



ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Определим основные операции, которые можно производить с векторами.

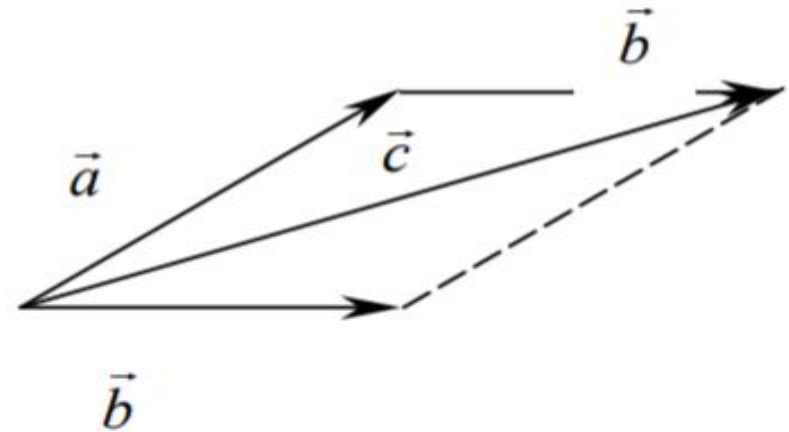
Равенство двух векторов

Два вектора \vec{a} и \vec{b} равны, если они имеют одинаковую абсолютную величину и одинаковое направление. Можно сравнивать два вектора, определенные в разных точках пространства и в разные моменты времени. Параллельный перенос не меняет значения вектора.

Сложение векторов

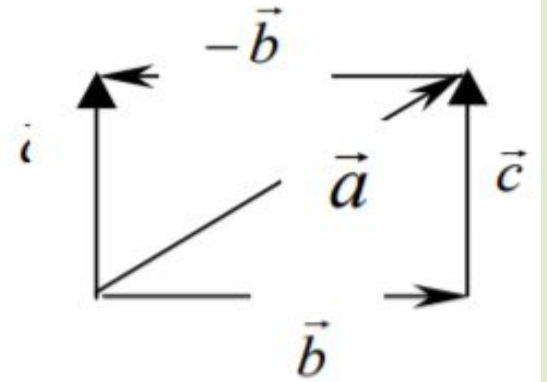
Суммой двух векторов называют вектор \vec{c} , проведенный из начальной точки вектора \vec{a} к конечной точке вектора \vec{b} , если вектор \vec{b} перенести параллельно самому себе так, чтобы его начало совпадало с концом вектора \vec{a} .

Причем $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$, если совместить начало векторов \vec{b} и \vec{a} , то вектор $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах \vec{b} и \vec{a} как на его сторонах и выходящий из общего начала. Сумма векторов не зависит от порядка, в котором складываются векторы.



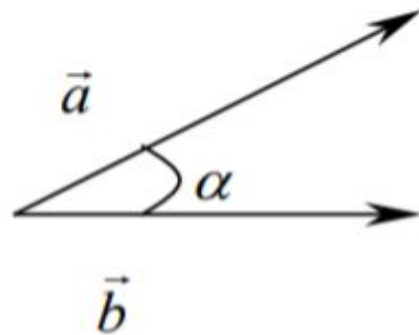
Разность двух векторов

Разность двух векторов $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ можно рассматривать как сумму векторов \vec{a} и $-\vec{b}$. Или является диагональю параллелограмма, построенного на векторах \vec{b} и \vec{a} как на его сторонах и выходящий из конца вычитаемого вектора в начало уменьшаемого.



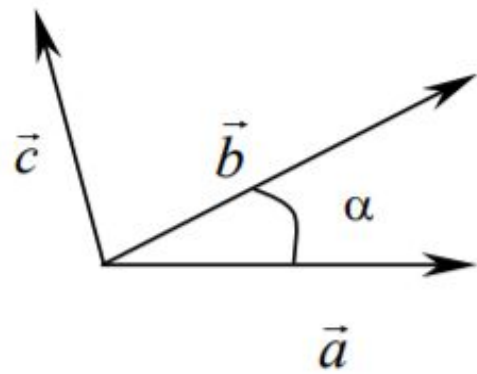
Произведение векторов

Известны два вида произведений двух векторов, широко используемые в физике. Для обоих видов произведений векторов выполняется распределительный (дистрибутивный) закон умножения: произведение вектора \vec{c} на сумму $\vec{a} + \vec{b}$ равно сумме произведений \vec{c} на \vec{a} и \vec{c} на \vec{b} . одно из этих произведений представляет собой скаляр, другое вектор.



Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. $c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$, скалярное произведение коммутативно: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.



Векторное произведение

Векторным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} называют вектор \vec{c} лежащий в плоскости, перпендикулярной плоскости в которой расположены вектора \vec{a} и \vec{b} . Модуль вектора равен произведению

длин векторов \vec{a} и \vec{b} на синус угла между ними $a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$ направление вектора \vec{c} определяется правилом правой руки (правого винта) от первого вектора ко второму. Векторное произведение не коммутативно $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Векторы в декартовой системе координат

Декартова система координат определяется заданием любой правой тройки взаимно перпендикулярных единичных векторов \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Направление вектора \vec{k} определяется правилом правого винта, т. е. $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$.

Любой вектор \vec{a} можно выразить так:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Здесь a_x, a_y, a_z – проекции вектора \vec{a} на соответствующие координатные оси:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{i}, \quad a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}, \quad a_z = \vec{a} \cdot \vec{k}.$$

Любой вектор считается заданным тройкой чисел (a_x, a_y, a_z) в данной системе координат.

Найдем скалярное произведение двух векторов в декартовой системе координат, воспользовавшись естественными равенствами:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Для квадрата вектора \vec{a} имеем

$$\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 .$$

Векторное произведение единичных векторов равно:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \end{aligned}$$

поэтому векторное произведение двух векторов равно:

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

Эквивалентная запись векторного произведения через определитель:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} .$$

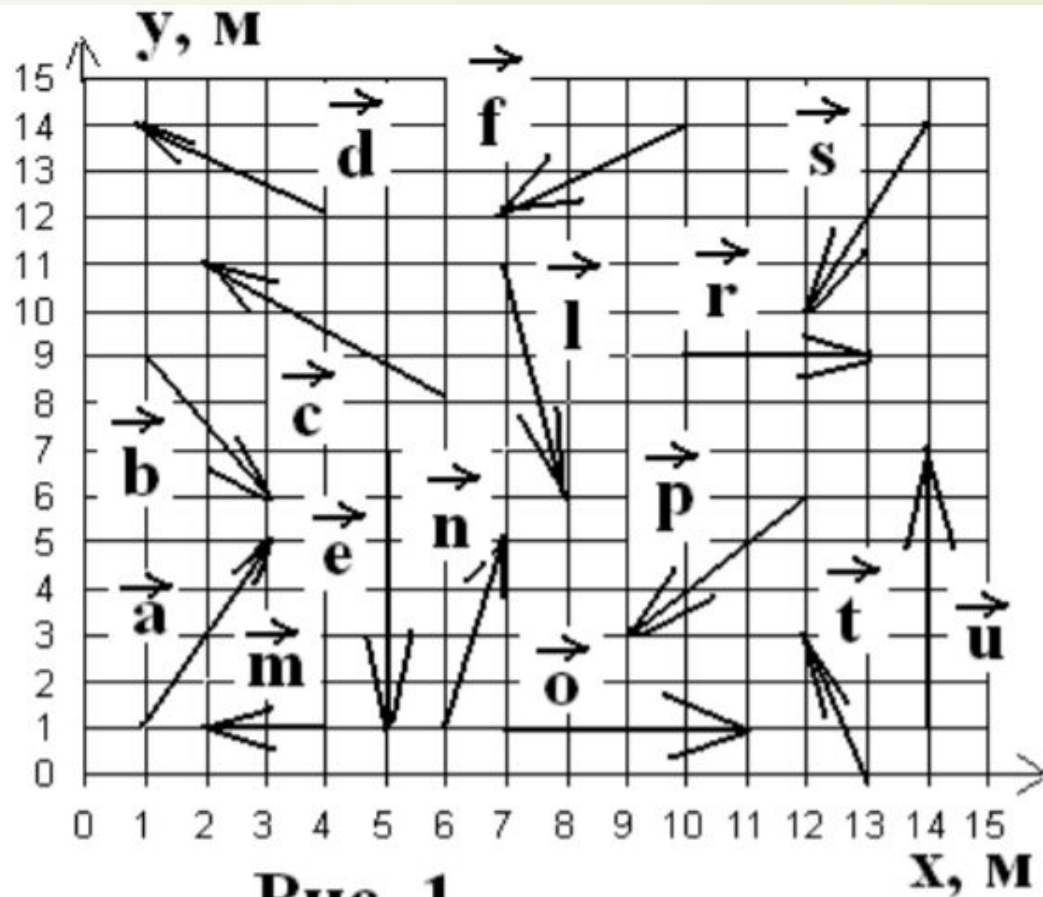


Рис. 1

1.1 Определите проекции на оси OX и OY векторов представленных на рисунке 1.

