Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики и компьютерного моделирования

Численное решение уравнения теплопроводности

Руководитель
канд.-физ.-мат. наук, доцент Е.И. Гурина
Автор работы
Студент группы № 04701
Азарова А.И.

Томск – 2021

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

В работе рассматривается процесс прогрева и распространения тепла между составными частями конструкции, обладающими различными теплофизическими характеристиками.

Цель данной работы состоит в нахождении численного решения одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями первого, третьего и четвертого рода с использованием неявной разностной схемы.

ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении многих явлений в природе и технике важную роль играет теплопроводность.

Так, например, при строительстве современных домов используются многослойные конструкции с различными теплофизическими свойствами, огнестойкость которых должна удовлетворять требованиям пожарной безопасности.

Разработке различных расчетных методов для оценки огнестойкости разрабатываемых конструкций уделяется особое внимание.

Огнезащита такого рода конструкций может быть выполнена отделкой негорючими теплоизоляционными материалами, окрашиванием специальными красками или оштукатуриваем.

Физическая постановка задачи

В работе рассматривается процесс прогрева и распространения тепла между составными частями конструкции, обладающими различными теплофизическими характеристиками.

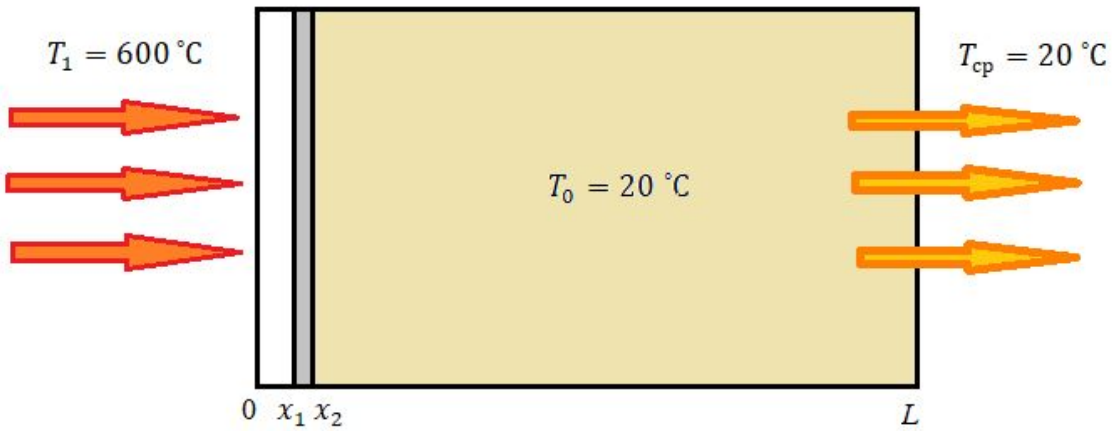

Рисунок 1 – Геометрия задачи

В начальный момент времени первая (огнестойкое декоративное покрытие), вторая (металлическая подложка), третья (профилированный брус) части пластины имеют температуру 20 °С.

К левой границе первого слоя пластины подводится источник тепла с постоянной температурой 600 °С. На правой границе многослойной пластины происходит теплообмен поверхности бруса с окружающей средой, имеющей температуру 20 °С.

Математическая постановка задачи

Распространение тепла в многослойной конструкции для рассматриваемой нестационарной задачи можно описать одномерным уравнением теплопроводности:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, 0 < x < L, \qquad (1)$$

где ρ - плотность материала,($кг/м^3$); C_p –удельная теплоемкость материала, *Дж/(кг · °C)*; λ - коэффициент теплопроводности материала, *Вт/(м · °C)*; *T(t,x)* - температура, °*C*; *L* - граница рассматриваемой области, *м*.

Так как в процессе теплообмена участвуют три слоя с различными теплофизическими свойствами, то для каждого из слоев конструкции будет использоваться свое уравнение теплопроводности с соответствующими значениями ρ, C_p, λ :

$$\rho_1 C_{p1} \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, 0 < x < x_1; \qquad (2.1)$$

$$\rho_2 C_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, x_1 < x < x_2; \qquad (2.2)$$

$$\rho_3 C_{p3} \frac{\partial T_3}{\partial x} = \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}, x_2 < x < L. \qquad (2.3)$$

λ_1=0.2 *Вт/(м · °C)*; ρ_1=1400 ($кг/м^3$); C_{p1}=1100 *Дж/(кг · °C)*;
λ_2=47 *Вт/(м · °C)*; ρ_2=7800 ($кг/м^3$); C_{p2}=460 *Дж/(кг · °C)*; (2.4)
λ_3=0.4 *Вт/(м · °C)*; ρ_3=500 ($кг/м^3$); C_{p3}=2300 *Дж/(кг · °C)*.

Математическая постановка задачи

- Запишем начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи.

В начальный момент времени температура каждой части конструкции принимается одинаковой и равной:

$$T(0,x) = 20°C, 0 \leq x \leq L. \qquad (2.4)$$

На левой границе рассматривается граничное условие I рода:

$$T(t,x)|_{x=0} = 600°C, t > 0. \qquad (2.5)$$

В зоне контакта огнестойкого покрытия и металлической подложки действуют граничные условия IV рода:

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}|_{x=x1} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}|_{x=x1} \\ T_1(t,x_1) = T_2(t,x_1) \end{cases} \qquad (2.6)$$

В зоне контакта металлической подложки и бруса также действуют граничные условия IV рода:

$$\begin{cases} \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}|_{x=x2} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}|_{x=x2} \\ T_2(t,x_2) = T_3(t,x_2) \end{cases} \qquad (2.7)$$

На выходе из рассматриваемой области ($x=L$), где осуществляется теплообмен с окружающей средой, рассматривается граничное условие III рода.

$$\lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial x}\right) = k(T_3 - T_{ср}), \ t > 0 \qquad (2.8)$$

где k=10 Вт/(м ^{2}К) –коэффициент теплообмена между брусом и воздухом,

$T_{ср} = 20°C$ - температура окружающей среды (воздуха).

Дискретизация

- Для рассматриваемой задачи при использовании метода конечных разностей (МКР) – многослойная пластина будет представлена в виде совокупности узлов.

Область непрерывного изменения аргумента $x \in [x_0, L]$ в данном случае заменяется дискретным множеством точек:

$$x_i = x_0 + ih,\ i = 0,1,\ldots,N,\ \textit{где } h - \textit{шаг сетки}.$$

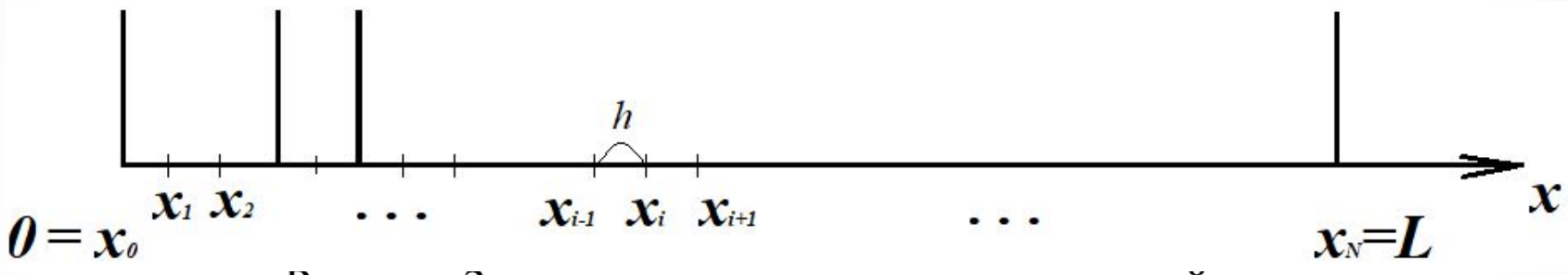

Рисунок 2 – иллюстрация конечно-разностной сетки

Конечно-разностные формулы для аппроксимации дифференциальных операторов имеют вид:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau}, \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n \approx \sigma \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\sigma)\frac{T_{i+1}^{n} - 2T_i^{n} + T_{i-1}^{n}}{h^2}, \qquad (3.1)$$

где h– шаг конечно-разностной сетки по пространству вдоль оси Ox; τ – шаг по времени; σ – коэффициент, определяющий вид схемы ($0 \le \sigma \le 1$).

Построение конечно-разностного аналога

При подставлении формул (3) и (3.1) в наше уравнение теплопроводности получаем:

$$\rho C_p \frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\tau} = \lambda \frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{h^2} \qquad (3.2)$$

Полученную систему линейных алгебраических уравнений (3.2) будем решать *методом прогонки*.

