Работа в Excel 2007

1. Основы
2. Диаграммы
3. Численные методы
4. Статистика
5. Восстановление зависимостей
6. Моделирование

© К.Ю. Поляков, 2009-2012

Работа в Excel 2007

Тема 1. Основы

© К.Ю. Поляков, 2009-2012

Электронные таблицы

Основная задача – автоматические вычисления с данными в таблицах.

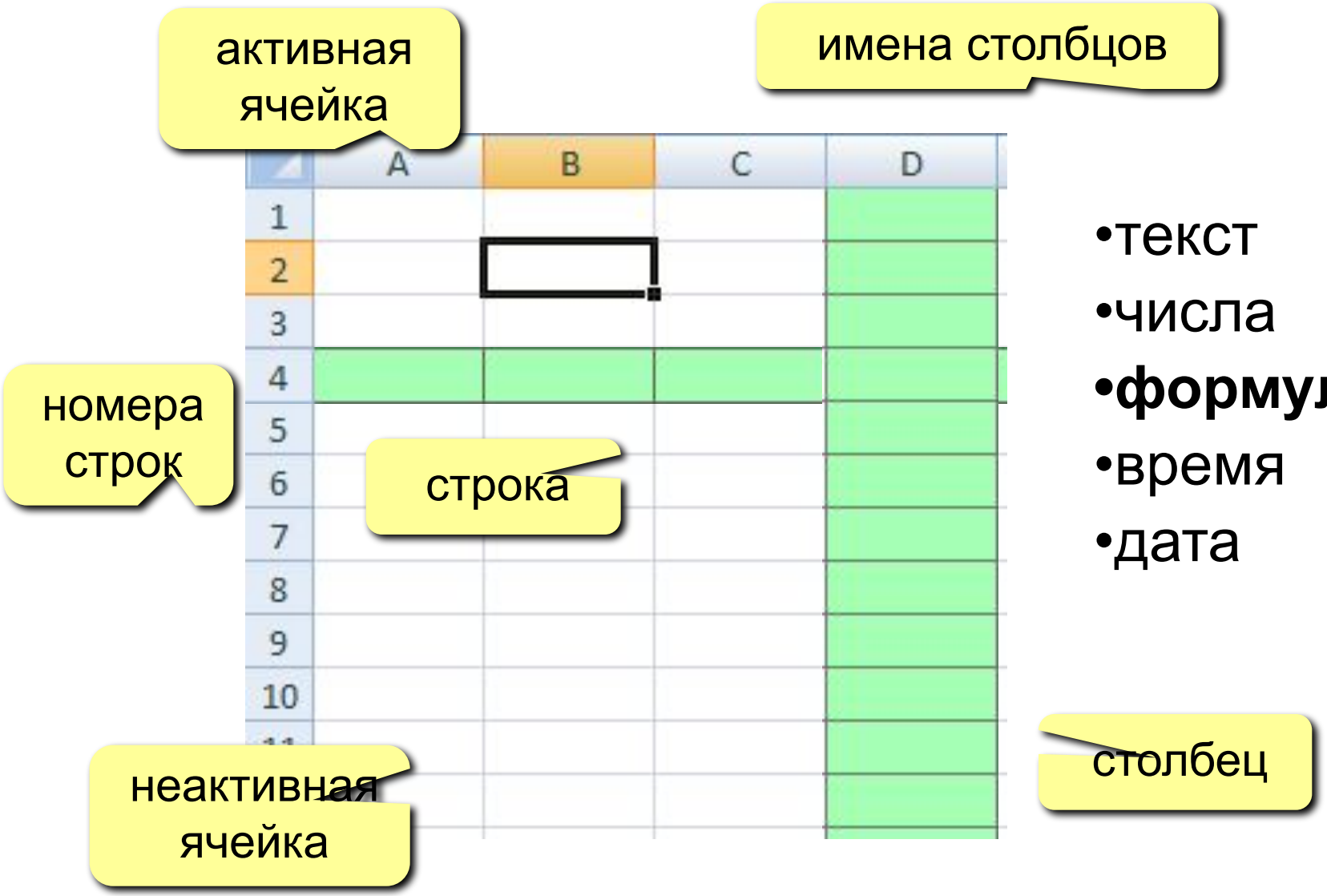
Кроме того:

- хранение данных в табличном виде
- представление данных в виде диаграмм
- анализ данных
- составление прогнозов
- поиск оптимальных решений
- подготовка и печать отчетов

Примеры:

- ***Microsoft Excel* – файлы `*.xls`, `*.xlsx`**
- ***OpenOffice Calc* – файлы `*.ods` – бесплатно**

Электронные таблицы



- текст
- числа
- **формулы**
- время
- дата

Начало работы с *Microsoft Excel*

Программы – Microsoft Office – Excel 2007

Файлы: **`*.xlsx`** (старая версия – **`*.xls`**)

