

Задание 13

Уравнения

1. Иррациональные уравнения
2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители
3. Логарифмические и показательные уравнения
4. Тригонометрические уравнения
5. Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ
6. Уравнения смешанного типа

1. Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

1. Иррациональные уравнения

Решите уравнение: $\sqrt{x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 1} = \sqrt{x^4 + 2x^2}$.

а) Решите уравнение: $x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$.

Решите уравнение: $\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} - 7\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} = 6$.

а) Решите уравнение $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$.

1. Иррациональные уравнения

Решите уравнение: $\sqrt{2x^2 + 2x - 1} = -x - 1$.

а) Решите уравнение $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 9} - 3 = x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{5}\right]$.

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

1. $\sin(t) = a$

$$\begin{cases} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

2. $\cos(t) = a$

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

3. $\operatorname{Tg}(t) = a$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in Z$$

4. $\operatorname{Ctg}(t) = a$

$$t = \operatorname{arccotg} a + \pi k, k \in Z$$

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

$$\arcsin (-a) = -\arcsin (a)$$

$$\arccos (-a) = \pi - \arccos (a)$$

$$\operatorname{arctg} (-a) = -\operatorname{arctg} (a)$$

$$\operatorname{arcctg} (-a) = -\operatorname{arcctg} (a)$$

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение $2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \cos x + \sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Дано уравнение $\cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2x \right) = \cos x$.

а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2} \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

а) Решите уравнение $\cos^2(\pi - x) - \sin \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение $2\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 2\cos^3 x$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

2. Тригонометрические уравнения, разложение на множители

а) Решите уравнение: $2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$.

а) Решите уравнение $2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 0$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

3. Логарифмические показательные уравнения

Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$
равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

3. Логарифмические показательные уравнения

а) Решите уравнение $\log_5(2-x) = \log_{25} x^4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$.

а) Решите уравнение $\log_2(x^2 - 14x) = 5$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 0,1; 5\sqrt{10}\right]$.

3. Логарифмические показательные уравнения

а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

3. Логарифмические показательные уравнения

а) Решите уравнение: $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[2; \sqrt{10}]$.

а) Решите уравнение $\log_7(x+2) = \log_{49}(x^4)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_6 \frac{1}{7}; \log_6 35\right]$.

4. Тригонометрические уравнения

а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$.

4. Тригонометрические уравнения

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3,5\pi]$.

а) Решите уравнение $6 \cos^2 x + 5\sqrt{2} \sin x + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

а) Решите уравнение $\sqrt{3} \operatorname{tg}(7\pi - 2x) = -1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$.

5. Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ

а) Решите уравнение $(2 \sin x + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решите уравнение $\frac{(\sin x - 1)(2 \cos x + 1)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$.

а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{13 \cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

5. Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ

а) Решите уравнение $\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

а) Решите уравнение $2 \sin x + \sqrt{2} \operatorname{tg} x = 0$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

6. Уравнения смешанного типа

а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение $\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x} = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi, -2\pi]$.

а) Решите уравнение $2^{4\cos x} + 3 \cdot 2^{2\cos x} - 10 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

6. Уравнения смешанного типа

а) Решите уравнение $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$.

а) Решите уравнение $(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Домашнее задание

Решите уравнение: $\sqrt{2x^2 - 5x + 12} + 2x^2 = 5x$.

$$\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2.$$

а) Решите уравнение $2 \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = \sqrt{3} \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi \right]$.

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi \right)$.

Домашнее задание

а) Решите уравнение: $\sin x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1$

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$.

а) Решите уравнение $\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos x + \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2} \right]$.

а) Решите уравнение $2 \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = \sqrt{3} \sin x$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

Домашнее задание

а) Решите уравнение $27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4; \log_3 10]$.

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - 3)\sqrt{11 \cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.