Для применения метода прогонки полученную систему (3.2) сведем к наиболее общему виду: $A_i \cdot T_{i+1}^{n+1} - B_i \cdot T_i^{n+1} + C_i \cdot T_{i-1}^{n+1} = F_i$, где $A_i = C_i = \lambda / h^2$, $B_i = \frac{2\cdot\lambda}{h^2} + \frac{\rho C_p}{\tau}$, $F_i = -\frac{\rho C_p}{\tau} \cdot T_i^n$ (4)

Предположим, что существуют такие наборы чисел α_i и β_i, что верно:

$$T_i^{n+1} = \alpha_i \cdot T_{i+1}^{n+1} + \beta_i, \qquad (4.1)$$

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_i \cdot \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}}. \qquad (4.2)$$

А для нахождения α_i и β_i на границе слоев используем формулы:

$$\begin{cases} \alpha_{x_1} = \dfrac{2\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\tau\cdot\lambda_2}{2\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\tau\cdot(\lambda_2+\lambda_1\cdot(1-\alpha_{x_1}))+h^2\cdot(\lambda_1\cdot\alpha_2+\lambda_2\cdot\alpha_1)}; \\ \beta_{x_1} = \dfrac{2\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\tau\cdot\lambda_1\cdot\beta_{x_1-1}+h^2\cdot(\lambda_1\cdot\alpha_2+\lambda_2\cdot\alpha_1)\cdot T_{x_1}^n}{2\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\tau\cdot(\lambda_2+\lambda_1\cdot(1-\alpha_{x_1-1}))+h^2\cdot(\lambda_1\cdot\alpha_2+\lambda_2\cdot\alpha_1)}, \end{cases} \qquad (4.3)$$

Таким образом, разностные соотношения аппроксимирующие дифференциальную задачу имеют вид:

$$\rho C_p \frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\tau} = \lambda \frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{h^2}, i = 1 \dots N-1, n \geq 0,$$

$$T_i^0 = T_0, i = 1 \dots N-1, \qquad (4.4)$$

$$T_0^n = T_l, \; n > 0, \; T_N^{n+1} = \frac{\lambda\cdot\beta_{N-1}+h\cdot k\cdot T_{cp}}{h\cdot k+\lambda\cdot(1-\alpha_{N-1})}.$$

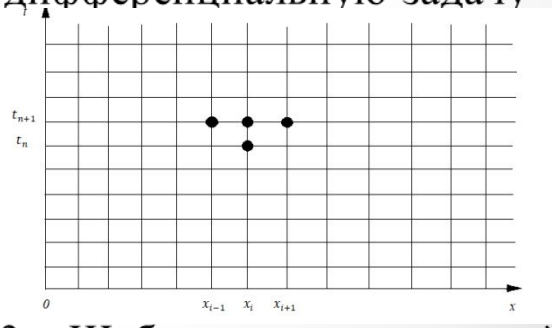

Рисунок 3 – Шаблон четырехточечной разностной схемы

Порядок аппроксимации неявной схемы

- Так как для всех трех областей используется одно и тоже разностное разбиение вдоль оси Ox, то для определения порядка аппроксимации в целом достаточно рассмотреть один из случаев. Рассмотрим первую область многослойной пластины (область огнестойкого декоративного покрытия).

Запишем разложения значений $T_i^n, T_{i+1}^{n+1}, T_{i-1}^{n+1}$ в ряд Тейлора относительно точки (t^{n+1}, x_i) и подставим полученные разложения в разностную схему:

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)\cdot\left(T_i^{n+1}-T_i^{n+1}+\frac{\partial T}{\partial t}\Big|_i^{n+1}\tau-\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\Big|_i^{n+1}\tau^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}\Big|_i^{n+1}\tau^3\right)=$$

$$=\alpha\left(\frac{T_i^{n+1}+\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_i^{n+1}h+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big|_i^{n+1}h^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\Big|_i^{n+1}h^3+\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\Big|_i^{n+1}h^4}{h^2}-\frac{2T_i^{n+1}}{h^2}+\frac{T_i^{n+1}-\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_i^{n+1}h+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big|_i^{n+1}h^2-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\Big|_i^{n+1}h^3+\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\Big|_i^{n+1}h^4}{h^2}\right),$$

$\alpha=\dfrac{\lambda}{\rho C_p}$ – коэффициент температуропроводности.

Следовательно, $\dfrac{\partial T}{\partial t}\Big|_i^{n+1}-\dfrac{1}{2!}\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2}\Big|_i^{n+1}\tau+\dfrac{1}{3!}\dfrac{\partial^3 T}{\partial t^3}\Big|_i^{n+1}\tau^2=\alpha\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big|_i^{n+1}+\dfrac{1}{4!}\dfrac{\partial^4 T}{\partial x^4}\Big|_i^{n+1}h^2\right).$

Получаем: $\dfrac{\partial T}{\partial t}\Big|_i^{n+1}+O(\Delta t)=\alpha\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big|_i^{n+1}\right)+O(h^2).$

Порядок аппроксимации исходного дифференциального уравнения запишем в виде:

$$O(\tau)+O(h^2)=O(\tau,h^2). \quad (5)$$

Дискретизация ГУ III рода с погрешностью *O(h)*, дискретизация ГУ IV рода с погрешностью $O(h^2)$.

Порядок аппроксимации для данной задачи можно записать следующим образом:

$$O(\tau)+O(h)=O(\tau,h). \quad (6)$$

Устойчивость

- В работе проведено исследование неявной разностной схемы на устойчивость по начальным данным с использованием метода гармоник.

Представим решение разностной схемы в точке (t^n, x_i) в виде гармоники:

$$T_i^{\,n} = \lambda^n e^{\xi i \varphi}, \qquad (6)$$

где $\xi = \sqrt{-1}$– мнимая единица, λ – собственные числа оператора перехода, которые необходимо определить, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Учитывая необходимое условие устойчивости разностных схем, имеем:

$$-1 \leq \frac{1}{1+4\alpha\tau sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1}{h^2}\right)} \leq 1, \qquad (7)$$

в котором оба условия выполняются, а это значит, что полученная неявная разностная схема является абсолютно устойчивой.

Сеточная сходимость

Для исследования на сеточную сходимость решения, полученного путем применения неявной разностной схемы, проведем ряд расчетов на сгущающихся сетках. На графиках (Рис. 4) представлено распределение температуры по толщине конструкции спустя 600 секунд от начала процесса.

Данные получены при различных по размеру сетках, выбранных следующим образом:

a) При $n_1 = 15$; $n_2 = 5$; $n_3 = 600$ ($h = 0.5$ мм);
b) При $n_1 = 30$; $n_2 = 10$; $n_3 = 1200$($h = 0.25$ мм);
c) При $n_1 = 75$; $n_2 = 25$; $n_3 = 3000$($h = 0.1$ мм).

Начиная с 2-го варианта сетки h=0.25 мм, результаты расчетов показывают, что дальнейшее ее сгущение не приводит к изменению решения, что свидетельствует о достижении сеточной сходимости.

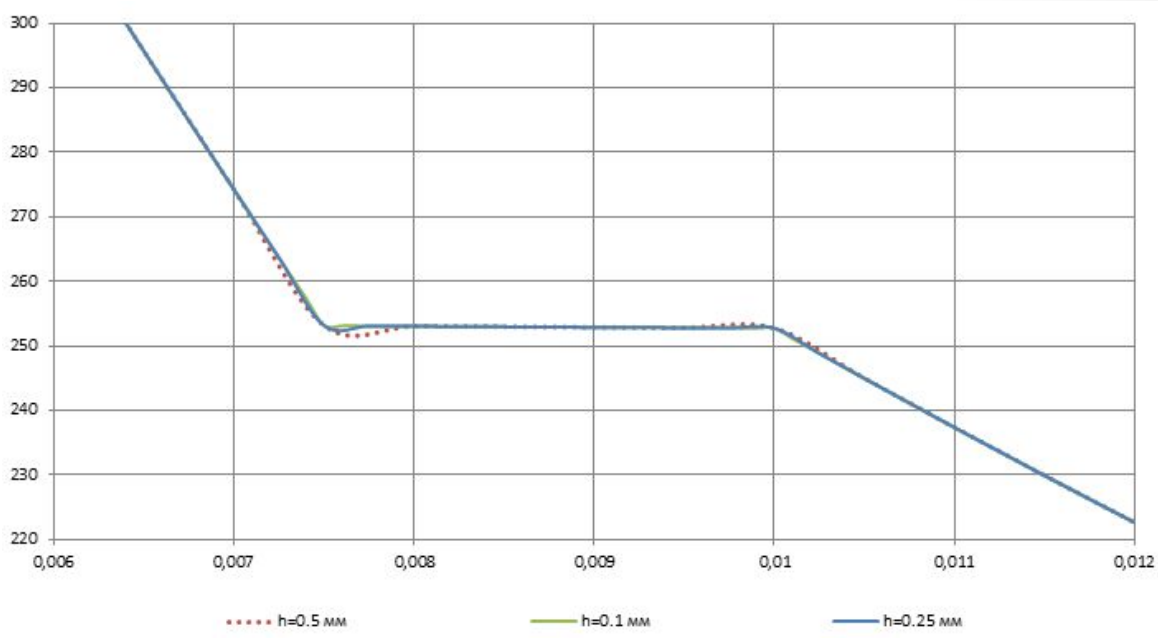

Рисунок 4 –Результаты, полученные на различных сетках

Визуализация полученных результатов

Численная реализации рассматриваемого в работе способа решения задачи выполнена на языке программирования Pascal ABC. Ниже представлены графики (Рис. 5) полученных результатов, а именно распределение температуры вдоль трехслойной пластины спустя 600, 1200, 2400, 7200 и 10800 секунд.

