Основы векторного исчисления

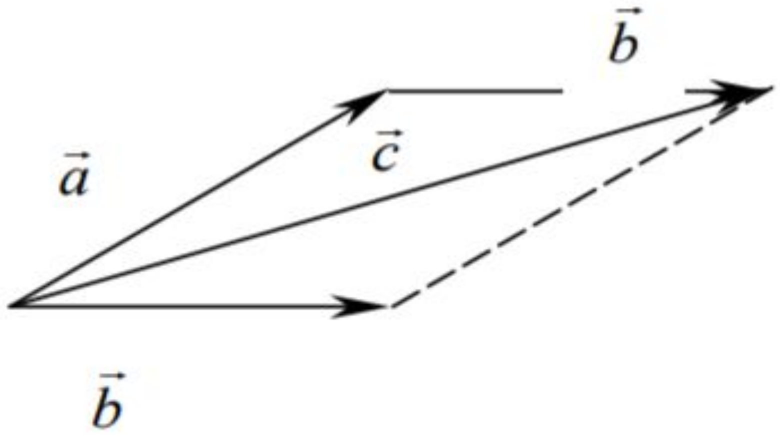
Определим основные операции, которые можно производить с векторами.

Равенство двух векторов

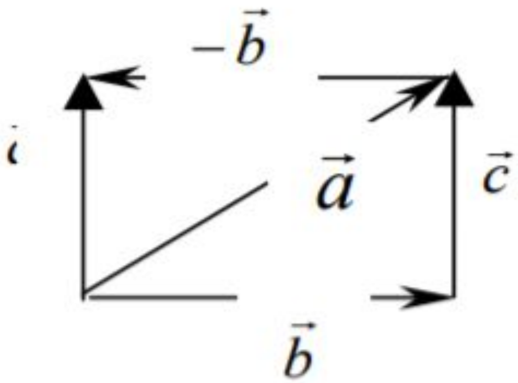
Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если они имеют одинаковую абсолютную величину и одинаковое направление. Можно сравнивать два вектора, определенные в разных точках пространства и в разные моменты времени. Параллельный перенос не меняет значения вектора.

Сложение векторов

Суммой двух векторов называют вектор $\vec{c}$, проведенный из начальной точки вектора $\vec{a}$ к конечной точке вектора $\vec{b}$, если вектор $\vec{b}$ перенести параллельно самому себе так, чтобы его начало совпадало с концом вектора $\vec{a}$. Причем $\vec{c}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$, если совместить начало векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$, то вектор $\vec{c}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}$ и $\vec{a}$ как на его сторонах и выходящий из общего начала. Сумма векторов не зависит от порядка, в котором складываются векторы.



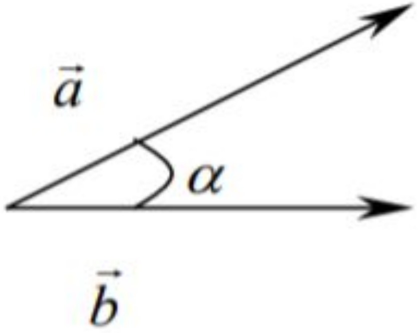
Разность двух векторов



Разность двух векторов $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ можно рассматривать как сумму векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$. Или является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}$ и $\vec{a}$ как на его сторонах и выходящий из конца вычитаемого вектора в начало уменьшаемого.

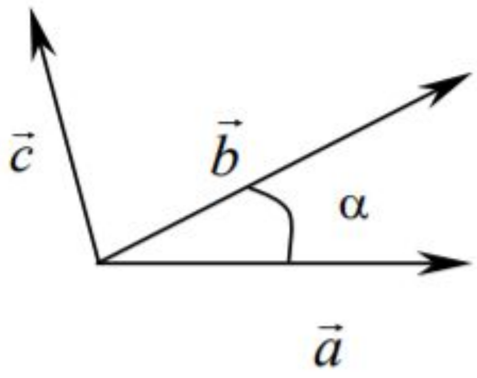
Произведение векторов

Известны два вида произведений двух векторов, широко используемые в физике. Для обоих видов произведений векторов выполняется распределительный (дистрибутивный) закон умножения: произведение вектора $\vec{c}$ на сумму $\vec{a}+\vec{b}$ равно сумме произведений $\vec{c}$ на $\vec{a}$ и $\vec{c}$ на $\vec{b}$. одно из этих произведений представляет собой скаляр, другое вектор.



Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. $c=\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot\cos(\alpha)$, скалярное произведение коммутативно: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.



Векторное произведение

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c}$ лежащий в плоскости, перпендикулярной плоскости в которой расположены вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Модуль вектора равен произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними $a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$ направление вектора $\vec{c}$ определяется правилом правой руки (правого винта) от первого вектора ко второму. Векторное произведение не коммутативно $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Векторы в декартовой системе координат

Декартова система координат определяется заданием любой правой тройки взаимно перпендикулярных единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Направление вектора $\vec{k}$ определяется правилом правого винта, т. е. $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$.

Любой вектор $\vec{a}$ можно выразить так:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Здесь a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\vec{a}$ на соответствующие координатные оси:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{i}\ ,\ a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}\ ,\ a_z = \vec{a} \cdot \vec{k}\ .$$

Любой вектор считается заданным тройкой чисел (a_x, a_y, a_z) в данной системе координат.

Найдем скалярное произведение двух векторов в декартовой системе координат, воспользовавшись естественными равенствами:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1,\ \vec{j} \cdot \vec{j} = 1,\ \vec{k} \cdot \vec{k} = 1,\ \vec{i} \cdot \vec{j} = 0,\ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0\ ,\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0\ .$$

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Для квадрата вектора $\vec{a}$ имеем

$$\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 .$$

Векторное произведение единичных векторов равно:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},$$

поэтому векторное произведение двух векторов равно:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

Эквивалентная запись векторного произведения через определитель:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} .$$

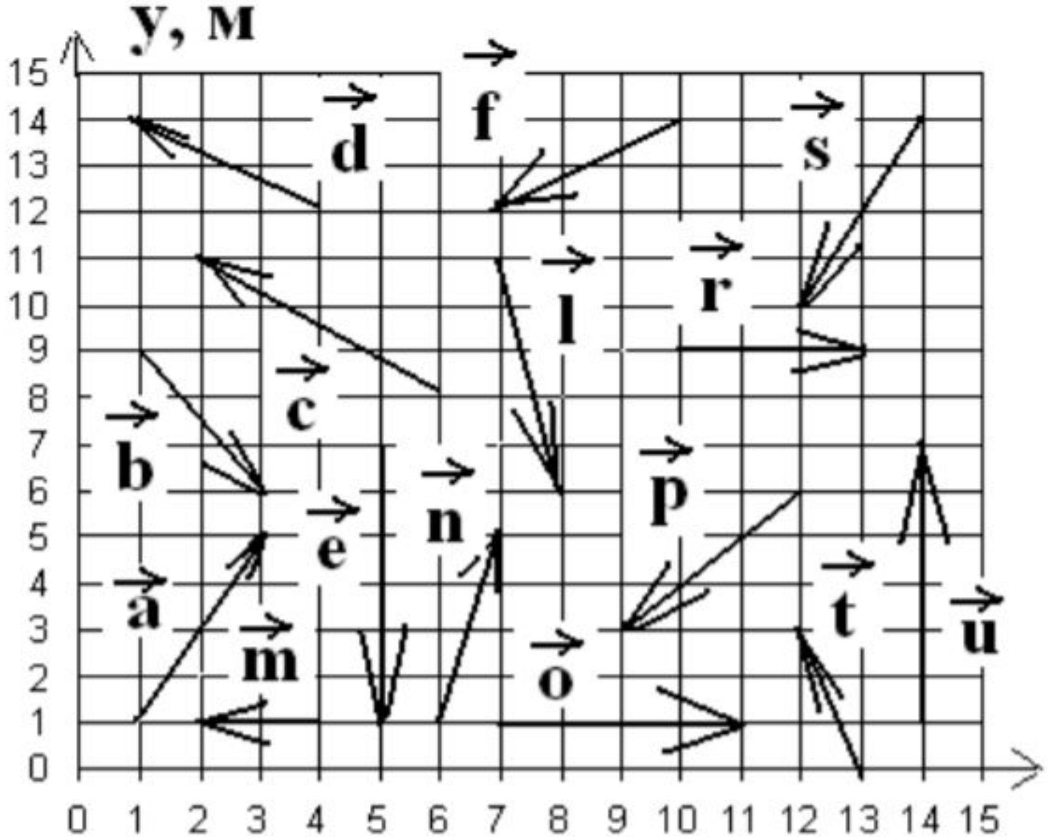


Рис. 1

1.1 Определите проекции на оси OX и OY векторов представленных на рисунке 1.

