

**Курс лекций по  
дисциплине  
«СТАТИСТИЧЕСКАЯ  
РАДИОТЕХНИКА»**

**Лектор - Куроедов Сергей  
Константинович**

**Лекция 6**

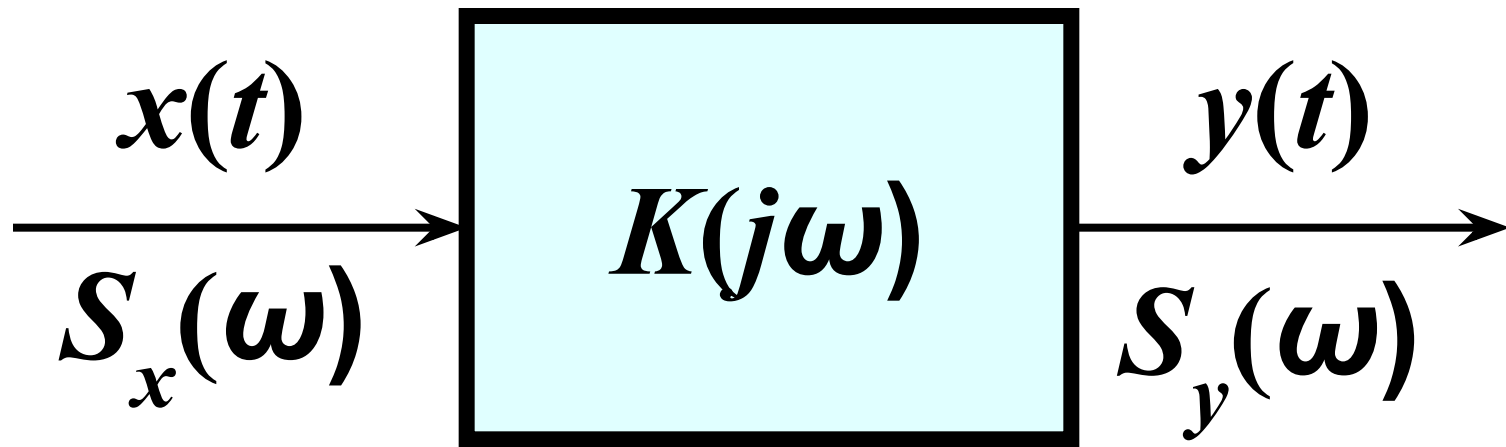
## ПЛАН ЛЕКЦИИ 6

- 1. Спектральный метод анализа прохождения стационарного случайного процесса через линейную цепь**
- 2. Корреляционная характеристика цепи, корреляционный метод анализа прохождения стационарного случайного процесса через линейную цепь**
- 3. Дифференцирование случайных процессов**
- 4. Интегрирование случайных процессов**
- 5. Источники шумов в радиотехнических цепях**
- 6. Корреляционный метод анализа прохождения случайного процесса через линейную нестационарную цепь**

## ПЛАН ЛЕКЦИИ 4

7. Характеристики безынерционной нестационарной цепи
8. Анализ прохождения детерминированного сигнала через безынерционную цепь со случайным коэффициентом передачи
9. Анализ прохождения случайного процесса через безынерционную параметрическую цепь и цепь со случайным коэффициентом передачи
10. Преобразование закона распределения случайного процесса в нелинейной безынерционной цепи
11. Корреляционный метод анализа прохождения случайного процесса через нелинейную цепь

# СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЦЕПЯХ



**Реализация выходного процесса:**

$$y(t) \leftrightarrow S_y(\omega) = K(j\omega)S_x(\omega)$$

## Спектр мощность выходного процесса:

$$W_y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{|K(j\omega)S_x(\omega)|^2} =$$

$$= |K(j\omega)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{|S_x(\omega)|^2}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{|S_x(\omega)|^2} = W_x(\omega), \quad |K(j\omega)|^2 = K_P(\omega)$$

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПРОХОЖДЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ЦЕПИ

$$W_y(\omega) = K_P(\omega)W_x(\omega)$$

***Корреляционная характеристика цепи*** – автокорреляционная функция импульсной характеристики цепи

$$R_h(\tau) = (h, h_\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t-\tau)dt$$

$$h(t) \leftrightarrow K(j\omega), h(t-\tau) \leftrightarrow K(j\omega)e^{-j\omega\tau}$$

# СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕДАЧИ МОЩНОСТИ И КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПИ

$$\begin{aligned} R_h(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) [K(j\omega)e^{-j\omega\tau}]^* d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)K^*(j\omega)e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_p(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned}$$

$$R_h(\tau) \leftrightarrow K_p(\omega)$$

**Корреляционная характеристика** и **коэффициент передачи мощности цепи** связаны парой преобразований Фурье

# КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПРОХОЖДЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ЦЕПИ

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_p(\omega) W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$K_p(\omega) \leftrightarrow R_h(\tau), W_y(\omega) \leftrightarrow R_x(\tau)$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\xi) R_h(\tau - \xi) d\xi = R_x(\tau) * R_h(\tau)$$

**Функция корреляции выходного процесса**  
**определяется сверткой функции корреляции**  
**входного процесса и корреляционной**  
**характеристики цепи**



# ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Математическое ожидание:

$$m_y = \overline{y(t)} = \overline{\frac{dx(t)}{dt}} = 0$$

Функция корреляции выходного процесса:

$$m_x = 0$$

$$R_y(\tau) = \overline{y(t)y(t+\tau)}$$

# ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ РЕЗУЛЬТАТА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

$$R_y(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \cdot \frac{x(t + \tau + \Delta t) - x(t + \tau)}{\Delta t} \right] =$$
$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2R_x(\tau) - R_x(\tau - \Delta t) - R_x(\tau + \Delta t)}{\Delta t^2} = -R_x''(\tau)$$