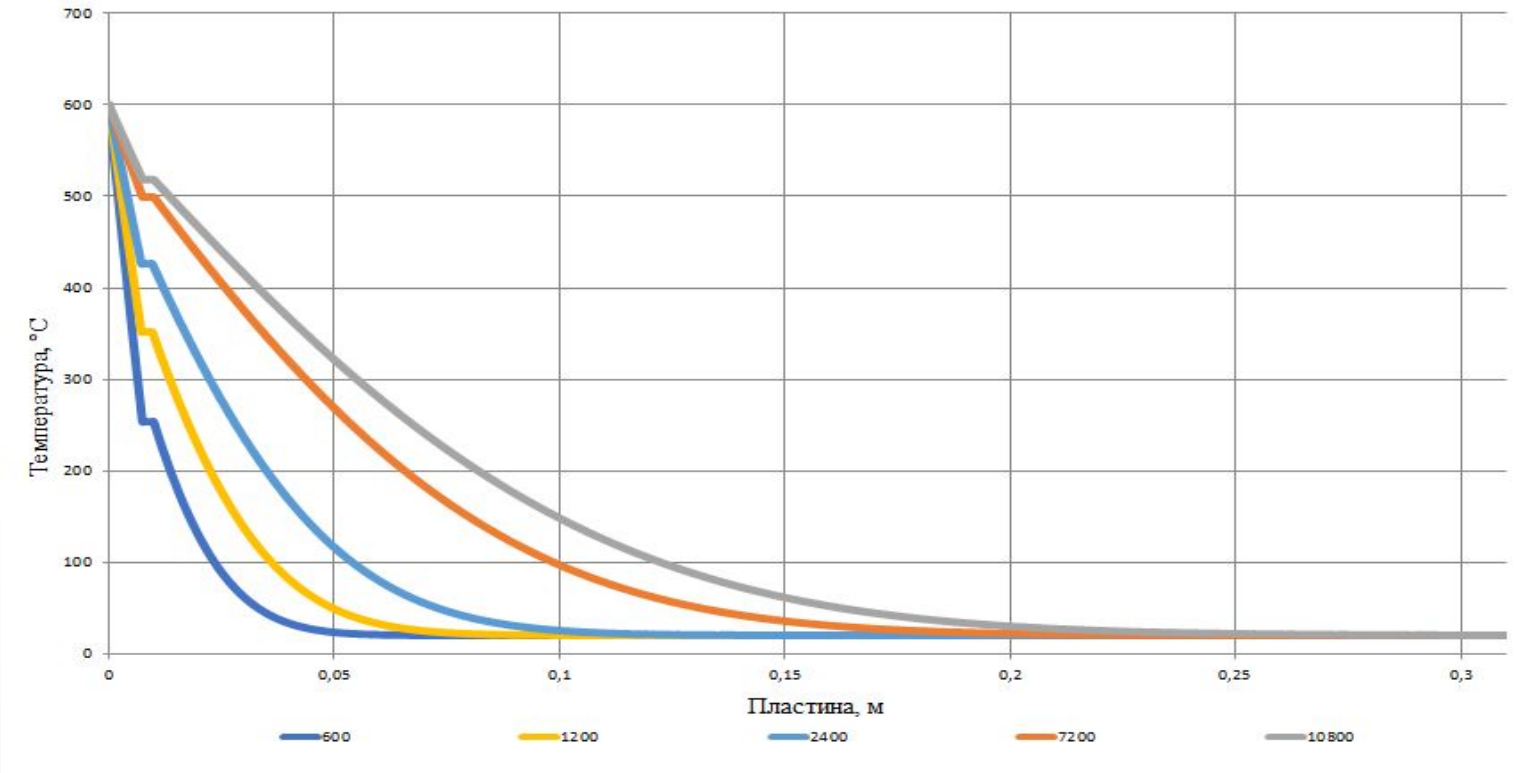

Рисунок 5 - Визуализация распространения тепла в трехслойной пластине без изолирующей вставки

Визуализация полученных результатов

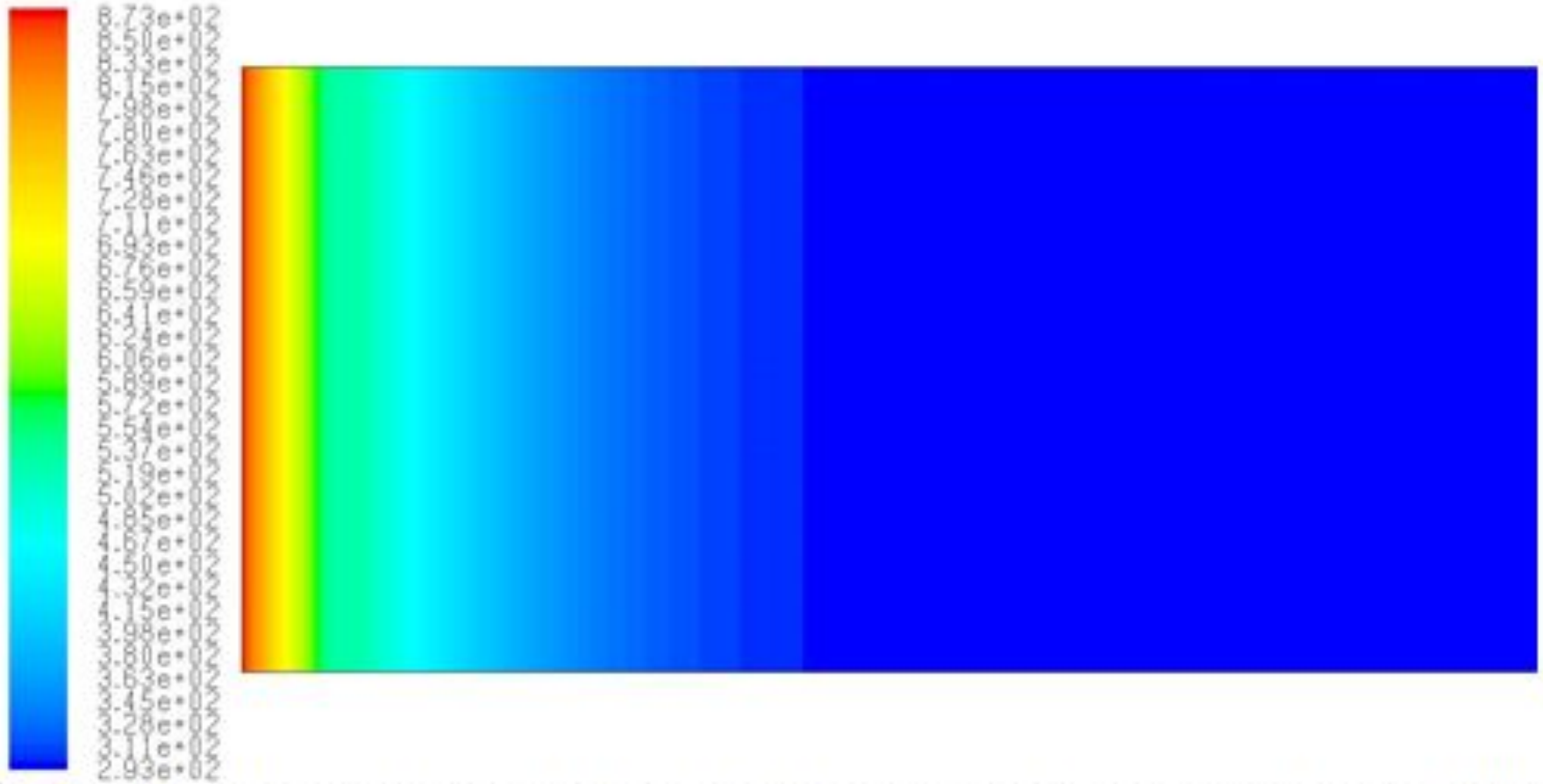

Рисунок 6 – Распределение температуры по толщине конструкции спустя 600 секунд от начала процесса нагрева

