

# Задание 13

## Уравнения

1. Иррациональные уравнения
2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители
3. Логарифмические и показательные уравнения
4. Тригонометрические уравнения
5. Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ
6. Уравнения смешанного типа

## 1. Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

# 1. Иррациональные уравнения

Решите уравнение:  $\sqrt{x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 1} = \sqrt{x^4 + 2x^2}$ .

а) Решите уравнение:  $x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$ .

Решите уравнение:  $\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} - 7\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} = 6$ .

а) Решите уравнение  $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$ .

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$ .

# 1. Иррациональные уравнения

Решите уравнение:  $\sqrt{2x^2 + 2x - 1} = -x - 1$ .

а) Решите уравнение  $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 9} - 3 = x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{5}\right]$ .

## 2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

1.  $\sin(t) = a$

$$\begin{cases} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

2.  $\cos(t) = a$

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

3.  $\operatorname{Tg}(t) = a$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in Z$$

4.  $\operatorname{Ctg}(t) = a$

$$t = \operatorname{arccotg} a + \pi k, k \in Z$$

## 2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

$$\arcsin (-a) = -\arcsin (a)$$

$$\arccos (-a) = \pi - \arccos (a)$$

$$\operatorname{arctg} (-a) = -\operatorname{arctg} (a)$$

$$\operatorname{arcctg} (-a) = -\operatorname{arcctg} (a)$$

## 2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение  $2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ .

а) Решите уравнение  $\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

## 2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение  $\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \cos x + \sqrt{2}$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \pi; \frac{5\pi}{2} \right]$ .

Дано уравнение  $\cos \left( \frac{3\pi}{2} + 2x \right) = \cos x$ .

а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$ .

## 2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение  $\cos 2x - \sqrt{2} \cos \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) - 1 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$ .

а) Решите уравнение  $\cos^2(\pi - x) - \sin \left( x + \frac{3\pi}{2} \right) = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$ .

## 2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение  $2\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 2\cos^3 x$ .

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ .

## 2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение:  $2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos x$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$ .

а) Решите уравнение  $2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 0$ .

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$ .

### 3. Логарифмические показательные уравнения

Уравнение вида  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$   
равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

### 3. Логарифмические показательные уравнения

а) Решите уравнение  $\log_5(2-x) = \log_{25} x^4$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$ .

а) Решите уравнение  $\log_2(x^2 - 14x) = 5$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\log_3 0,1; 5\sqrt{10}\right]$ .

### 3. Логарифмические показательные уравнения

а) Решите уравнение  $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left(1, \frac{7}{3}\right)$ .

### 3. Логарифмические показательные уравнения

а) Решите уравнение:  $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$ .

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку  $[2; \sqrt{10}]$ .

а) Решите уравнение  $\log_7(x+2) = \log_{49}(x^4)$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\log_6 \frac{1}{7}; \log_6 35\right]$ .

#### 4. Тригонометрические уравнения

а) Решите уравнение  $\cos 2x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $[-2\pi; -\pi]$ .

а) Решите уравнение  $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-2\pi; -\pi]$ .

а) Решите уравнение  $\cos 2x + \sin^2 x = 0,5$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$ .

## 4. Тригонометрические уравнения

а) Решите уравнение  $\cos 2x + \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{2} + x \right) + 1 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[2\pi; 3,5\pi]$ .

а) Решите уравнение  $6 \cos^2 x + 5\sqrt{2} \sin x + 2 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \pi; \frac{5\pi}{2} \right]$ .

а) Решите уравнение  $\sqrt{3} \operatorname{tg}(7\pi - 2x) = -1$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$ .

## 5. Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ

а) Решите уравнение  $(2 \sin x + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\cos x} = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

Решите уравнение  $\frac{(\sin x - 1)(2 \cos x + 1)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$ .

а) Решите уравнение  $(\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{13 \cos x} = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ .

## 5. Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ

а) Решите уравнение  $\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

а) Решите уравнение  $2 \sin x + \sqrt{2} \operatorname{tg} x = 0$ .

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку  $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ .

## 6. Уравнения смешанного типа

а) Решите уравнение  $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$ .

а) Решите уравнение  $\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x} = 2$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$ .

а) Решите уравнение  $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-3\pi, -2\pi]$ .

а) Решите уравнение  $2^{4\cos x} + 3 \cdot 2^{2\cos x} - 10 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку  $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$ .

## 6. Уравнения смешанного типа

а) Решите уравнение  $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$ .

а) Решите уравнение  $(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

## Домашнее задание

Решите уравнение:  $\sqrt{2x^2 - 5x + 12} + 2x^2 = 5x$ .

$$\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2.$$

а) Решите уравнение  $2 \sin^2 \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) = \sqrt{3} \cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[ -\frac{7\pi}{2}, -2\pi \right]$ .

а) Решите уравнение  $\cos 2x = 1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[ -\frac{5\pi}{2}, -\pi \right)$ .

## Домашнее задание

а) Решите уравнение:  $\sin x + 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1$

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку  $\left[ -\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$ .

---

а) Решите уравнение  $\sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos x + \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \sin x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -5\pi; -\frac{7\pi}{2} \right]$ .

а) Решите уравнение  $2 \cos^2 \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) = \sqrt{3} \sin x$ .

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку  $\left[ -3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$ .

## Домашнее задание

а) Решите уравнение  $27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\log_3 4; \log_3 10]$ .

а) Решите уравнение  $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

а) Решите уравнение  $(\operatorname{tg}^2 x - 3)\sqrt{11 \cos x} = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .