного произведения равна произведению длин векторов \vec{a} и \vec{b} на синус угла между ними

$$\left| \vec{c} \right| = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \sin \left(\vec{a}, \vec{b} \right)$$

- тройка векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ориентирована так же, как и заданная система координат.

- Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор \vec{c} , длина которого численно равна площади параллелограмма построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный так, чтобы наименьшее вращение от \vec{a} к \vec{b} вокруг вектора \vec{c} осуществлялось против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \vec{c}



- Векторное произведение двух векторов $\mathbf{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\mathbf{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ в декартовой системе координат — это вектор, значение которого можно вычислить, используя формулы вычисления векторного произведения векторов:

$$\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \mathbf{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \{a_y b_z - a_z b_y; a_z b_x - a_x b_z; a_x b_y - a_y b_x\}$$

Координаты векторного произведения

- Рассмотрим векторное произведение векторов в координатах.
- Сформулируем второе определение векторного произведения, которое позволяет находить его координаты по координатам заданных векторов.

- В прямоугольной системе координат трехмерного пространства $\vec{a} = (ax, ay, az)$ и $\vec{b} = (bx, by, bz)$

$$\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y) \cdot \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \cdot \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot \vec{k}$$

- где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, — координатные векторы.
- Это определение показывает нам векторное произведение в координатной форме.
- Векторное произведение удобно представлять в виде определителя квадратной матрицы третьего порядка, первая строка которой есть орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, во второй строке находятся координаты вектора \vec{a} , а в заданной прямоугольной системе

$$\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

- Если разложим этот определитель по элементам первой строки, то получим равенство из определения векторного произведения в координатах:

$$\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =$$

$$= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}$$

Свойства векторного произведения

- Векторное произведение в координатах представляется в виде определителя матрицы:

$$\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

- На основании свойств определителя можно легко обосновать свойства векторного произведения векторов: 3. Сочетательное свойство

- 1. Антикоммутативность

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$$

$$[\gamma \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}] = \gamma \cdot [\vec{a} \cdot \vec{b}]$$

- 2. Свойство дистрибутивности

$$[(\vec{a}^{(1)} + \vec{a}^{(2)}) \cdot \vec{b}] = [\vec{a}^{(1)} \cdot \vec{b}] + [\vec{a}^{(2)} \cdot \vec{b}]$$