Визуализация полученных результатов

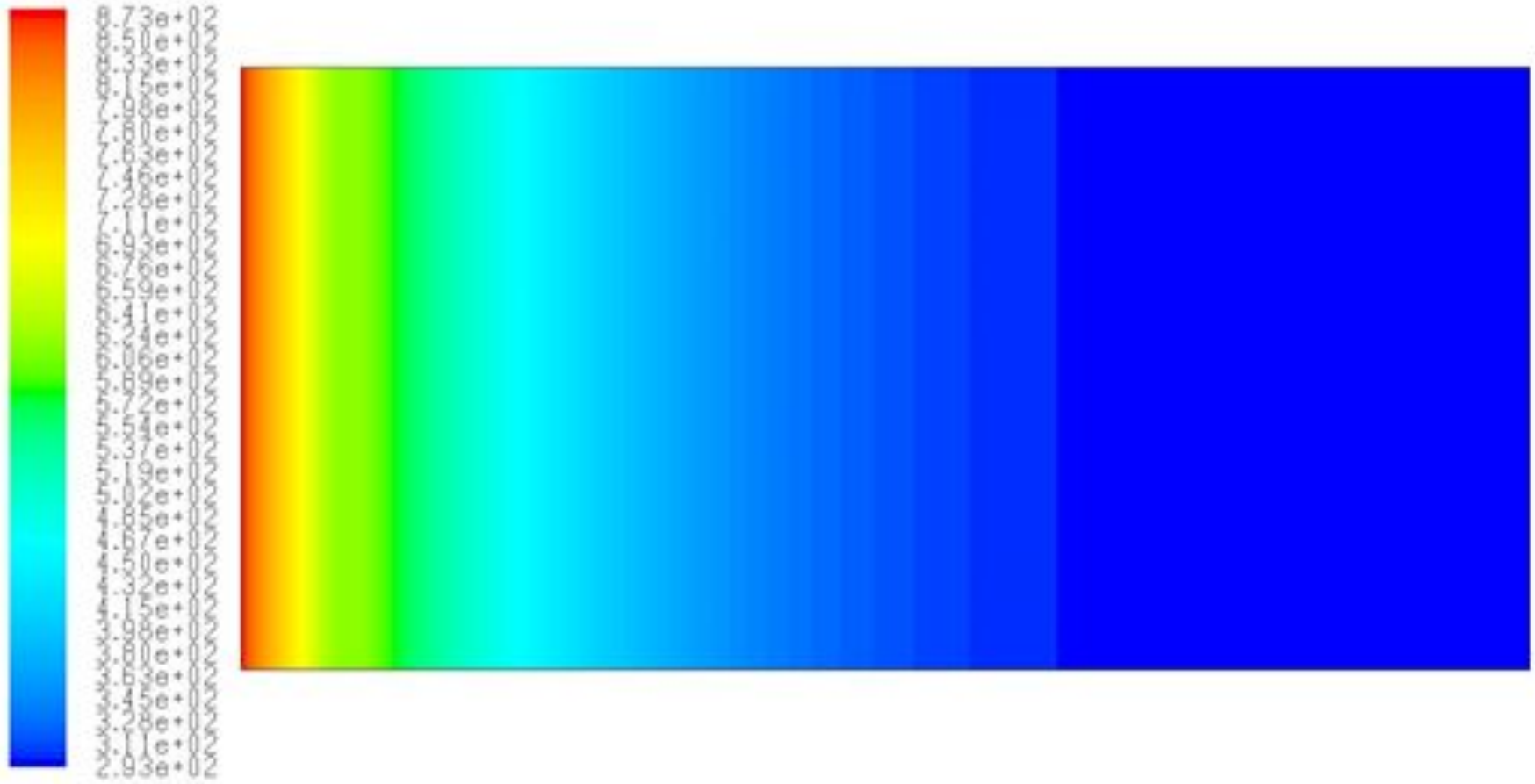

Рисунок 7 – Распределение температуры по толщине конструкции спустя 1200 секунд от начала процесса нагрева

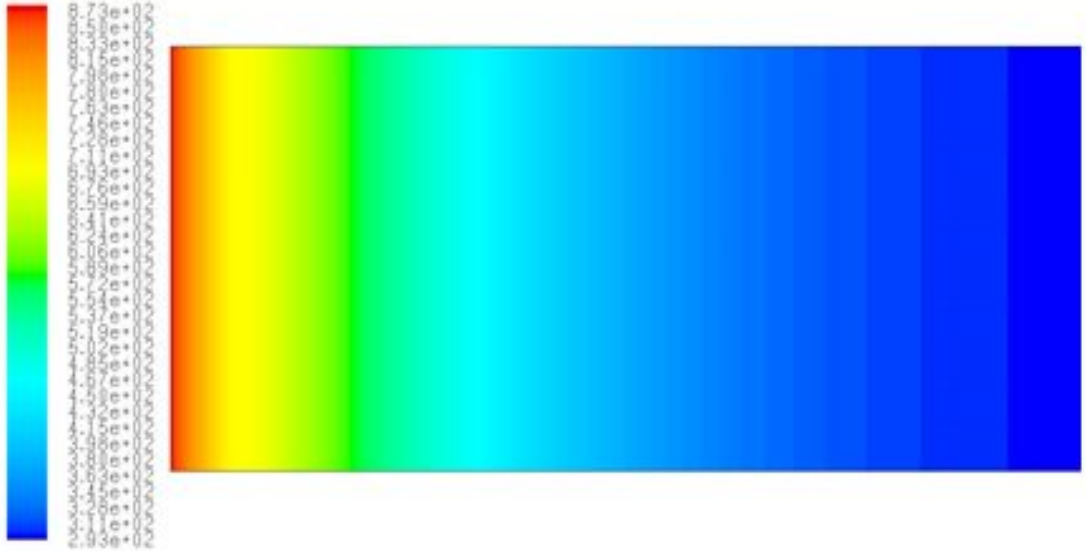

Рисунок 8.2 – Распределение температуры по толщине конструкции спустя 2400 секунд от начала процесса нагрева

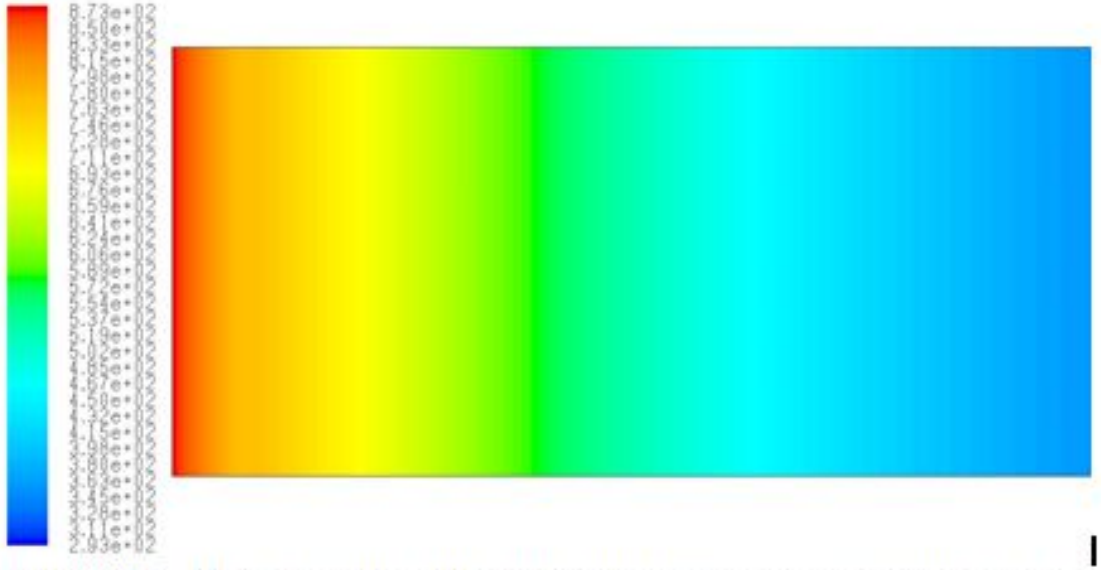

Рисунок 8.3 – Распределение температуры по толщине конструкции спустя 7200 секунд от начала процесса нагрева