`Вася.xlsx` *рабочая книга*

Лист 1 | **Лист 2** | **План по валу** | **Вал по**

переходы по листам

ЛКМ

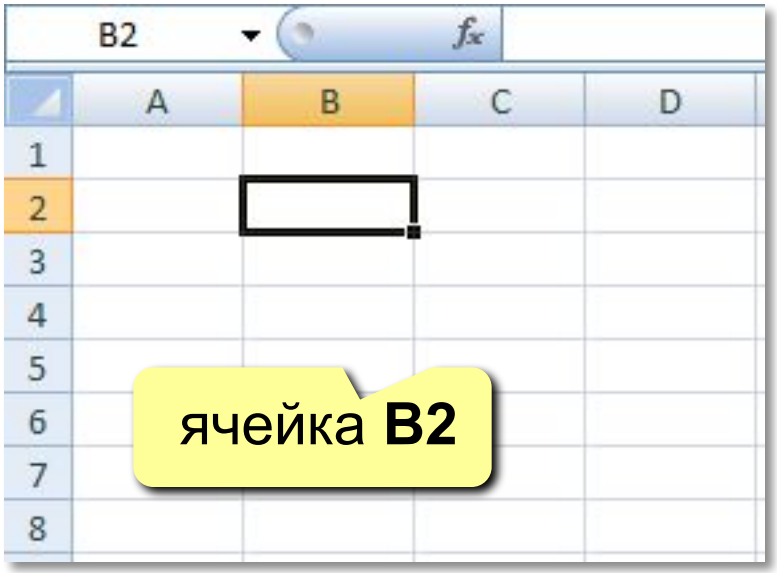
ПКМ

Лист 1 | Лист 2 | План по валу

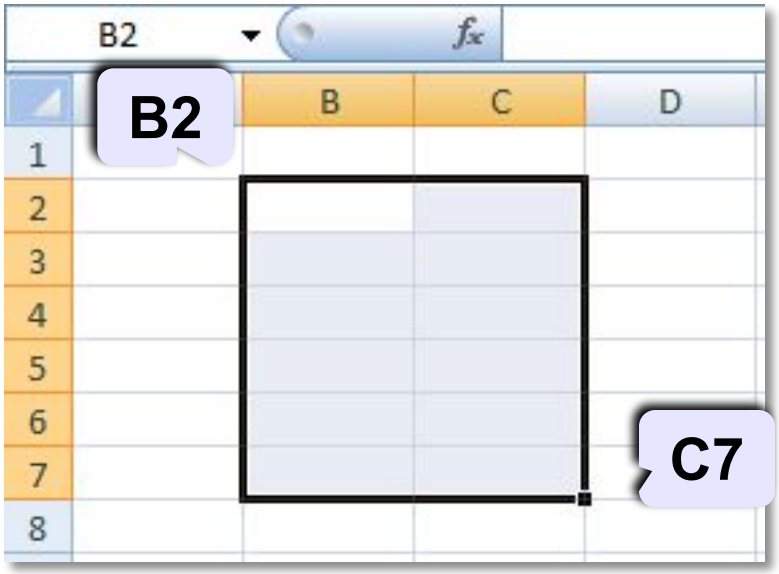
- Вставить...
- Удалить
- Переименовать
- Переместить/скопировать...
- Исходный текст
- Защитить лист...
- Цвет ярлычка
- Скрыть
- Отобразить...
- Выделить все листы

Адреса

адрес активной ячейки



диапазон **B2:C7**

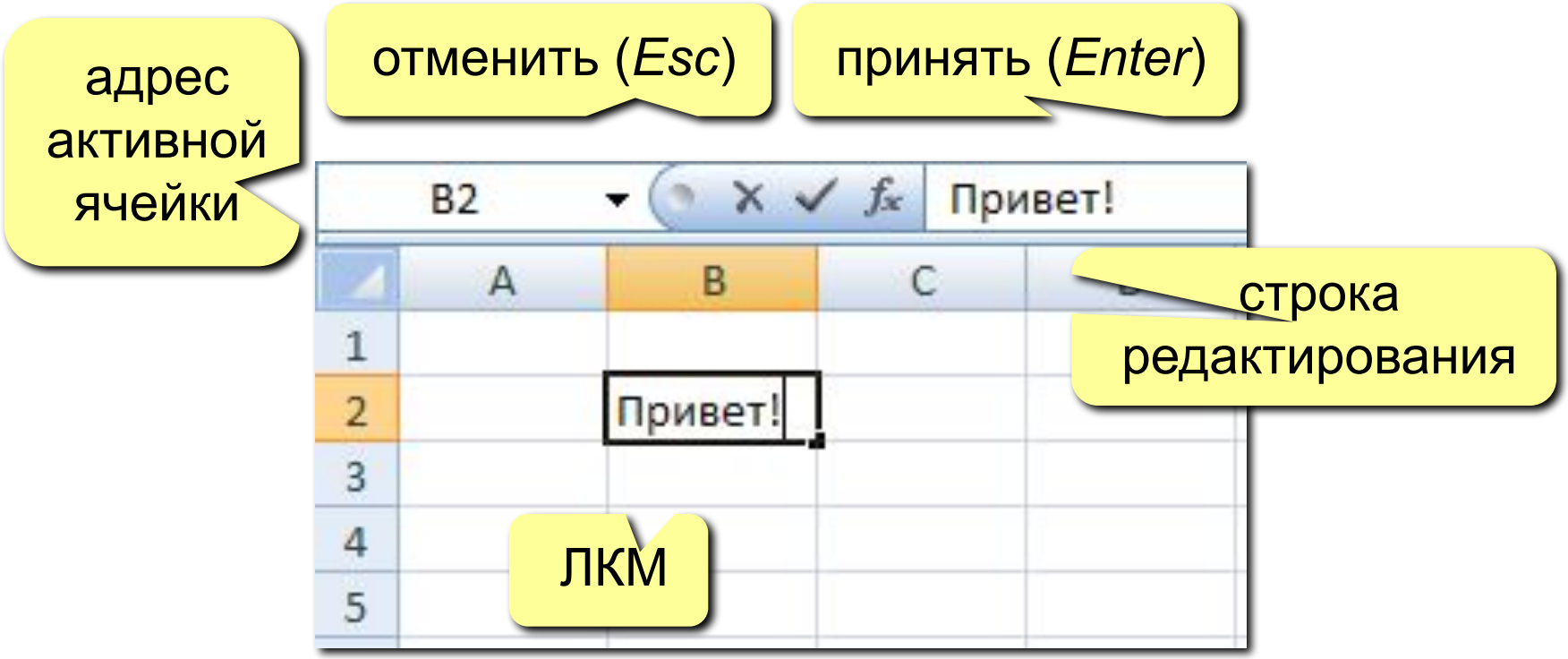


Ссылки в формулах:

=B2+2*C3 =A2+2*СУММ(B2:C7)

Формула всегда начинается знаком «=»!