**Дисперсия:**  $\sigma_y^2 = R_y(0) = R_x''(0)$

**Спектр**  $R_x(\tau) \leftrightarrow W_x(\omega)$

**МОЩНОСТИ:**  $R_y(\tau) = R_x''(\tau) \leftrightarrow -(j\omega)^2 W_x(\omega)$

# СПЕКТР МОЩНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

$$W_y(\omega) = \omega^2 W_x(\omega)$$

**Условие дифференцируемости  
случайного процесса:**

$$R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_x(\omega) d\omega \neq \infty$$

# ФУНКЦИЯ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ВХОДНОГО И ВЫХОДНОГО ПРОЦЕССОВ

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t) \frac{dx(t+\tau)}{d\tau}} = \frac{d}{d\tau} \overline{x(t)x(t+\tau)}$$

$$R_{xy}(\tau) = R'_x(\tau)$$

**Некоррелированность входного и  
выходного процессов:**

$$R_{xy}(0) = R'_x(0) = 0$$

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

$$y(t) = \int_0^t x(\xi) d\xi$$

**Математическое ожидание:**

$$m_x \neq 0, m_y = \int_0^t \overline{x(\xi)} d\xi = m_x t$$

**Выходной процесс при не центрированном стационарном процессе на входе не является стационарным**

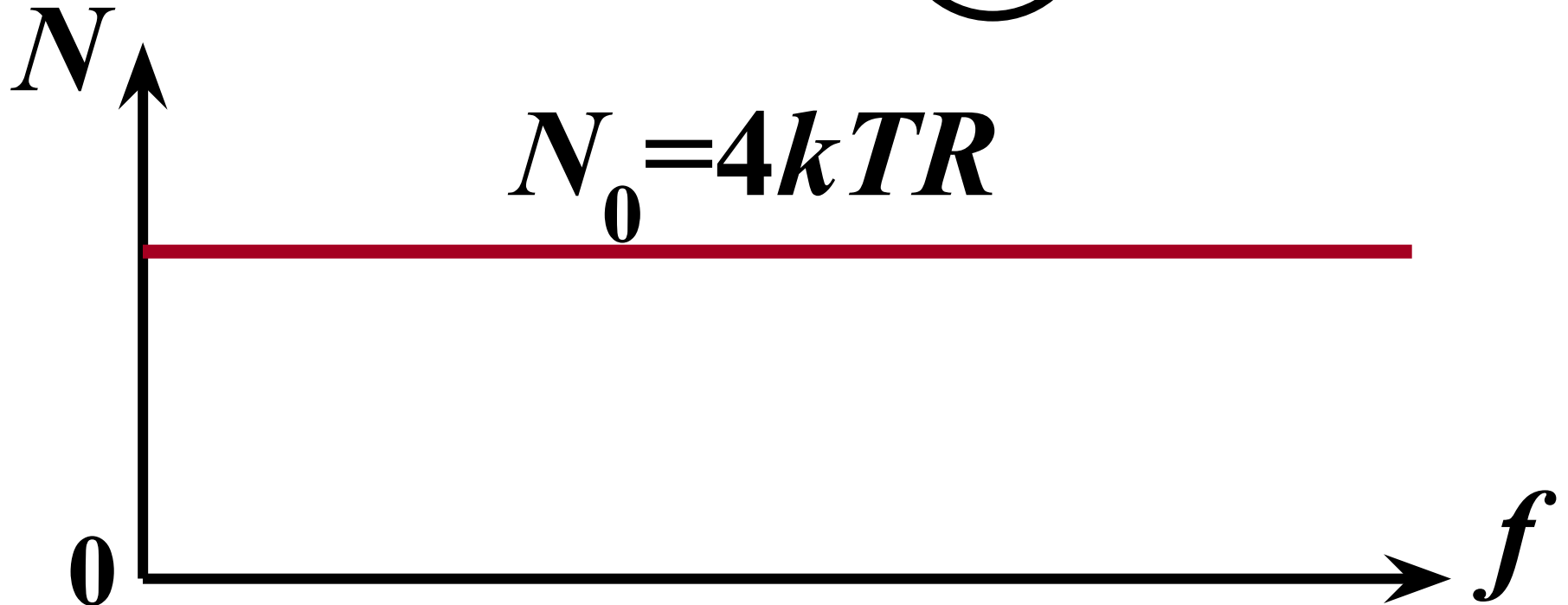
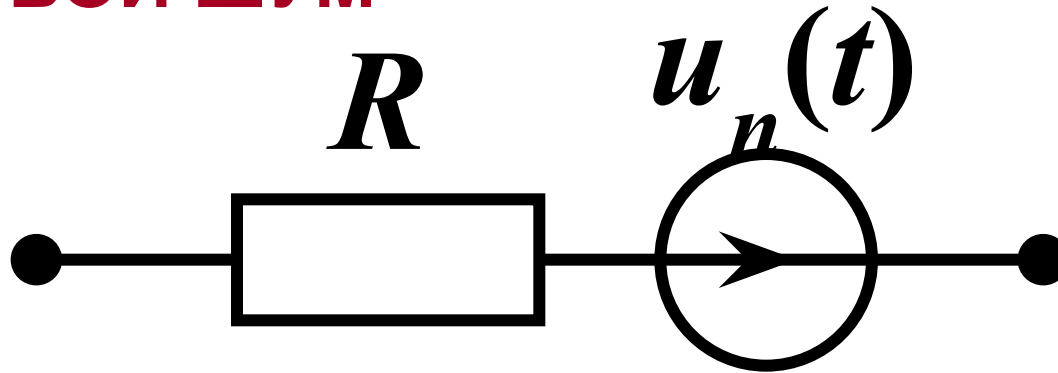
# ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ РЕЗУЛЬТАТА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$m_x = 0, R_y(t_1, t_2) = \overline{\int_0^{t_1} x(\xi) d\xi \int_0^{t_2} x(\eta) d\eta} =$$
$$= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \overline{x(\xi) x(\eta)} d\xi d\eta = \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} R_x(\xi - \eta) d\xi d\eta$$