Пример: $a_x = 2м$; $a_y = 3м$

1.2 Запишите векторы представленные на рисунке 1 в декартовой системе координат (через единичные орты осей OX и OY $\vec{i}$ и $\vec{j}$).

Пример: $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$

1.3 Найдите сумму векторов с рисунка 1 графически и аналитически:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}+\vec{c}$; в) $\vec{c}+\vec{d}$; г) $\vec{d}+\vec{l}$; д) $\vec{b}+\vec{f}$; е) $\vec{c}+\vec{e}$; ж) $\vec{m}+\vec{o}$;

з) $\vec{p}+\vec{t}$; и) $\vec{e}+\vec{u}$; к) $\vec{r}+\vec{s}$; л) $\vec{m}+\vec{r}$; м) $\vec{n}+\vec{s}$; н) $\vec{u}+\vec{e}$; о) $\vec{f}+\vec{a}$.

Пример:

$$\vec{t}+\vec{n}=(-1\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j})+(1\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j})=(-1+1)\cdot\vec{i}+(3+4)\cdot\vec{j}=0\cdot\vec{i}+7\cdot\vec{j}=7\cdot\vec{j}$$

1.4 Найдите разность векторов с рисунка 1 графически и аналитически:

а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{c}$; в) $\vec{c}-\vec{d}$; г) $\vec{d}-\vec{l}$; д) $\vec{b}-\vec{f}$; е) $\vec{c}-\vec{e}$; ж) $\vec{m}-\vec{o}$;

з) $\vec{p}-\vec{t}$; и) $\vec{e}-\vec{u}$; к) $\vec{r}-\vec{s}$; л) $\vec{m}-\vec{r}$; м) $\vec{n}-\vec{s}$; н) $\vec{u}-\vec{e}$; о) $\vec{f}-\vec{a}$.

Пример:

$$\vec{t}-\vec{n}=(-1\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j})-(1\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j})=(-1-1)\cdot\vec{i}+(3-4)\cdot\vec{j}=-2\cdot\vec{i}-1\cdot\vec{j}$$

1.5 Определите скалярное произведение двух векторов с рисунка 1

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\vec{a}\cdot\vec{c}$;в) $\vec{c}\cdot\vec{d}$; г) $\vec{d}\cdot\vec{l}$; д) $\vec{b}\cdot\vec{f}$; е) $\vec{c}\cdot\vec{e}$; ж) $\vec{m}\cdot\vec{o}$;

з) $\vec{p}\cdot\vec{t}$; и) $\vec{e}\cdot\vec{u}$; к) $\vec{r}\cdot\vec{s}$; л) $\vec{m}\cdot\vec{r}$; м) $\vec{n}\cdot\vec{s}$; н) $\vec{u}\cdot\vec{e}$; о) $\vec{f}\cdot\vec{a}$.

Пример: $\vec{t}\cdot\vec{n}=(-1\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j})\cdot(1\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j})=(-1)\cdot(1)+(3)\cdot(4)=11$

1.6 Определите векторное произведение двух векторов с рисунка 1

а) $\vec{a}\times\vec{b}$; б) $\vec{a}\times\vec{c}$;в) $\vec{c}\times\vec{d}$; г) $\vec{d}\times\vec{l}$; д) $\vec{b}\times\vec{f}$; е) $\vec{c}\times\vec{e}$; ж) $\vec{m}\times\vec{o}$;

з) $\vec{p}\times\vec{t}$; и) $\vec{e}\times\vec{u}$; к) $\vec{r}\times\vec{s}$; л) $\vec{m}\times\vec{r}$; м) $\vec{n}\times\vec{s}$; н) $\vec{u}\times\vec{e}$; о) $\vec{f}\times\vec{a}$.

Пример:

$$\vec{t}\times\vec{n}=(-1\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j})\times(1\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j})=(-1)\cdot(4)\cdot\vec{k}+(3)\cdot(1)\cdot(-\vec{k})=-7\cdot\vec{k}$$