Визуализация полученных результатов

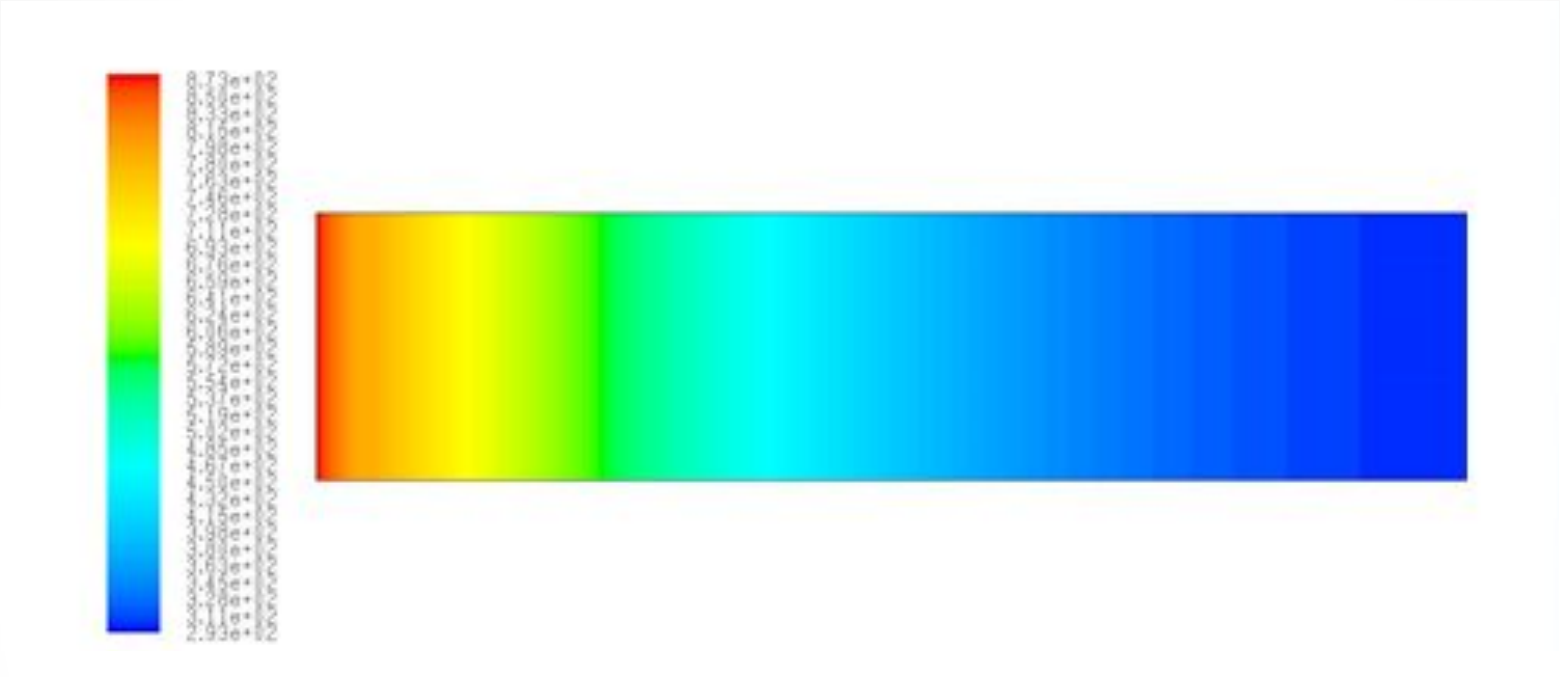

Рисунок 9 – Распределение температуры по толщине конструкции спустя 10800 секунд от начала процесса нагрева

Из иллюстраций видно, что тепловая энергия от нагреваемой поверхности достаточно быстро распространяется по толщине пластины. Время прогрева конструкции без изолятора, необходимое до достижения температуры воспламенения дерева составило 600 секунд. Данную трехслойную пластину нельзя считать огнезащищенной конструкцией с теплотехнической точки зрения.

Верификация результатов расчета с ANSYS Fluent

В работе проведено математическое моделирование протекающего физического процесса в пакете гидродинамики ANSYS Fluent для проверки правильности решения поставленной задачи.

Моделирование в программном комплексе проведено для 2D случая с использованием тех же значений констант и параметров сетки. В качестве области сравнения результатов выберем распределение температуры вдоль средней линии всей расчетной области, при y=0,025 *м*.

Ниже представлены графики результатов расчетов в программе ANSYS Fluent и результатов, полученных с использованием неявной разностной схемы.

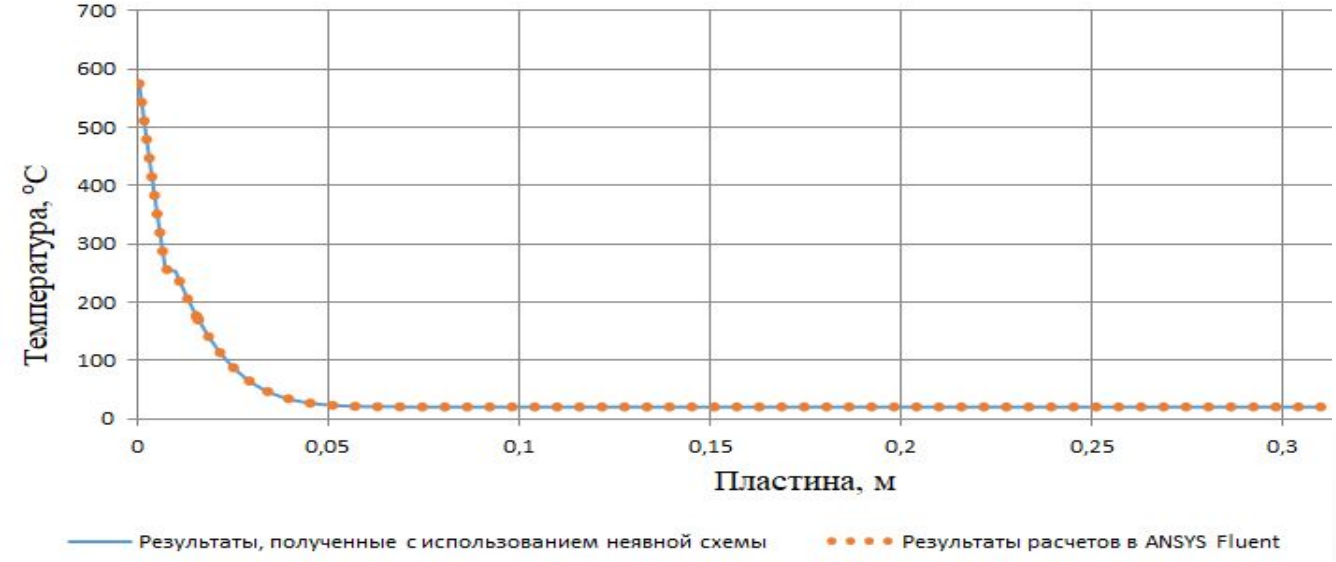

Рисунок 10 - Графики сравнения температур через 600 секунд

Физическая постановка задачи

Рассматривается процесс прогрева и распространения тепла между составными частями 4-х слойной конструкции, включающей негорючий теплоизоляционный материал (пеноплекс/каменная вата).

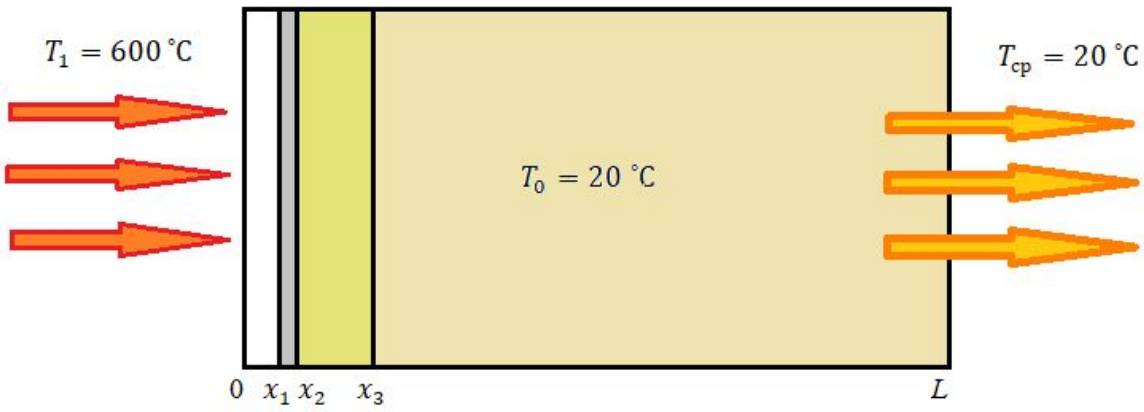

Рисунок 11 – Геометрия задачи

В начальный момент времени первая (огнестойкое декоративное покрытие), вторая (металлическая подложка), третья (изолирующая вставка), четвертая (профилированный брус) части пластины имеют температуру 20 °C. К левой границе первого слоя пластины подводится источник тепла с постоянной температурой 600 °C. На правой границе многослойной пластины происходит теплообмен поверхности бруса с окружающей средой, имеющей температуру 20 °C