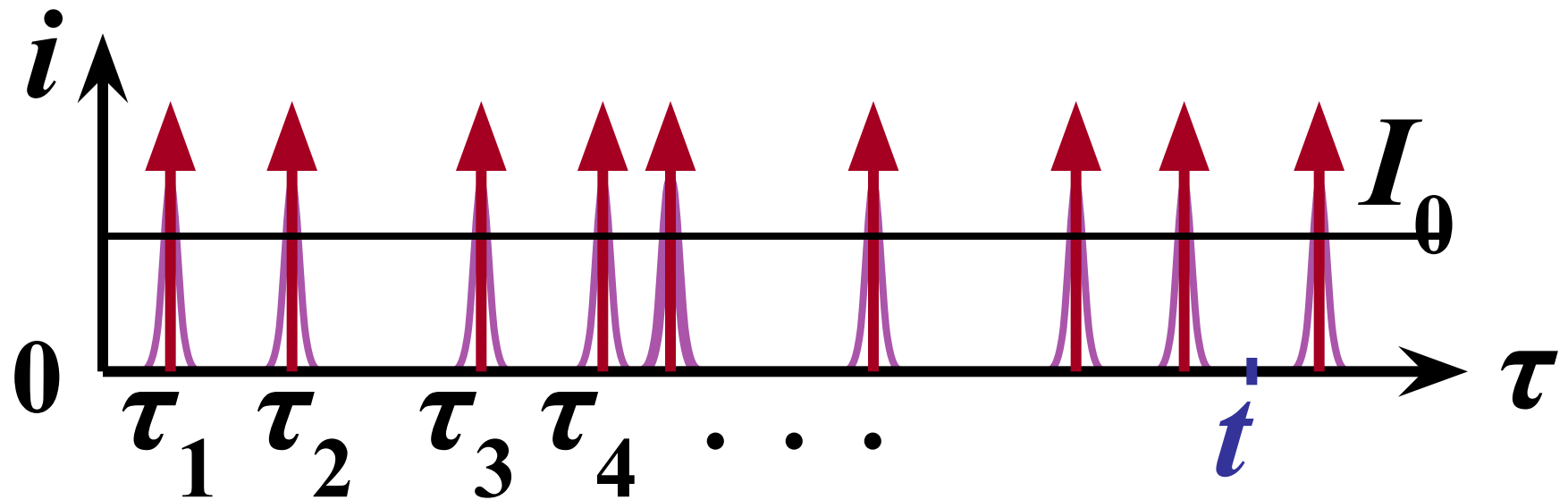
**Выходной процесс при центрированном стационарном процессе на входе не является стационарным**

# ИСТОЧНИКИ ШУМОВ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

## 1. ТЕПЛОВОЙ ШУМ



## 2. ДРОБОВОЙ ШУМ



Распределение Пуассона:

$$P_n = \frac{(vt)^n}{n!} e^{-vt}$$



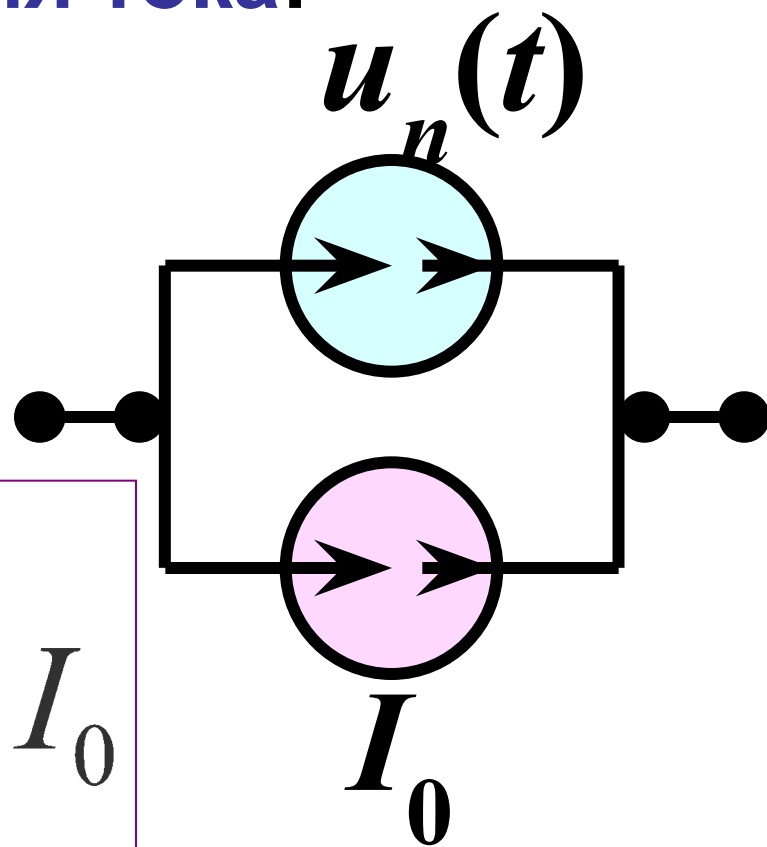
## Моменты распределения Пуассона:

$$\bar{n}_T = \nu T, \overline{n_T^2} = \nu T + (\nu T)^2, \sigma_n^2 = \nu T$$

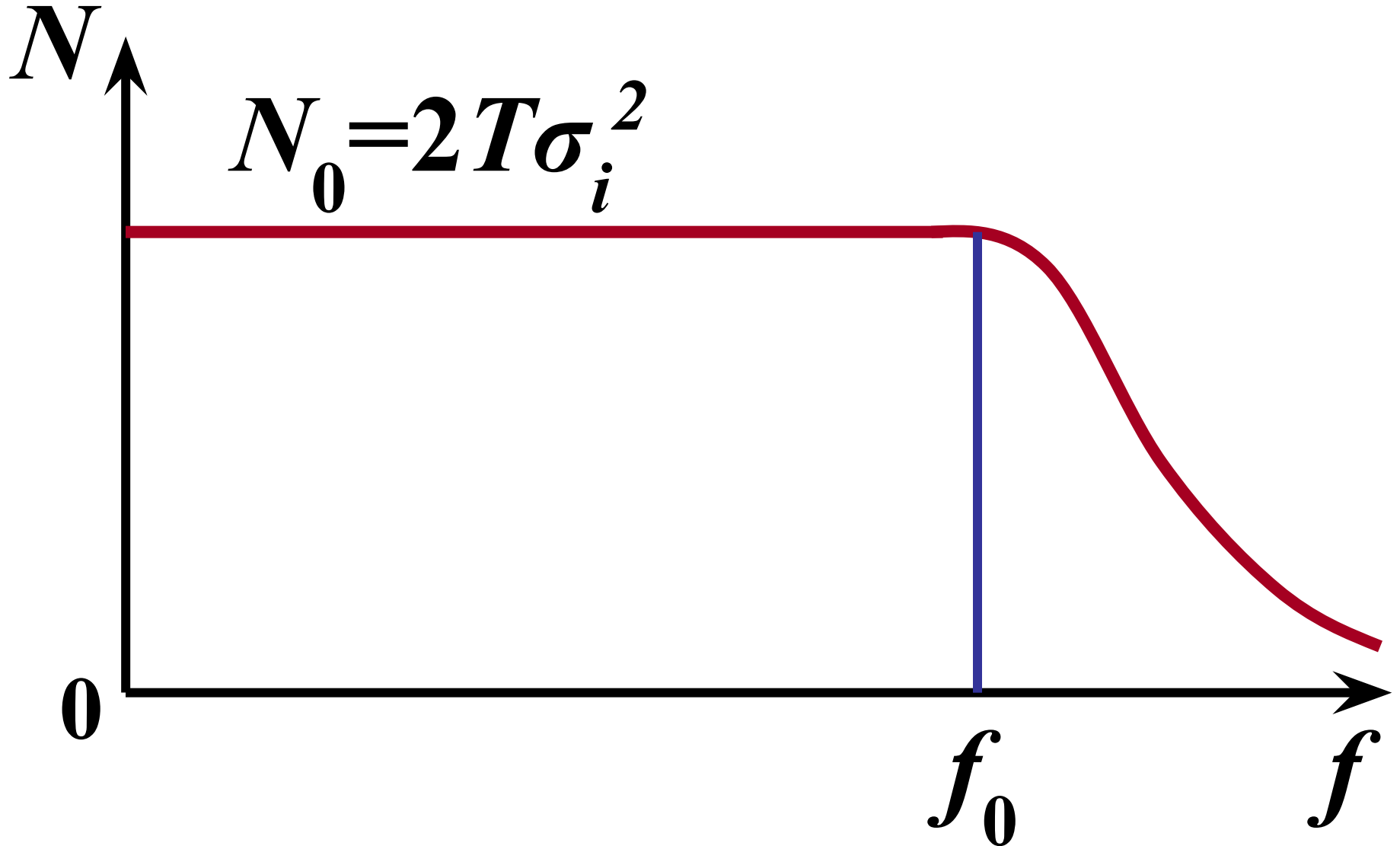
## Средний ток и дисперсия тока:

$$I_0 = \frac{\bar{n}_T e}{T} = \nu e$$

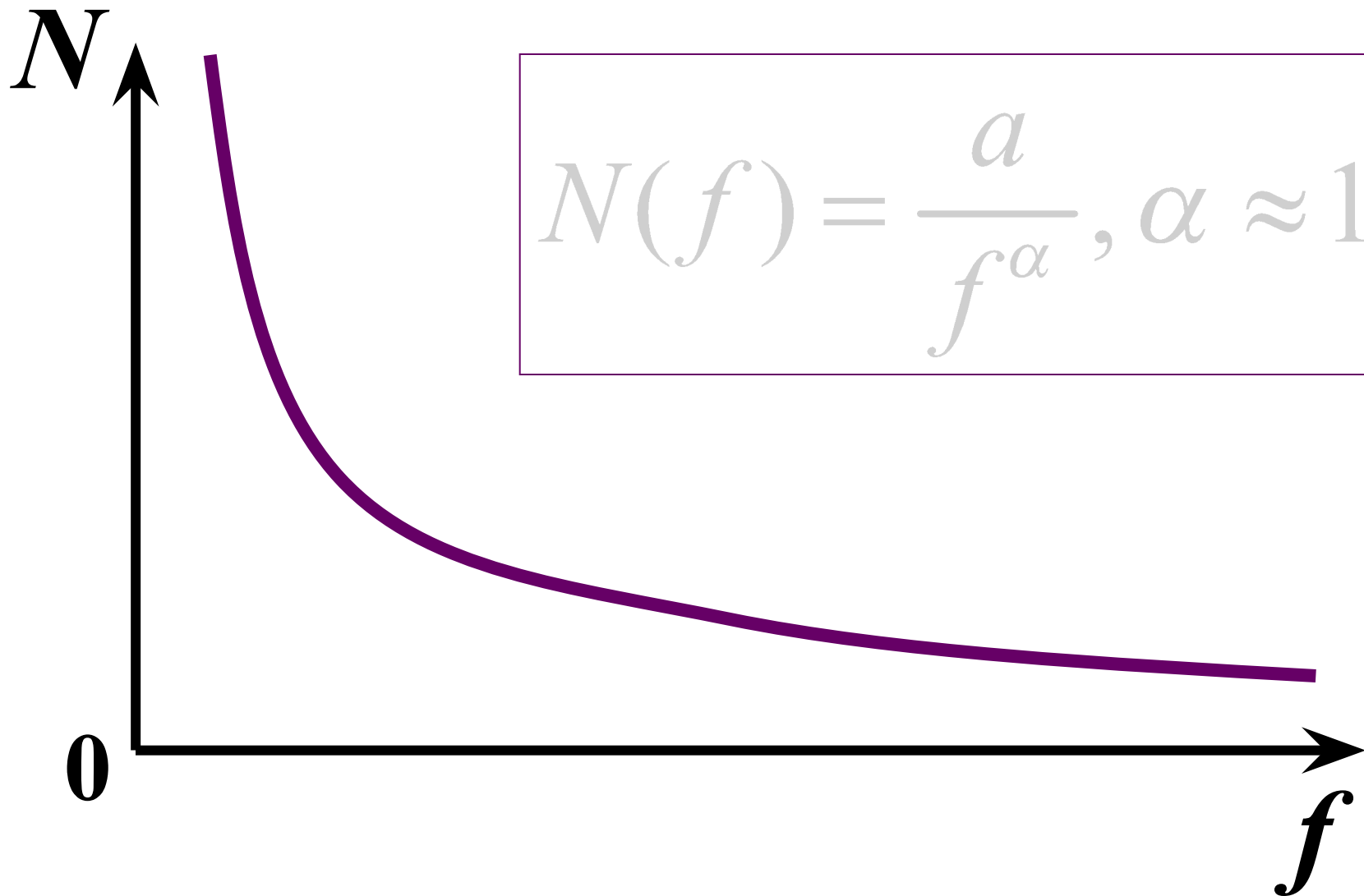
$$\sigma_i^2 = \frac{e^2}{T^2} \sigma_n^2 = \frac{e}{T} I_0$$



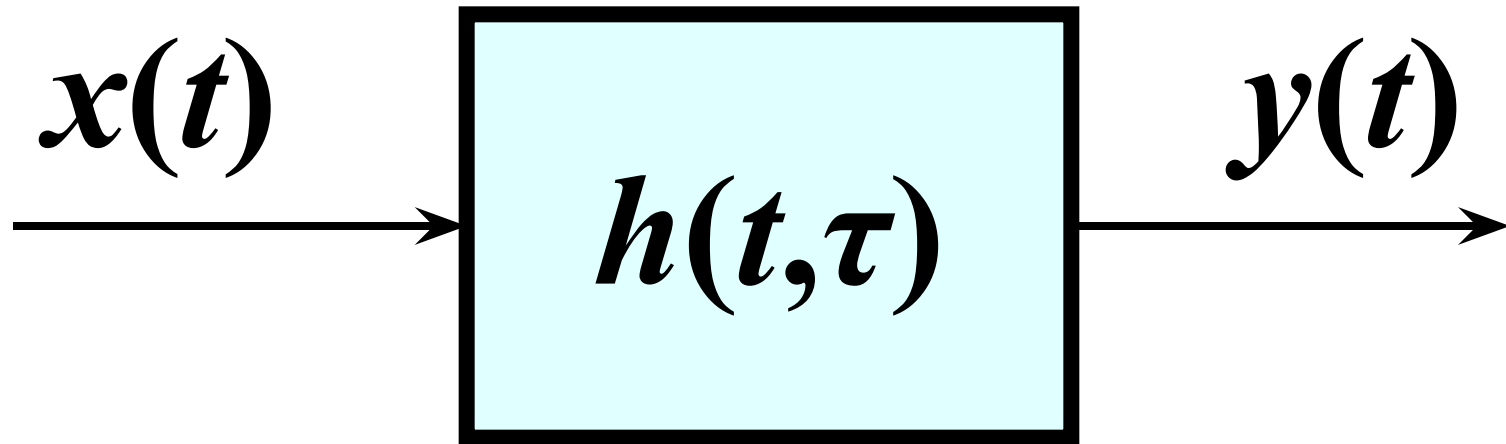
# СПЕКТР МОЩНОСТИ ДРОБОВОГО ШУМА



### 3. ФЛИККЕР-ШУМ



# СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЦЕПЯХ



**Реализация выходного процесса:**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty(t)} h(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

## ФУНКЦИЯ КОВАРИАЦИИ ВЫХОДНОГО ПРОЦЕССА

$$B_y(t_1, t_2) = \overline{y(t_1)y(t_2)} =$$

---

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, \tau_1) x(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2, \tau_2) x(\tau_2) d\tau_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(t_1, \tau_1) h(t_2, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2$$

# Функция ковариации выходного процесса при независимых $x(t)$ и $h(t, \tau)$

$$B_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) B_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

## Ковариационная характеристика цепи

$$K(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) = \overline{h(t_1, \tau_1)h(t_2, \tau_2)}$$

## Функция ковариации входного процесса

$$B_x(\tau_1, \tau_2) = \overline{x(\tau_1)x(\tau_2)}$$

# Безынерционная нестационарная цепь

$$y(t_0) = L[x(t_0)], h(t, \tau) = k(t)\delta(t - \tau)$$

$$B_y(t_1, t_2) = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} k(t_1)\delta(t_1 - \tau_1)x(\tau_1)d\tau_1 \cdot}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} k(t_2)\delta(t_2 - \tau_2)x(\tau_2)d\tau_2 = K(t_1, t_2)B_x(t_1, t_2)$$

$$K(t_1, t_2) = \overline{k(t_1)k(t_2)}$$

**Ковариационная характеристика безынерционной цепи**

**Функция ковариации выходного процесса безынерционной нестационарной цепи равна произведению ковариационной характеристики цепи и функции ковариации входного процесса при условии, что данная функция и импульсная характеристика цепи являются статистически независимыми**