Ввод данных

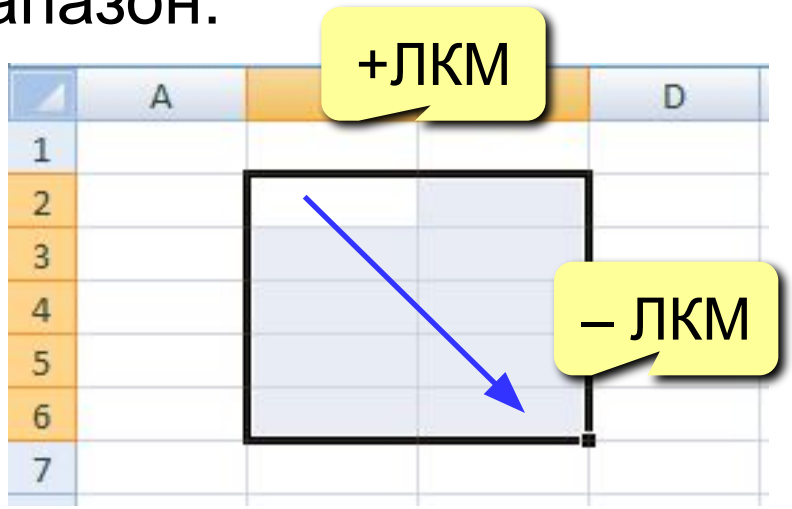


F2 – редактировать прямо в ячейке

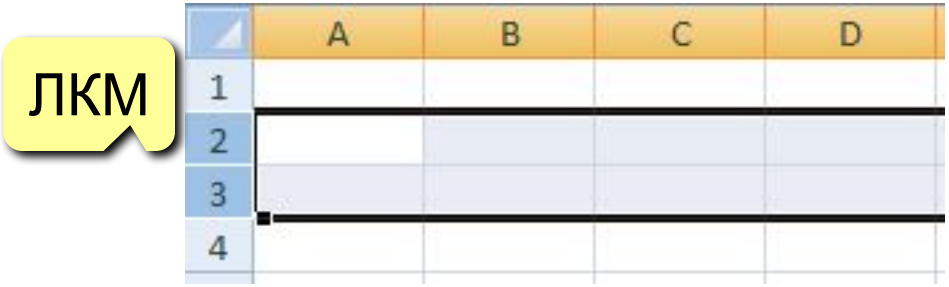
Выделение данных

ячейка:

диапазон:



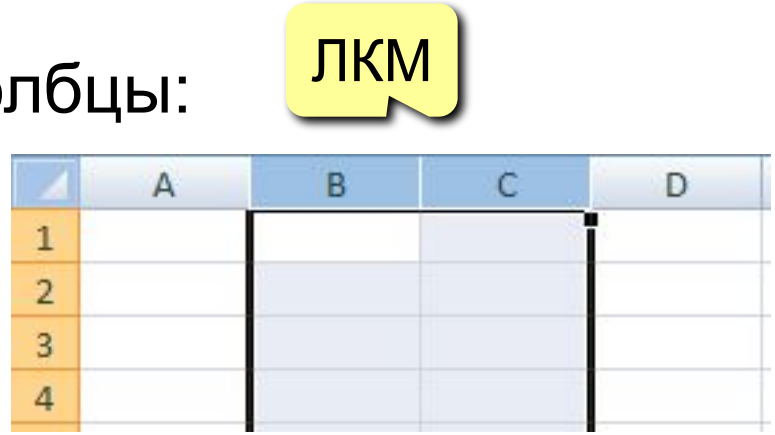
строки:



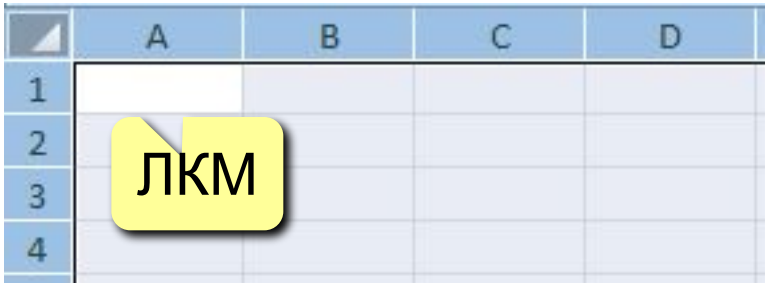
несвязанные диапазоны:

+Ctrl и выделять второй

столбцы:



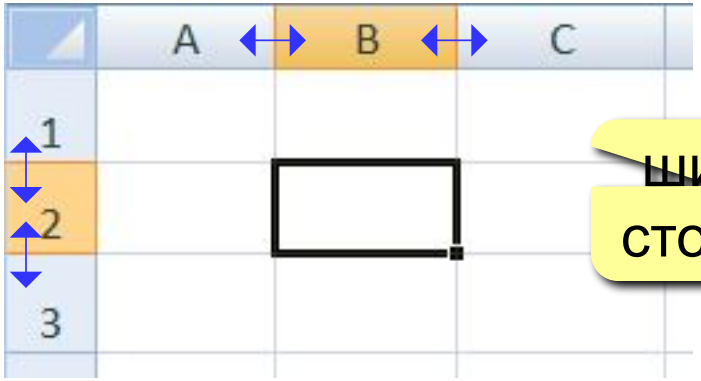
вся таблица:



Операции со строками и столбцами

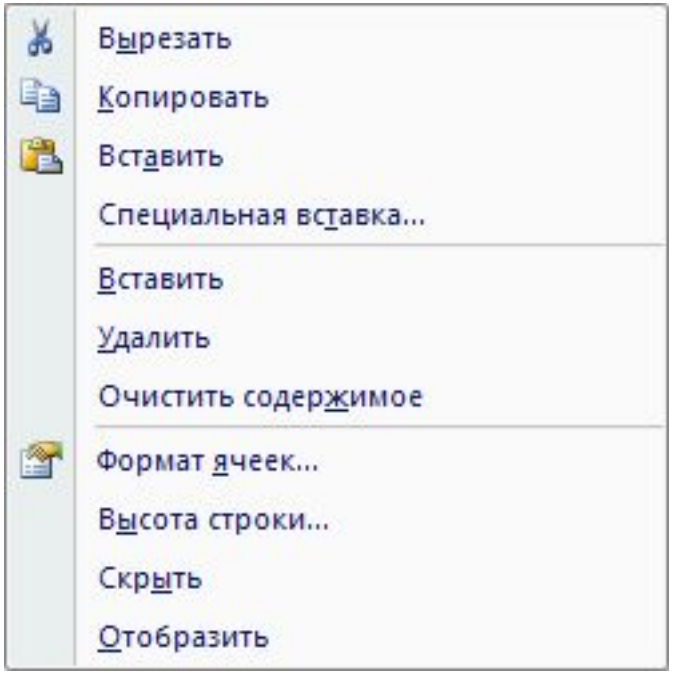
размеры

высота строк

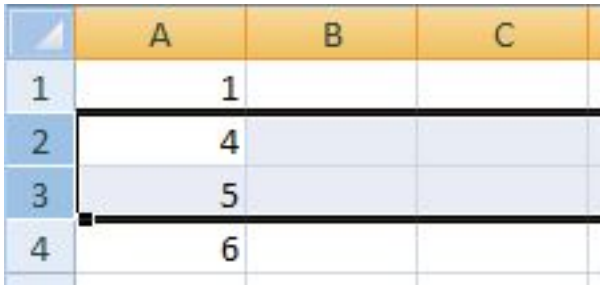


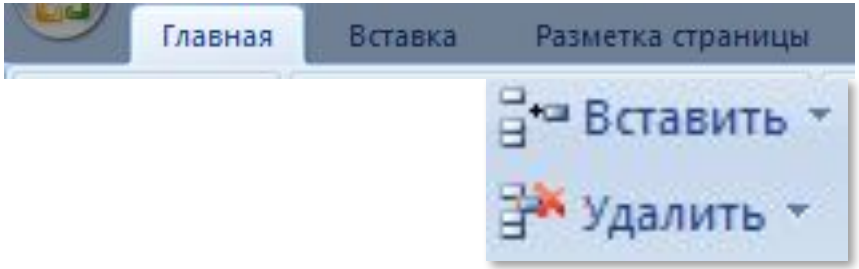
ширина столбцов

добавление, удаление

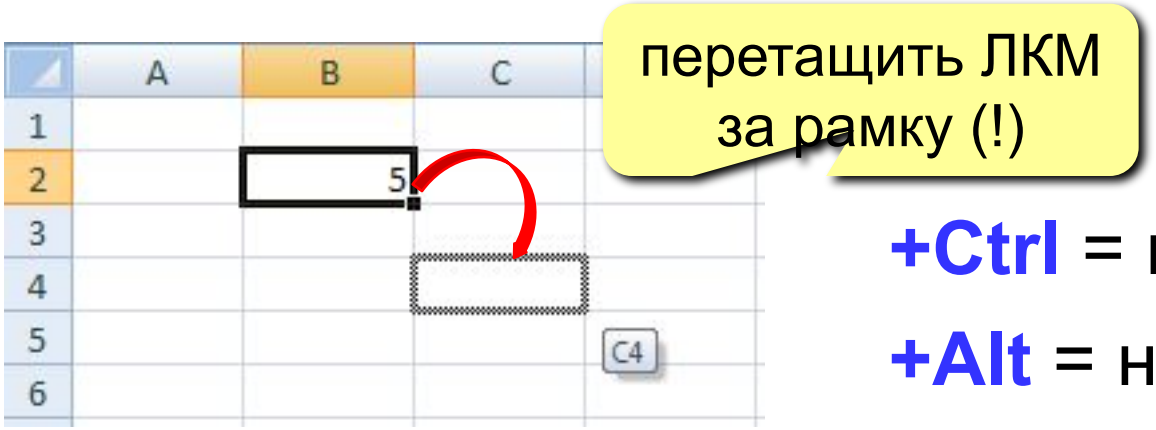


ПКМ





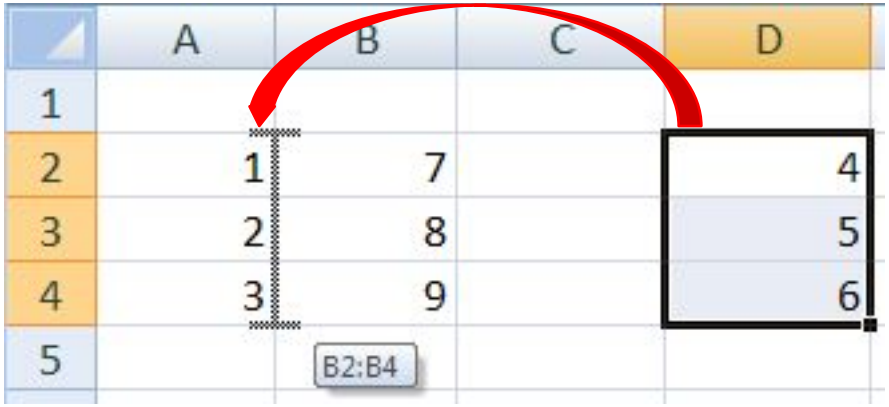
Перемещение и копирование



+Ctrl = копирование

+Alt = на другой лист

перемещение со сдвигом (+Shift)



Типы ссылок

относительные (меняются так же, как и адрес формулы)

	A	B	C
1			
2		=B5+C8	
3			=C6+D9

формула «переехала» на один столбец вправо и на одну строку вниз;

имя **столбца** ↑ на 1
номер **строки** ↑ на 1

абсолютные

(не меняются)

	A	B
1	=$B$5+$C$8	=$B$5+$C$8
2	=$B$5+$C$8	=$B$5+$C$8
3	=$B$5+$C$8	=$B$5+$C$8

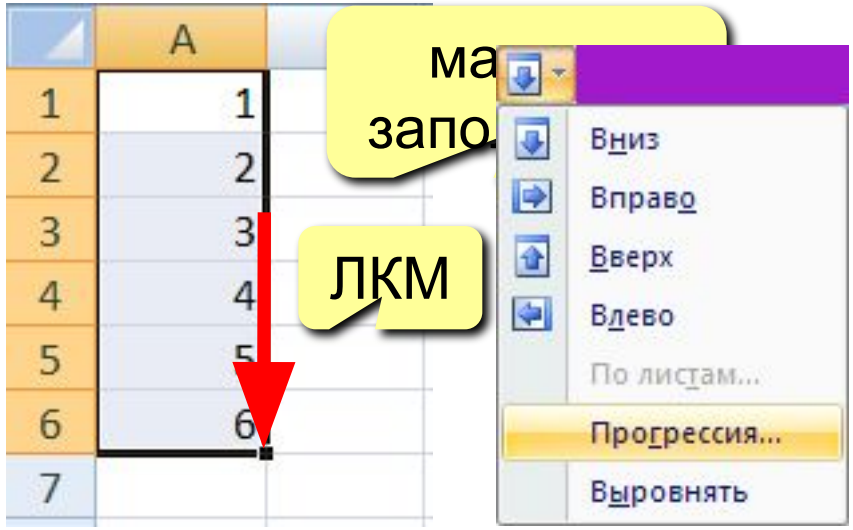
смешанные

(меняется только относительная часть)