Визуализация полученных результатов

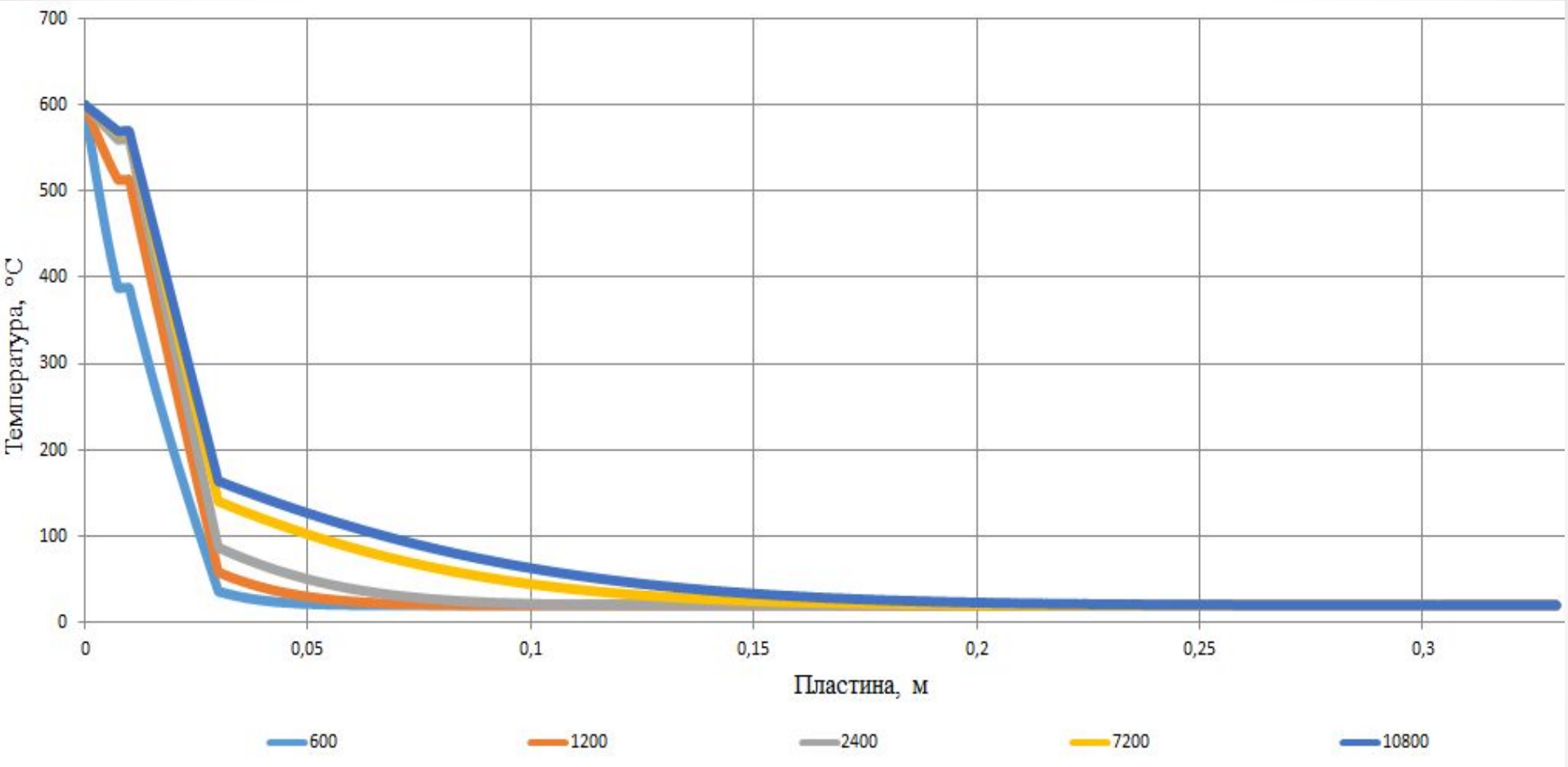

Рисунок 12 - Визуализация распределения температуры в 4-х слойной пластине с изолирующей вставкой из пеноплекса

Визуализация полученных результатов

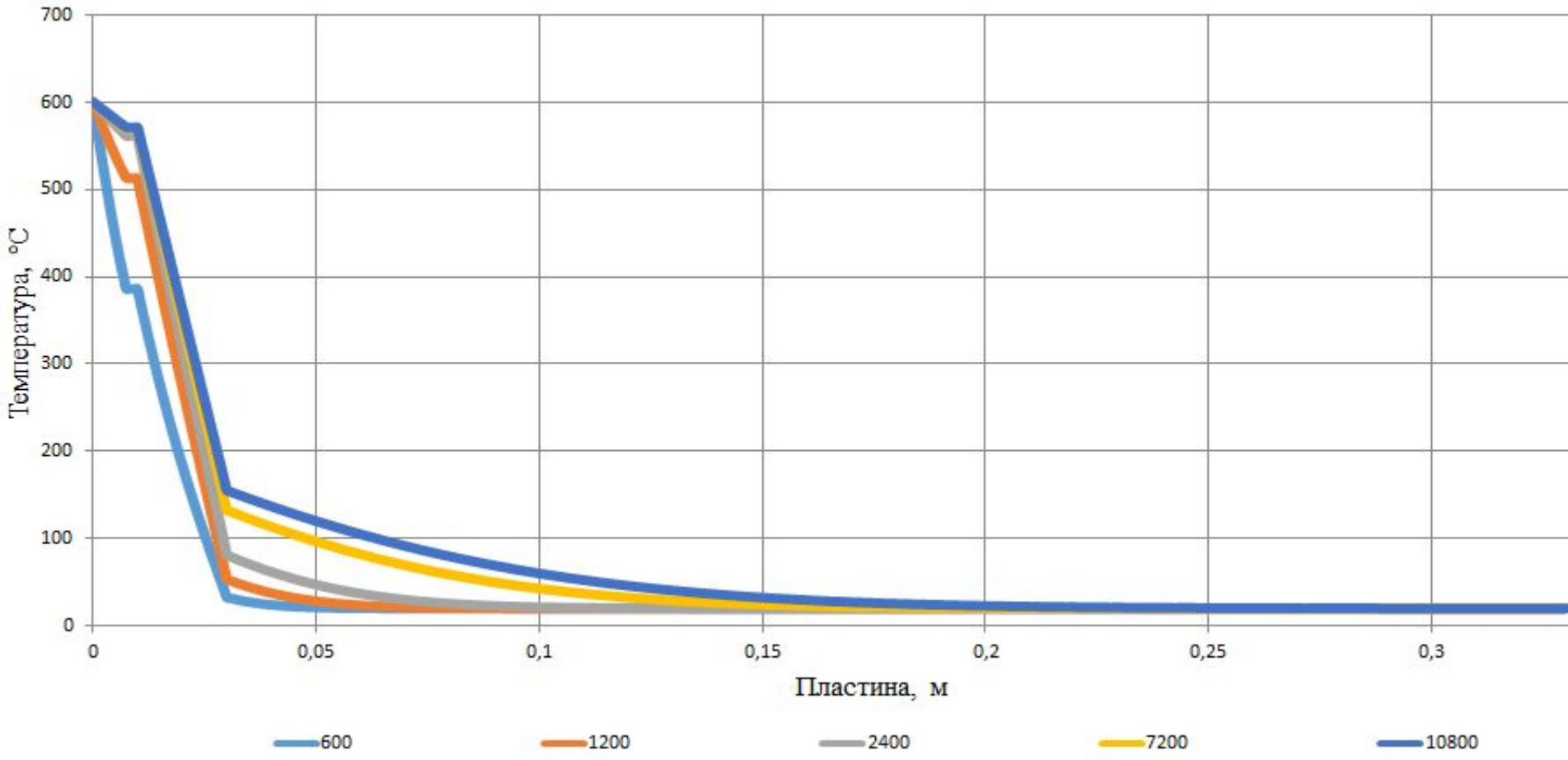

Рисунок 12.1 - Визуализация распределение температуры в 4-х слойной пластине с изолирующей вставкой из каменной ваты