# Прохождение гармонического сигнала

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

через безынерционную цепь с  
флуктуирующим коэффициентом  
передачи

$$K(t, j\omega) = k_0 + \Delta k(t)$$

Функция ковариации постоянной  
составляющей  $k_0$

$$B_0(\tau) = k_0^2 \leftrightarrow 2\pi k_0^2 \delta(\omega)$$

# Функция ковариации флуктуационной составляющей $\Delta k(t)$

$$B_{\Delta}(\tau) = \frac{c}{a} e^{-a|\tau|} \leftrightarrow \frac{2c}{a^2 + \omega^2}$$

## Спектр мощности коэффициента передачи

$$W_K(\omega) = 2\pi k_0^2 \delta(\omega) + \frac{2c}{a^2 + \omega^2}$$

# Ковариационная характеристика цепи

$$K(\tau) = F^{-1} [W_K(\omega)] = k_0^2 + \frac{c}{a} e^{-a|\tau|}$$

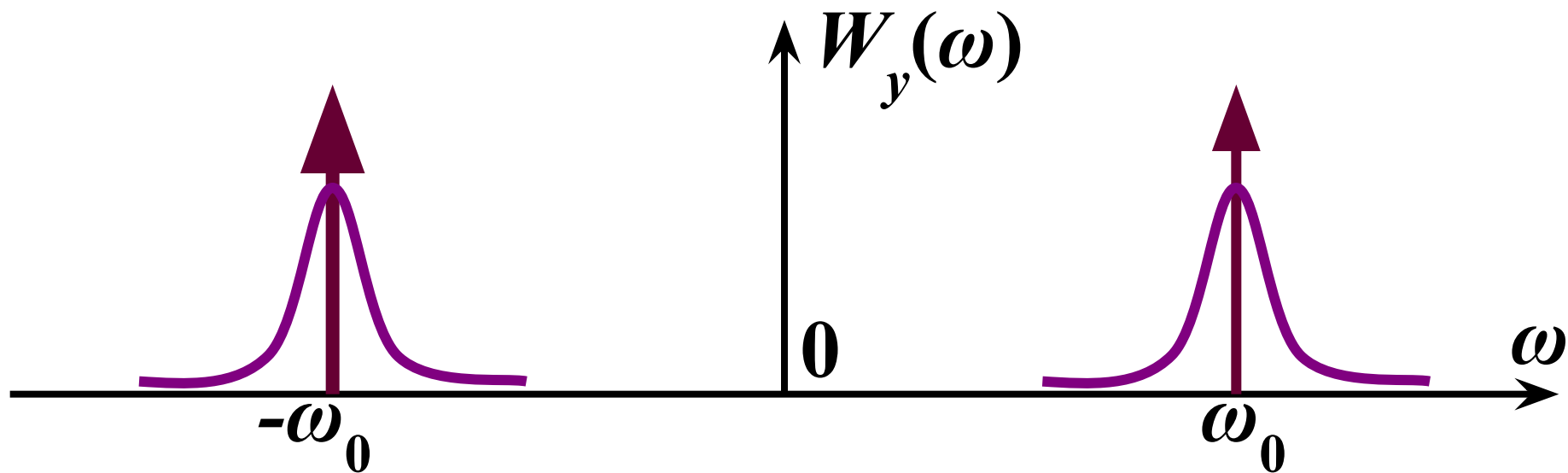
## Функции ковариации входного и выходного процессов

$$B_x(\tau) = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau$$

$$B_y(\tau) = K(\tau)B_x(\tau) = \frac{1}{2} \left( k_0^2 + \frac{c}{a} e^{-a|\tau|} \right) \cos \omega_0 \tau$$

# Спектр мощности выходного процесса

$$W_y(\omega) = \frac{\pi}{2} k_0^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] +$$
$$+ \frac{c}{2} \left[ \frac{1}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$$



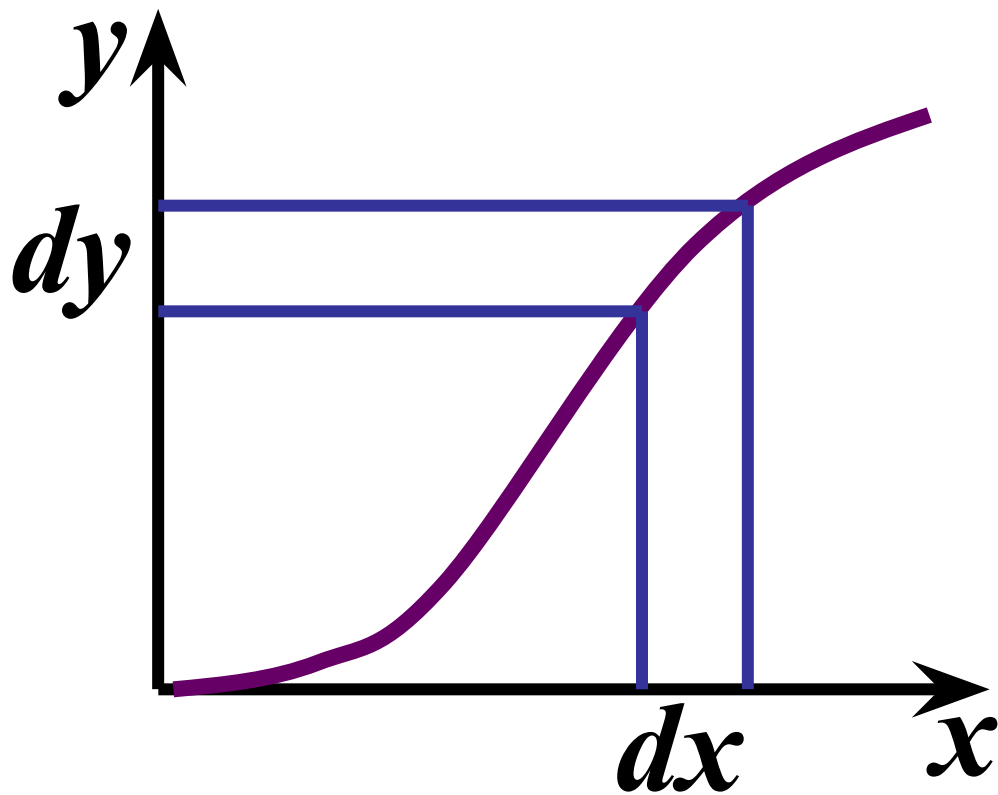
# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В НЕЛИНЕЙНОЙ БЕЗЫНЕРЦИОННОЙ ЦЕПИ

