Задание 13

Уравнения

1. Иррациональные уравнения
2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители
3. Логарифмические и показательные уравнения
4. Тригонометрические уравнения
5. Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ
6. Уравнения смешанного типа

1. Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Иррациональные уравнения

Решите уравнение: $\sqrt{x^4+8x^3+2x^2-1}=\sqrt{x^4+2x^2}$.

а) Решите уравнение: $x-3\sqrt{x-1}+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3};\sqrt{20}]$.

Решите уравнение: $\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}-7\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}=6$.

а) Решите уравнение $\sqrt{x^3-4x^2-10x+29}=3-x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\sqrt{3};\ \sqrt{30}]$.

1. Иррациональные уравнения

Решите уравнение: $\sqrt{2x^2+2x-1}=-x-1$.

а) Решите уравнение $\sqrt{x^3+4x^2+9}-3=x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{2};\frac{7}{5}\right]$.

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

1. Sin (t) = a

$$\left[\begin{array}{l} t = arcsin\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - arcsin\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

2. Cos (t) = a

$$\left[\begin{array}{l} t = arccos\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = -arccos\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

3. Tg (t) = a

$$\boxed{t = \mathrm{arctg}\ \boldsymbol{a} + \pi k,\ k \in Z}$$

4. Ctg (t) = a

$$\boxed{t = \mathrm{arcctg}\ \boldsymbol{a} + \pi k,\ k \in Z}$$

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

arcsin (-a) = - arcsin (a)
acrcos (-a) = Pi – arccos (a)
arctg (-a) = - arctg (a)
arcctg (-a) = - arcctg (a)

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение $\sin 2x+\sqrt{3}\sin x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$.

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$.

а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

а) Решите уравнение $\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение $2\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 2\cos^3 x$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение: $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

3. Логарифмические показательные уравнения

Уравнение вида $log_a f(x) = log_a g(x)$ равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

3. Логарифмические показательные уравнения

а) Решите уравнение $\log_5(2-x) = \log_{25} x^4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82};\ \log_9 8\right]$.

а) Решите уравнение $\log_2\left(x^2 - 14x\right) = 5$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 0,1;\ 5\sqrt{10}\right]$.

3. Логарифмические показательные уравнения

а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

3. Логарифмические показательные уравнения

а) Решите уравнение: $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[2; \sqrt{10}]$.

а) Решите уравнение $\log_7(x+2) = \log_{49}(x^4)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_6 \frac{1}{7};\ \log_6 35\right]$.

4. Тригонометрические уравнения

а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\pi]$.

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$.

4. Тригонометрические уравнения

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3,5\pi]$.

а) Решите уравнение $6\cos^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(7\pi - 2x) = -1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

5. Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ

а) Решите уравнение $(2\sin x+\sqrt{3})\cdot\sqrt{\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решите уравнение $\frac{(\sin x-1)(2\cos x+1)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0$.

а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x-1)\sqrt{13\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

5. Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ

а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

а) Решите уравнение $2\sin x + \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x = 0.$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

6. Уравнения смешанного типа

а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение $\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi, -2\pi]$.

а) Решите уравнение $2^{4\cos x} + 3 \cdot 2^{2\cos x} - 10 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

6. Уравнения смешанного типа

а) Решите уравнение $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$.

а) Решите уравнение $(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Домашнее задание

Решите уравнение: $\sqrt{2x^2-5x+12}+2x^2=5x$.

$$\sqrt{4+2x-x^2}=x-2.$$

а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2},-2\pi\right]$.

а) Решите уравнение $\cos 2x=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2},-\pi\right)$.

Домашнее задание

а) Решите уравнение: $\sin x + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin 2x + 1$

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

а) Решите уравнение $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Домашнее задание

а) Решите уравнение $27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4;\ \log_3 10]$.

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение $(\mathrm{tg}^2 x - 3)\sqrt{11\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.