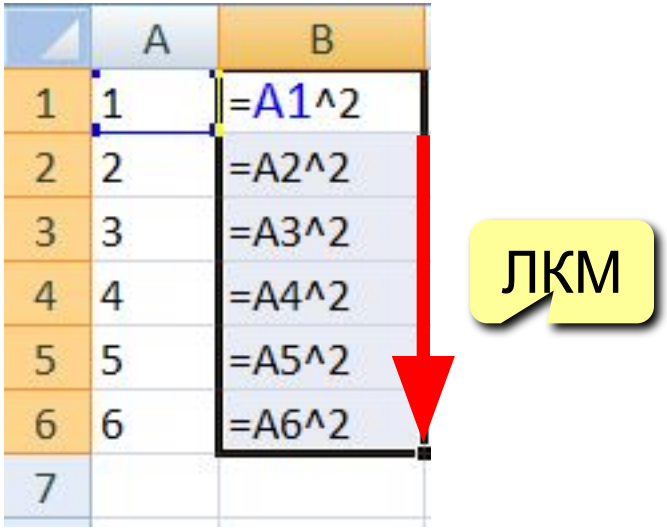
	A	B	C
1	=$B4+B$8	=$B4+C$8	=$B4+D$8
2	=$B5+B$8	=$B5+C$8	=$B5+D$8
3	=$B6+B$8	=$B6+C$8	=$B6+D$8