Передаточная  
характеристика

$$y = f(x)$$

Обратная  
характеристика

$$x = g(y)$$



$$dy = f'(x)dx$$

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В НЕЛИНЕЙНОЙ БЕЗЫНЕРЦИОННОЙ ЦЕПИ

Вероятности нахождения случайных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  на интервалах шириной  $dx$  и  $dy$  :

$$p_x(x) |dx| = p_y(y) |dy|$$

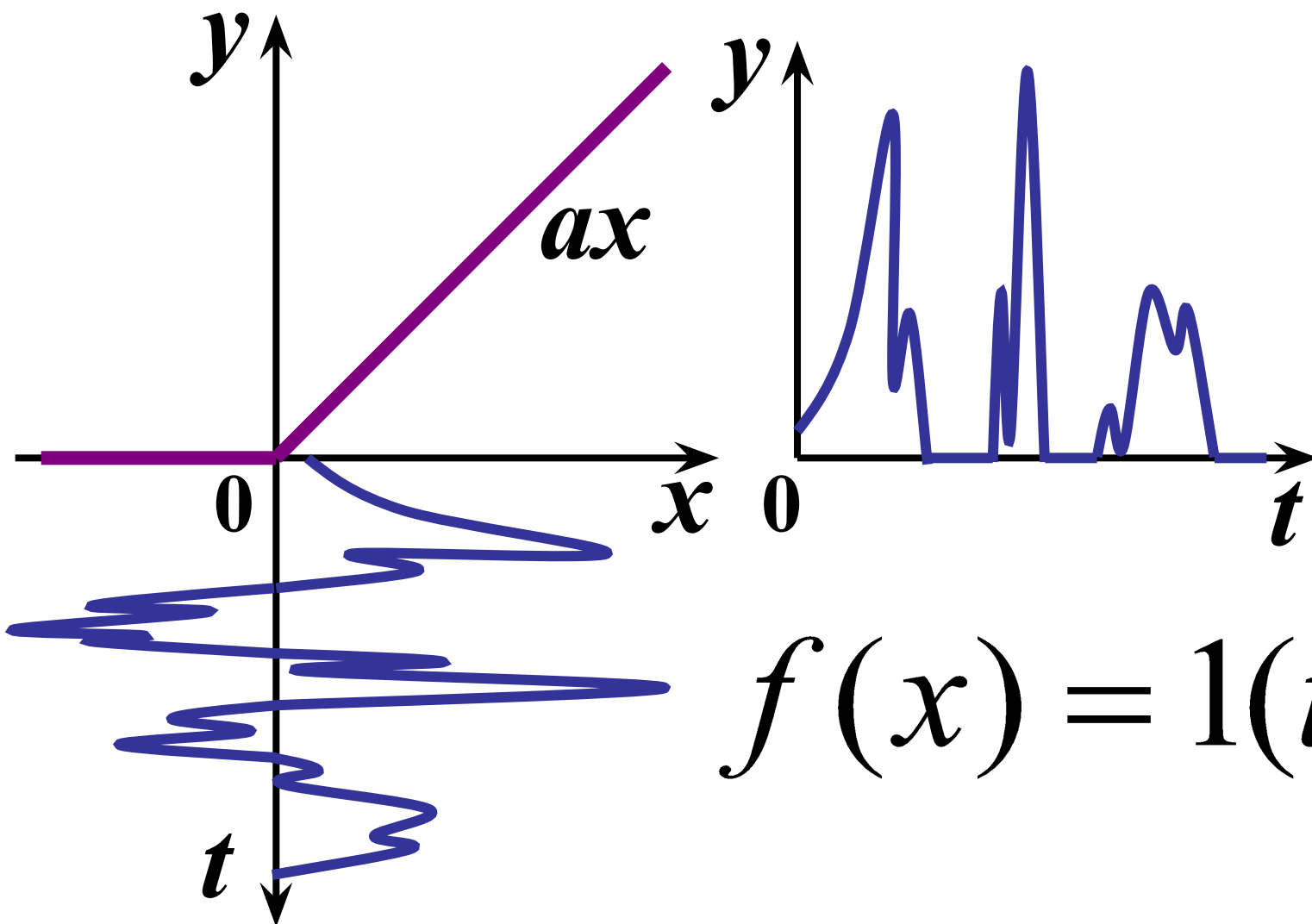
$$p_y(y) = p_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В НЕЛИНЕЙНОЙ БЕЗЫНЕРЦИОННОЙ ЦЕПИ