Пример: $a_x = 2\text{ м}; a_y = 3\text{ м}$

1.2 Запишите векторы представленные на рисунке 1 в декартовой системе координат (через единичные орты осей OX и OY \vec{i} и \vec{j}).

Пример: $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$

1.3 Найдите сумму векторов с рисунка 1 графически и аналитически:

- а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} + \vec{c}$; в) $\vec{c} + \vec{d}$; г) $\vec{d} + \vec{l}$; д) $\vec{b} + \vec{f}$; е) $\vec{c} + \vec{e}$; ж) $\vec{m} + \vec{o}$;
з) $\vec{p} + \vec{t}$; и) $\vec{e} + \vec{u}$; к) $\vec{r} + \vec{s}$; л) $\vec{m} + \vec{r}$; м) $\vec{n} + \vec{s}$; н) $\vec{u} + \vec{e}$; о) $\vec{f} + \vec{a}$.

Пример:

$$\vec{t} + \vec{n} = (-1 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}) + (1 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}) = (-1 + 1) \cdot \vec{i} + (3 + 4) \cdot \vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j} = 7 \cdot \vec{j}$$

1.4 Найдите разность векторов с рисунка 1 графически и аналитически:

- а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{c}$; в) $\vec{c} - \vec{d}$; г) $\vec{d} - \vec{l}$; д) $\vec{b} - \vec{f}$; е) $\vec{c} - \vec{e}$; ж) $\vec{m} - \vec{o}$;
з) $\vec{p} - \vec{t}$; и) $\vec{e} - \vec{u}$; к) $\vec{r} - \vec{s}$; л) $\vec{m} - \vec{r}$; м) $\vec{n} - \vec{s}$; н) $\vec{u} - \vec{e}$; о) $\vec{f} - \vec{a}$.

Пример:

$$\vec{t} - \vec{n} = (-1 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}) - (1 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}) = (-1 - 1) \cdot \vec{i} + (3 - 4) \cdot \vec{j} = -2 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j}$$

1.5 Определите скалярное произведение двух векторов с рисунка 1

- а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a} \cdot \vec{c}$; в) $\vec{c} \cdot \vec{d}$; г) $\vec{d} \cdot \vec{l}$; д) $\vec{b} \cdot \vec{f}$; е) $\vec{c} \cdot \vec{e}$; ж) $\vec{m} \cdot \vec{o}$;
з) $\vec{p} \cdot \vec{t}$; и) $\vec{e} \cdot \vec{u}$; к) $\vec{r} \cdot \vec{s}$; л) $\vec{m} \cdot \vec{r}$; м) $\vec{n} \cdot \vec{s}$; н) $\vec{u} \cdot \vec{e}$; о) $\vec{f} \cdot \vec{a}$.

Пример: $\vec{t} \cdot \vec{n} = (-1 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}) \cdot (1 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}) = (-1) \cdot (1) + (3) \cdot (4) = 11$

1.6 Определите векторное произведение двух векторов с рисунка 1

- а) $\vec{a} \times \vec{b}$; б) $\vec{a} \times \vec{c}$; в) $\vec{c} \times \vec{d}$; г) $\vec{d} \times \vec{l}$; д) $\vec{b} \times \vec{f}$; е) $\vec{c} \times \vec{e}$; ж) $\vec{m} \times \vec{o}$;
з) $\vec{p} \times \vec{t}$; и) $\vec{e} \times \vec{u}$; к) $\vec{r} \times \vec{s}$; л) $\vec{m} \times \vec{r}$; м) $\vec{n} \times \vec{s}$; н) $\vec{u} \times \vec{e}$; о) $\vec{f} \times \vec{a}$.

Пример:

$$\vec{t} \times \vec{n} = (-1 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}) \times (1 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}) = (-1) \cdot (4) \cdot \vec{k} + (3) \cdot (1) \cdot (-\vec{k}) = -7 \cdot \vec{k}$$