Заполнение рядов

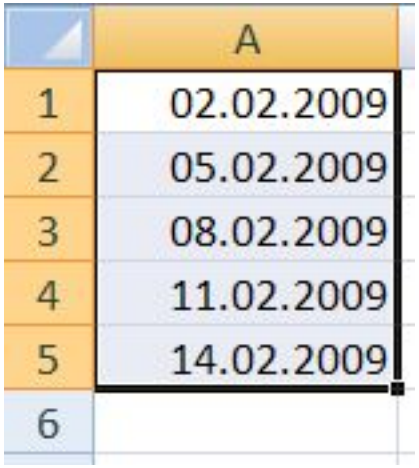
арифметическая прогрессия



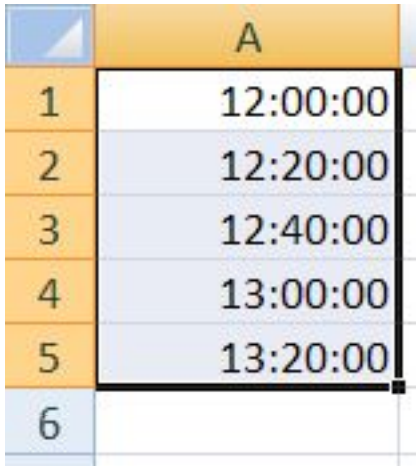
копирование формул



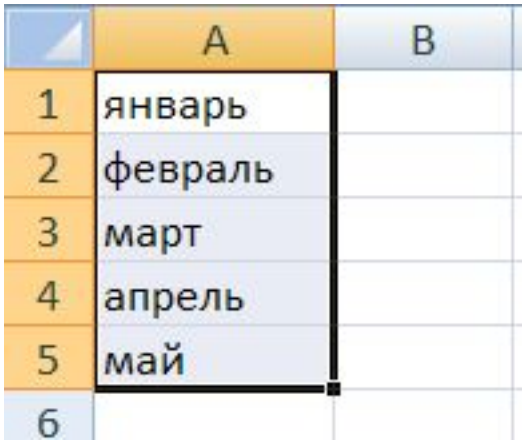
даты



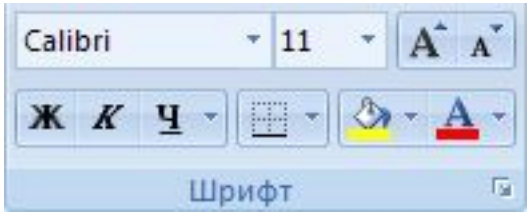
время



списки



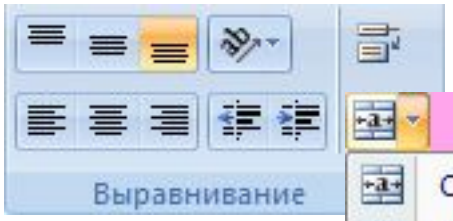
Оформление ячеек



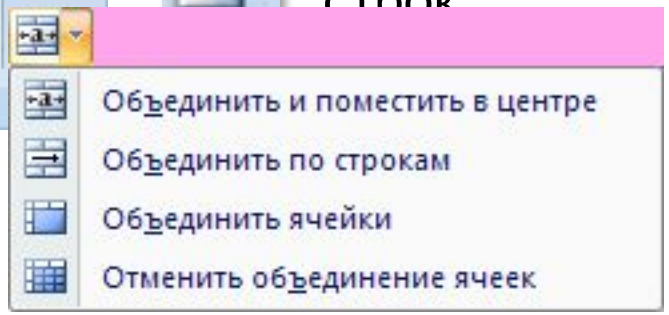
↑↓ размер

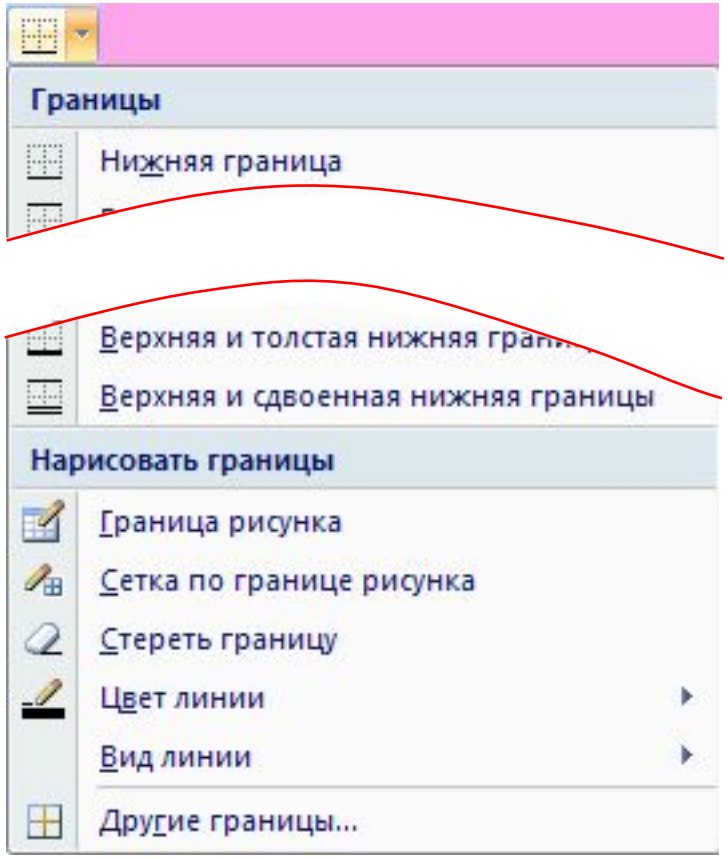
все свойства

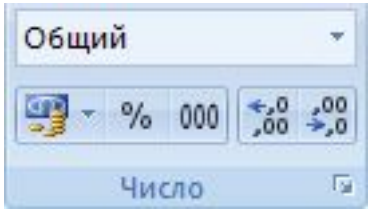
направление



в несколько строк







денежный формат

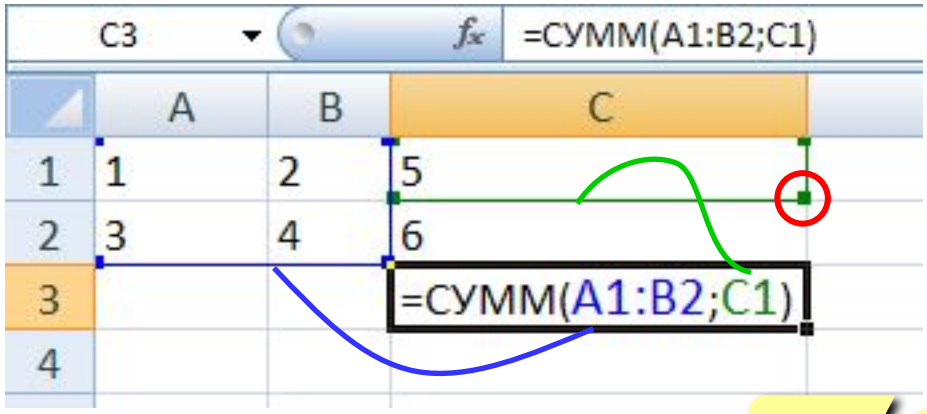
количество знаков в дробной части

Функции

ввод в строке редактирования

изменение диапазона

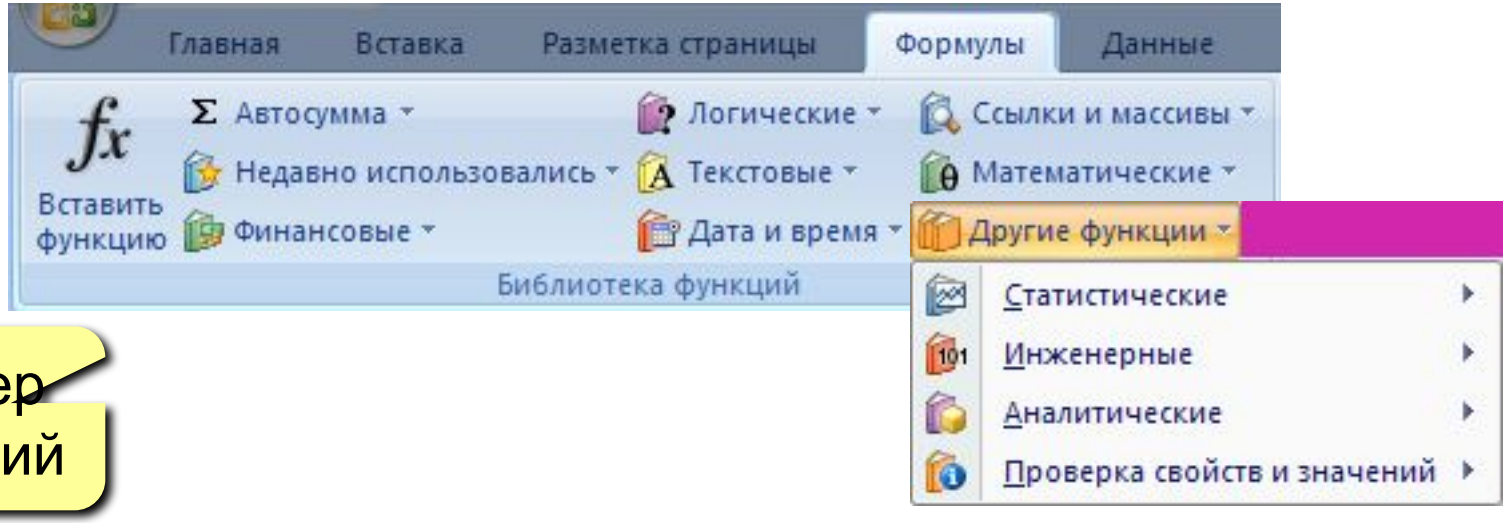
ввод в ячейке



диапазон

ячейка

Можно мышкой!



мастер функций

Некоторые функции

СУММ – сумма значений ячеек и диапазонов
СРЗНАЧ – среднее арифметическое числовых ячеек
МИН – минимальное значение
МАКС – максимальное значение

	A	B	C	D
1	1	3	=СУММ(A1:B2)	=МИН(A1:B2)
2	2	4	=СРЗНАЧ(A1:B2)	=МАКС(A1:B2)

	A	B	C	D
1	1	3	10	1
2	2	4	2,5	4

	A	B	C
1	1		=СРЗНАЧ(A1:B2)
2		3	

	A	B	C
1	1		2
2		3	

! Пустые и нечисловые ячейки не учитываются!

Некоторые функции

Сумма значений нескольких диапазонов (**СУММ**, **СРЗНАЧ**, **МИН**, **МАКС**)

	A	B	C	D	E
1	1	2	3		9
2					10
3	6	7	8		11
4					
5	=СУММ(A1:C1;A3:C3;E1:E3)				

Некоторые функции

СУММПРОИЗВ – сумма произведений двух массивов

	A	B	C
1	**Товар**	**Цена за 1 кг**	**Вес, кг**
2	Бананы	50р.	1,5
3	Апельсины	65р.	2,3
4	Киви	80р.	0,7
5	Абрикосы	120р.	0,5
6			
7	**Всего:**	=СУММПРОИЗВ(B2:B5;C2:C5)	5

Некоторые функции

СЧЁТ – количество числовых ячеек

СЧЁТЕСЛИ – количество ячеек, удовлетворяющих заданному условию (2-ой параметр)

	A	B	C
1	1	1	=СЧЁТ(A1:B3)
2	2	2	=СЧЁТЕСЛИ(A1:B3;"<3")
3	4		=СЧЁТЕСЛИ(A1:B3;1)

	A	B	C
1	1	1	5
2	2	2	4
3	4		2

Некоторые функции

СУММЕСЛИ – сумма ячеек диапазона, удовлетворяющих условию, которое накладывается **на другой диапазон**

Найти общий вес учащихся 9-А класса.