**Плотность вероятности выходного  
случайного процесса  $y(t)$**

$$p_y(y) = p_x[g(y)] \cdot \left| \frac{dg(y)}{dy} \right|$$

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НОРМАЛЬНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В ЦЕПИ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ



$$f(x) = 1(t)ax$$



# ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ВХОДНОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

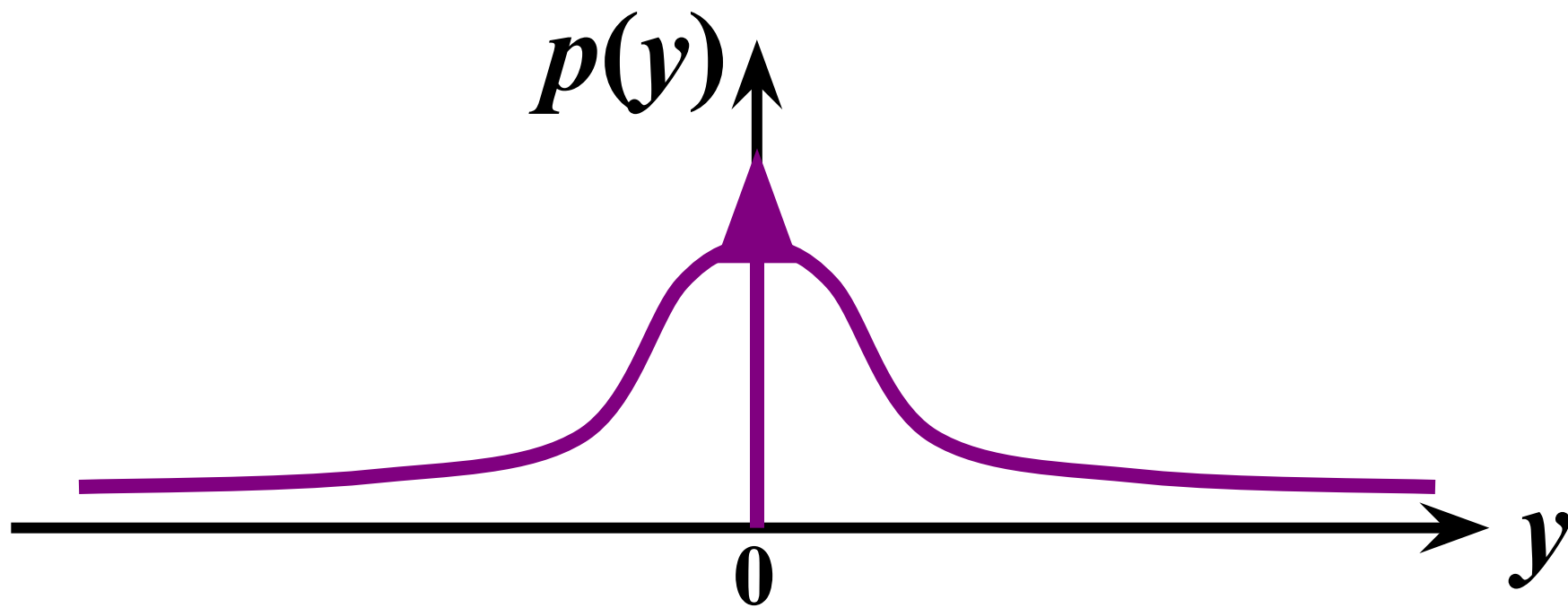
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = a1(x), \frac{dx}{dy} = \begin{cases} \infty, & y = 0 \\ a^{-1}, & y > 0 \end{cases}$$

# ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫХОДНОГО ПРОЦЕССА

$$p(y) = \begin{cases} \infty, & y = 0 \\ \frac{1}{a\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{y^2}{2a^2\sigma_x^2}}, & y > 0 \end{cases}$$

# ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫХОДНОГО ПРОЦЕССА



$$p(y) = \frac{1}{2} \delta(y) + \frac{1(y)}{a\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{y^2}{2a^2\sigma_x^2}}$$

## ФУНКЦИЯ КОВАРИАЦИИ ВЫХОДНОГО ПРОЦЕССА БЕЗЫНЕРЦИОННОЙ ЦЕПИ

$$B_y(t_1, t_2) = \overline{y(t_1)y(t_2)} = \overline{\{f[x(t_1)]f[x(t_2)]\}}$$

**Двумерная плотность вероятности  
нормального стационарного  
узкополосного входного процесса**

$$p(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-r^2(\tau)}} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2r(\tau)x_1x_2}{2\sigma_x^2 [1-r^2(\tau)]}}$$

**Симметричная квадратичная  
передаточная характеристика цепи:**

$$f(x) = bx^2$$

**Функция корреляции входного  
узкополосного процесса с  
симметричным спектром мощности**

$$R_x(\tau) = a(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

# ФУНКЦИЯ КОВАРИАЦИИ ВЫХОДНОГО ПРОЦЕССА НЕЛИНЕЙНОЙ БЕЗЫНЕРЦИОННОЙ ЦЕПИ

$$B_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2) p(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 = \\ = b^2 \sigma_x^4 + 2b^2 R_x^2(\tau)$$

$$B_y(\tau) = b^2 \sigma_x^4 + b^2 \sigma_x^4 a^2(\tau) + \\ + b^2 \sigma_x^4 a^2(\tau) \cos 2\omega_0 \tau$$

# СПЕКТР МОЩНОСТИ ВЫХОДНОГО ПРОЦЕССА

$$W(\omega) = W_0(\omega) + W_{lf}(\omega) + W_{hf}(\omega)$$

Составляющая **спектра мощности**, обусловленная **постоянной составляющей** на выходе цепи с квадратичной передаточной характеристикой:

$$W_0(\omega) = b^2 \sigma_x^4 2\pi \delta(\omega)$$

# СПЕКТР МОЩНОСТИ ВЫХОДНОГО ПРОЦЕССА

Составляющая спектра мощности, обусловленная низкочастотной флуктуационной составляющей, спектр мощности которой примыкает к нулевой частоте:

$$W_{lf}(\omega) = b^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} a^2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$



# СПЕКТР МОЩНОСТИ ВЫХОДНОГО ПРОЦЕССА

Составляющая спектра мощности, обусловленная **высокочастотной флуктуационной составляющей**, со спектром мощности, сосредоточенным в окрестности частоты  $2\omega_0$ :

$$W_{hf}(\omega) = b^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} a^2(\tau) \cos(2\omega_0 \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

# ОДНОСТОРОННИЙ СПЕКТР МОЩНОСТИ ВЫХОДНОГО ПРОЦЕССА