Верификация результатов расчета с ANSYS Fluent

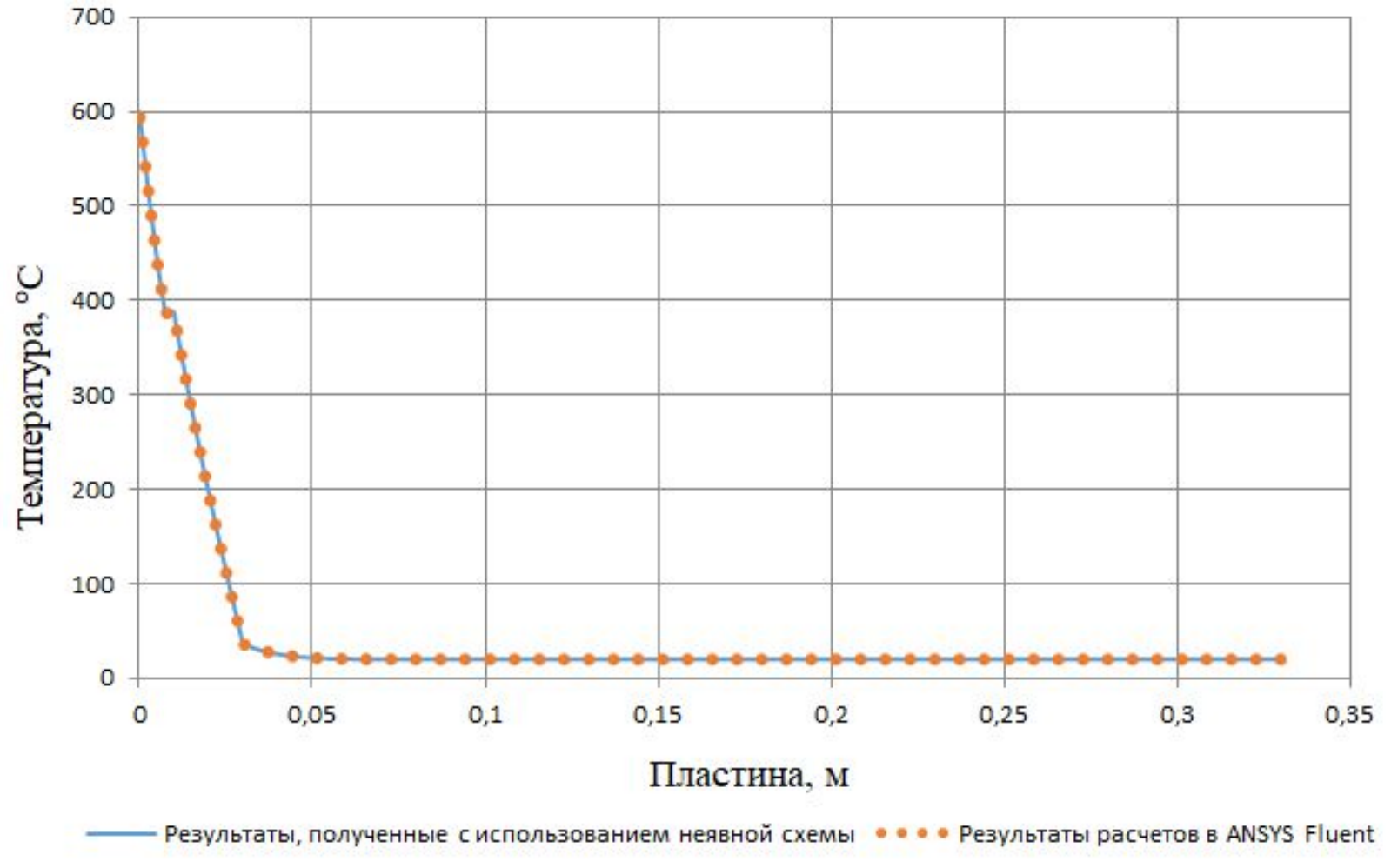

Рисунок 13 - Распределение T по толщине пластины (при y=0.025 м) с изолирующей вставкой (пеноплекс) через 600 секунд

Верификация результатов расчета с ANSYS Fluent

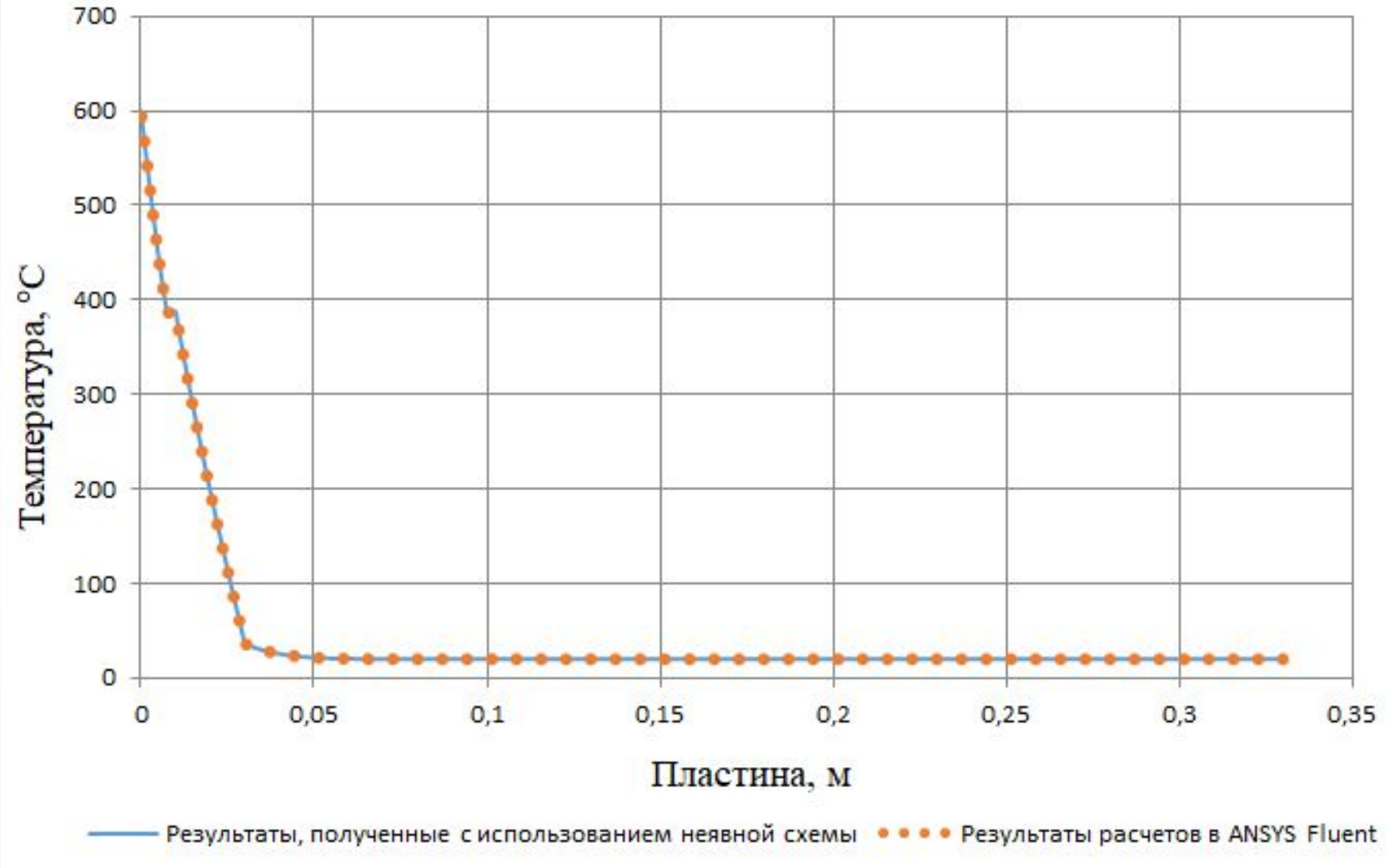

Рисунок 13.1 - Распределение Т по толщине пластины (при y=0.025 м) с изолирующей вставкой (каменная вата) через 600 секунд