	A	B	C	D
1	Класс	Фамилия	Вес	
2	9-А	Иванов	45	
3	9-Б	Петров	52	
4	9-А	Сидоров	48	
5	9-Б	Васильев	55	
6	9-А	Семенов	51	
7				
8				=СУММЕСЛИ(A2:A6;"9-А";C2:C6)

диапазон для проверки условия

условие

диапазон для суммирования

Функция ЕСЛИ

ЕСЛИ – выбор из двух вариантов

	A	B
1	Баллы	
2	68	=ЕСЛИ(A2>[illegible]
3	75	=ЕСЛИ(A3>=70;"сдал";"не сдал")
4	37	
5	88	

условие

если «да»

если «нет»

```
=ЕСЛИ(B2="сдал"; ЕСЛИ(A2>80; 5; 4); "–")
```

	A	B
1	Баллы	Результат
2	68	не сдал
3	75	сдал
4	37	не сдал
5	88	сдал

Логические операции

НЕ – обратное условие, **НЕ(B2<10)** ⇔ **B2>=10**

И – одновременное выполнение всех условий

	A	B	C	D
1	Фамилия	Год рождения	Рост	Принят
2	Алексеев	1995	176	=ЕСЛИ(И(B2>1994;C2>175);"да";"-")
3	Березин	1995	167	=ЕСЛИ(И(B3>1994;C3>175);"да";"-")
4				=ЕСЛИ(И(B4>1994;C4>175);"да";"-")

=ЕСЛИ(И(B2>1994; C2>175);"да";"–")

	A	B	C	D
1	Фамилия	Год рождения	Рост	Принят
2	Алексеев	1995	176	да
3	Березин	1995	167	-
4	Викторов	1994	180	-

Логические операции

ИЛИ – выполнение хотя бы одного из условий

	A	B	C	D
1	Фамилия	Математика	Физика	Принят
2	Алексеев	100	67	=ЕСЛИ(ИЛИ(B2=100;C2=100;B2+C2>=180);"да";"-")
3	Березин	98	98	=ЕСЛИ(ИЛИ(B3=100;C3=100;B3+C3>=180);"да";"-")
4	Викторов	90	80	=ЕСЛИ(ИЛИ(B4=100;C4=100;B4+C4>=180);"да";"-")

```
=ЕСЛИ( ИЛИ(B2=100; C2=100; B2+C2>=180);"да";"–")
```

	A	B	C	D
1	Фамилия	Математика	Физика	Принят
2	Алексеев	100	67	да
3	Березин	98	98	да
4	Викторов	90	80	-

Подсчёт числовых значений

СЧЁТ – считает ячейки с числами или формулами, которые дают числа

=A1+1

	A	B	C
1	1	2	
2		Вася	
3			=СЧЁТ(A1:B2)

2

Подсчёт значений по условию

СЧЁТЕСЛИ – считает ячейки, удовлетворяющие условию

	A	B	C
1	1	2	=СЧЁТЕСЛИ(A1:B4;1)
2	3	1	
3	яблоко	дыня	
4	apple	дыня	

2

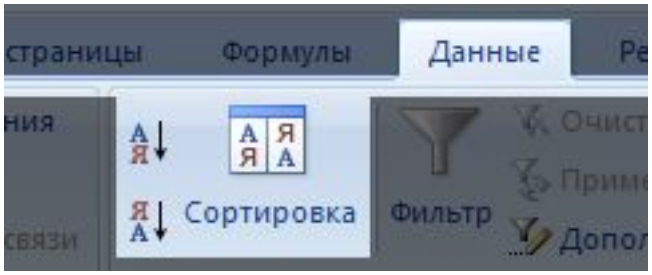
3

1

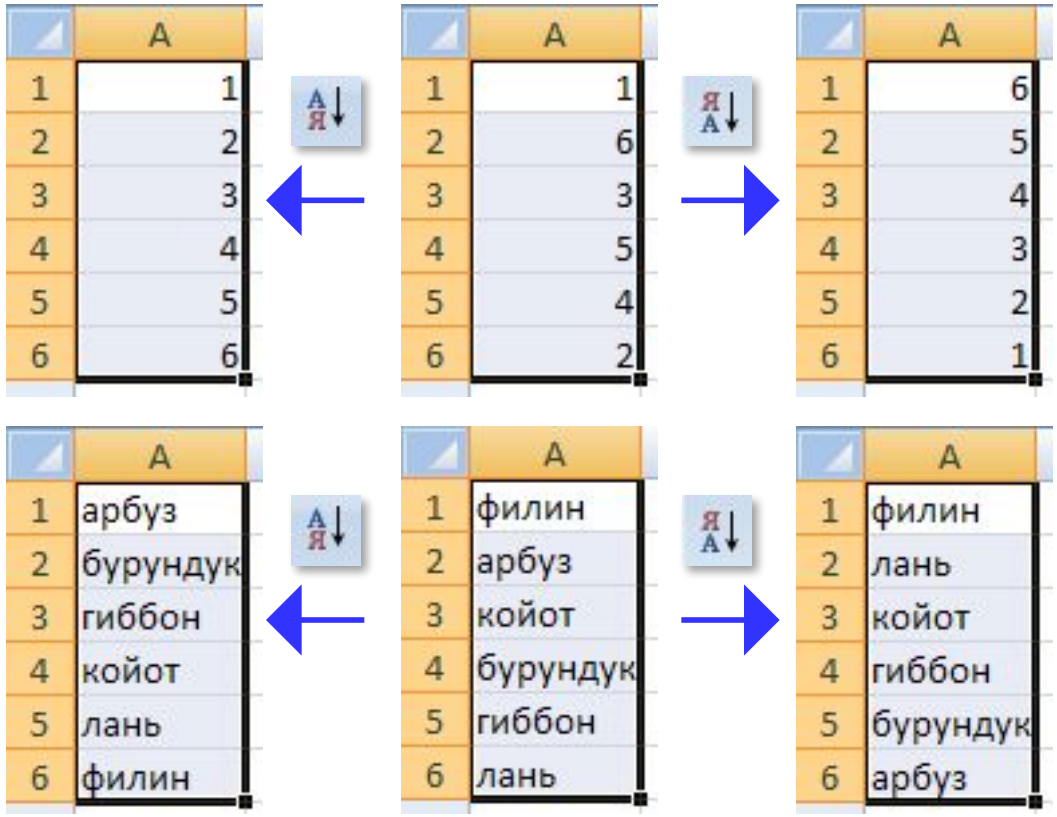
2

Сортировка

Сортировка – это расстановка элементов в заданном порядке.