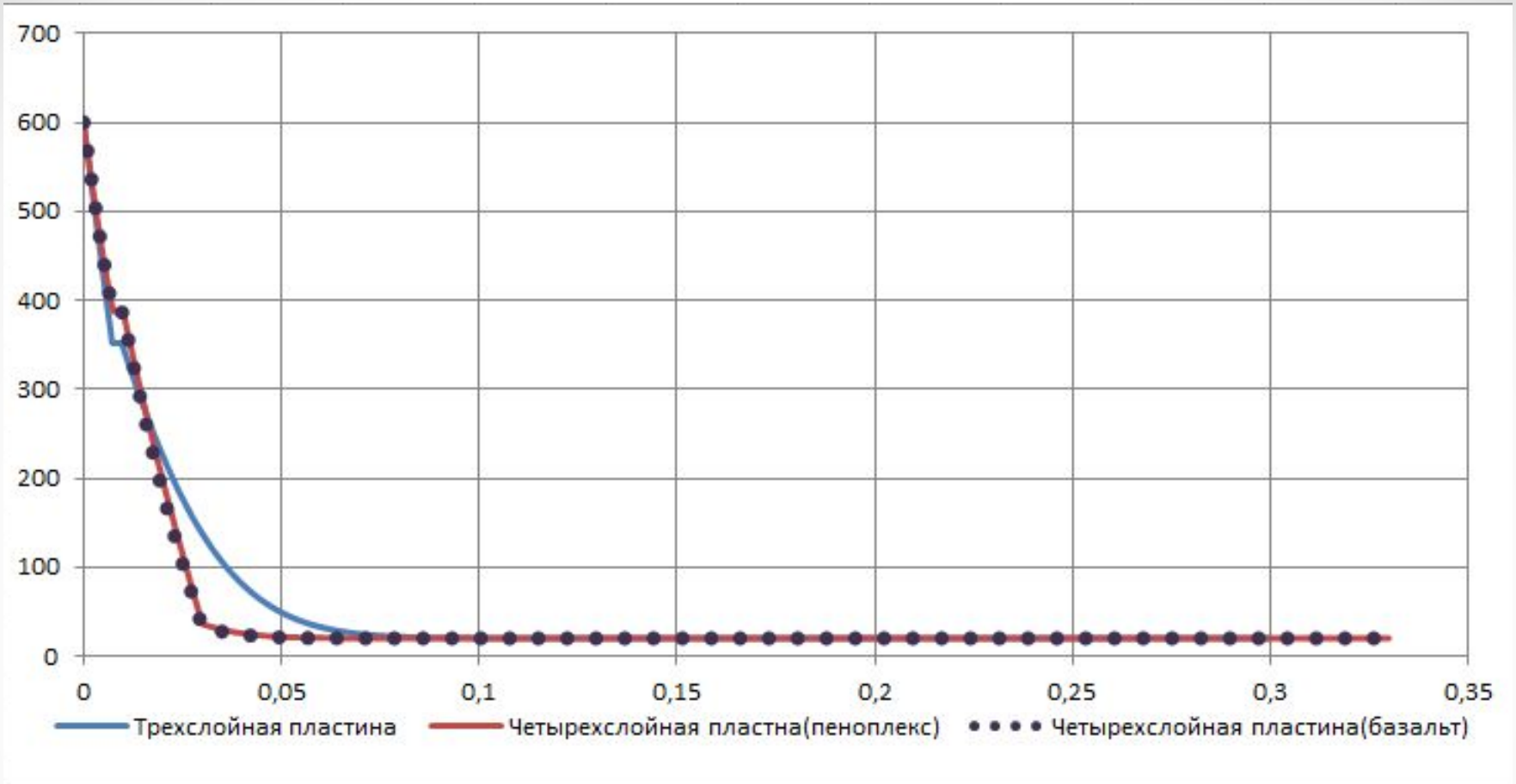

Рисунок 13.2 – Сравнение значений температур в пластинах без изолятора и с изолятором (пеноплекс/каменная вата) за время 600 секунд

Наличие изоляционного слоя в конструкции препятствует распространению высокой температуры, увеличивает огнестойкость конструкции. Конструкция с изоляционным слоем прогревается 5,5 раз медленнее, чем аналогичная без изоляционного слоя.

Визуализация полученных результатов

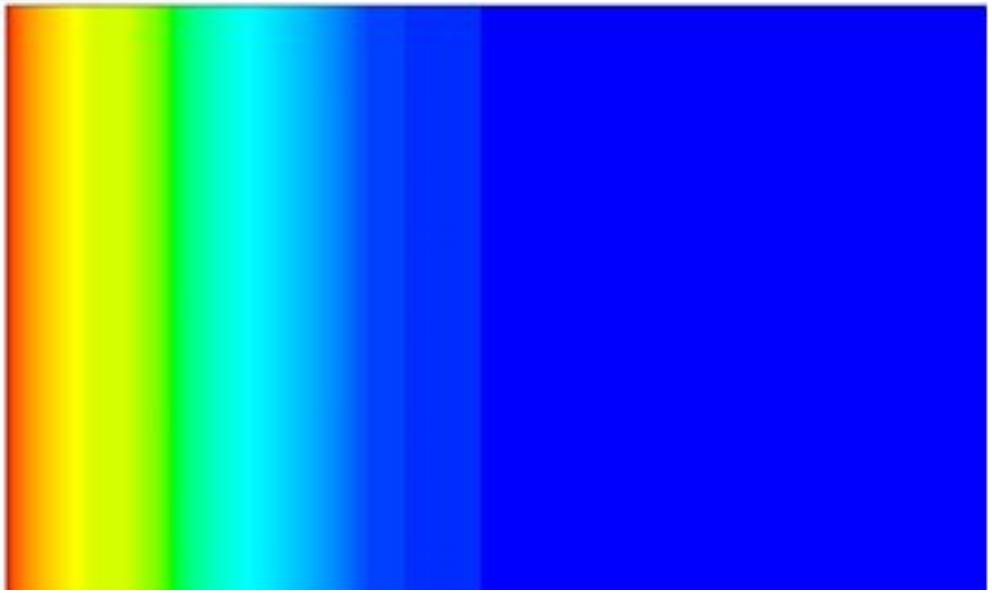

Рисунок 14 - Распределение температуры по толщине конструкции без изолятора спустя 600 секунд от начала процесса

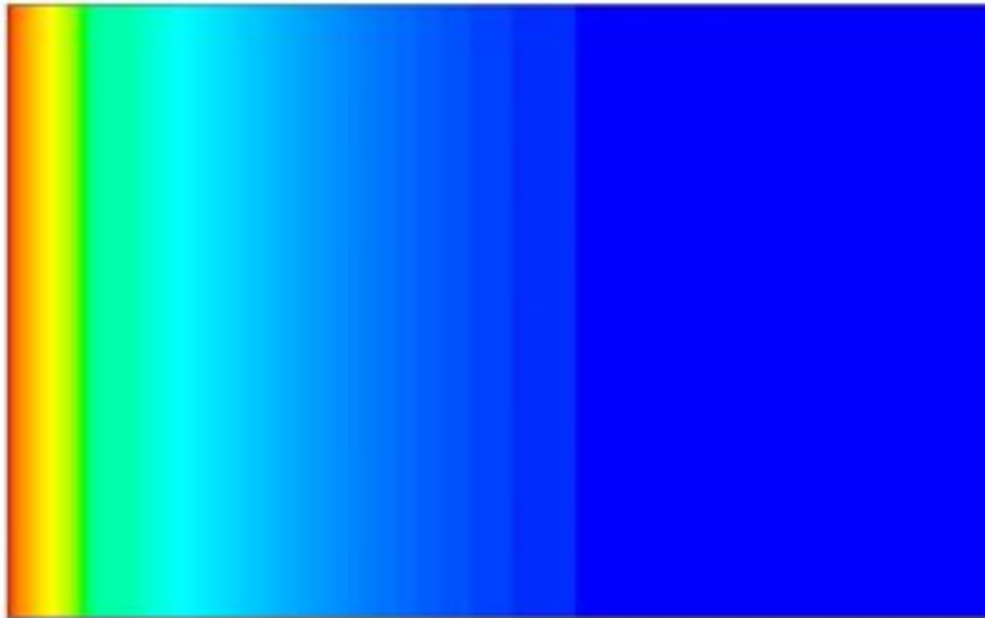

Рисунок 14.1 - Распределение температуры по толщине конструкции с изоляционным слоем из пеноплекса спустя 600 секунд от начала процесса

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из результатов моделирования следует, что четырехслойная конструкция, содержащая изолятор из пеноплекса или каменной ваты прогревается значительно медленнее, чем аналогичная конструкция без изолирующей вставки.

Рассматриваемую в работе четырехслойную пластину с теплотехнической точки зрения можно уже считать огнезащищенной конструкцией.

Это подтверждает использование данных негорючих теплоизоляционных материалов для выполнения огнезащиты подобных многослойных конструкций и увеличение их огнестойкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сиковский Д.Ф. Методы вычислительной теплофизики / Д.Ф. Сиковский. – Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2013. –98 с.
2. Исаков Г.Н. Моделирование тепло- и массопереноса в многослойных тепло- и огнезащитных покрытиях при взаимодействии с потоком высокотемпературного газа / Г.Н. Исаков, А.Я. Кузин // Физика горения и взрыва, 1998. –Т.34, №2. –С. 82-89.
3. Меркулова Н.Н. Методы приближенных вычислений: учебное пособие / Н.Н. Меркулова, М.Д. Михайлов. –2-е изд. –Томск: ТГУ, 2014. –764 с.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – Изд-во М., 1977. – 656 с.
5. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. Изд-во М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
6. Кузнецов Г. В. Разностные методы задач теплопроводности / Г. В. Кузнецов, М. А. Шеремет. – Изд-во Том. политех. ун-та, 2007. – 172 с.
7. Кольцова Э.М. Численные методы решения задач в химии и химической технологии: учеб. –метод. пособие. / Э.М. Кольцова, Л.С. Гордеев, А.С Скичко, А.В. Женса // Методы численного решения дифференциальных уравнений на основе разностных схем, 2005.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!