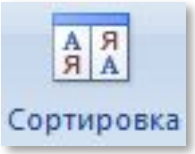
Сортировка одного столбца



Сортировка связанных данных

	A	B	C
1	Фамилия	Имя	Вес
2	Иванов	Кузьма	55
3	Иванов	Иван	54
4	Петров	Денис	62
5	Петров	Георгий	75
6	Петров	Семен	68
7	Сидоров	Степан	64
8	Сидоров	Матвей	67

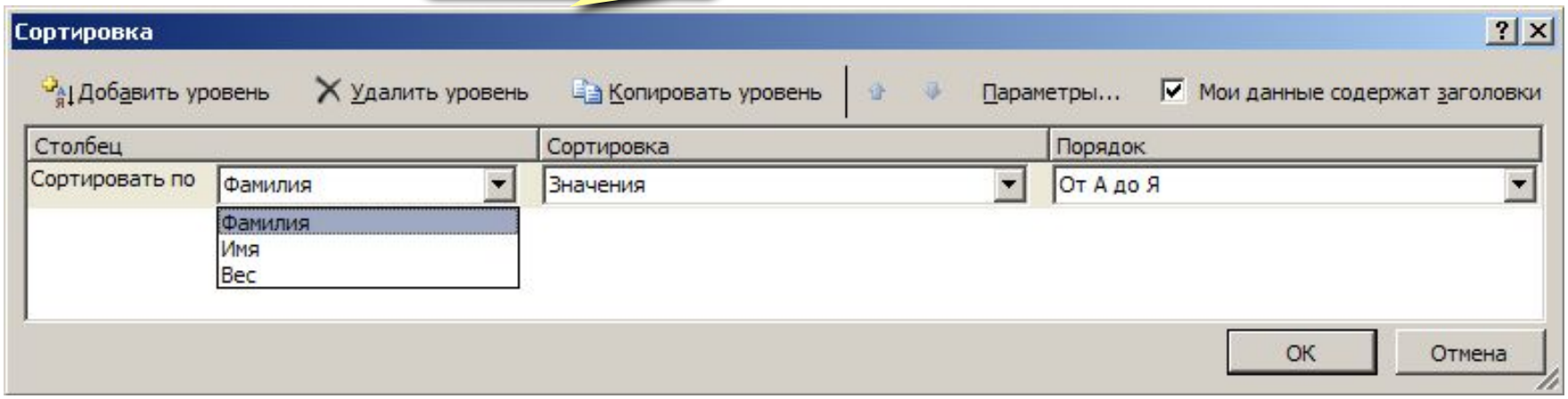
Почему нельзя сортировать по столбцу?



критерий

строки или столбцы

первая строка – это заголовки

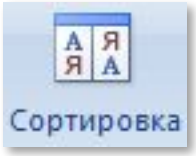


Многоуровневая сортировка

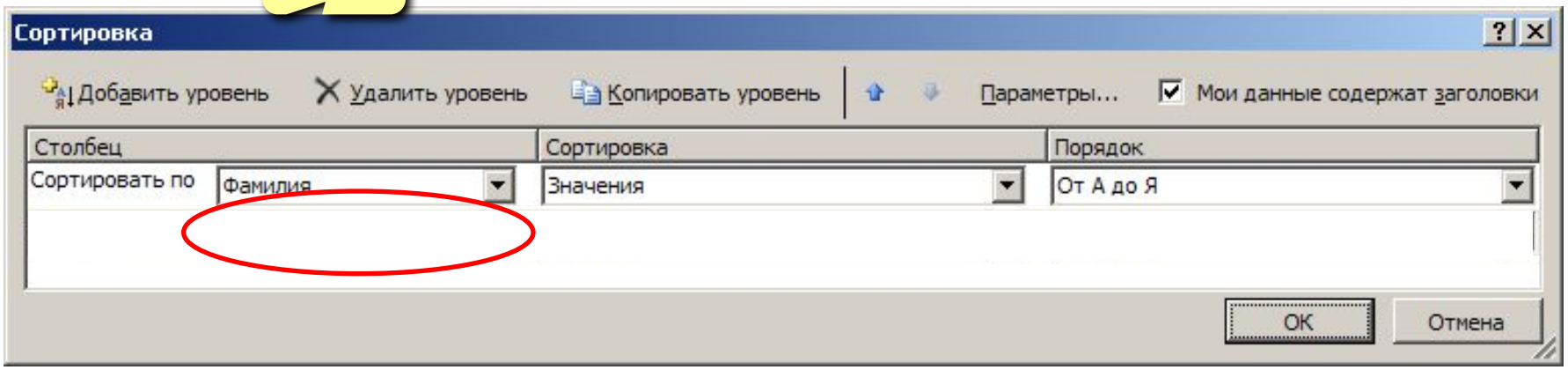
	A	B	C
1	Фамилия	Имя	Вес
2	Иванов	Иван	
3	Петров	Георгий	
4	Сидоров	Степан	
5	Сидоров	Матвей	
6	Петров	Денис	
7	Иванов	Кузьма	
8	Петров	Семен	

	A	B	C
1	Фамилия	Имя	Вес
2	Иванов	Иван	54
3	Иванов	Кузьма	55
4	Петров	Георгий	75
5	Петров	Денис	62
6	Петров	Семен	68
7	Сидоров	Матвей	67
8	Сидоров	Степан	64

Задача: расставить фамилии по людей *с одинаковыми* расставить в порядке *по именам*.



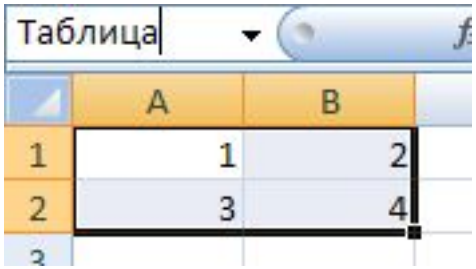
ЛКМ



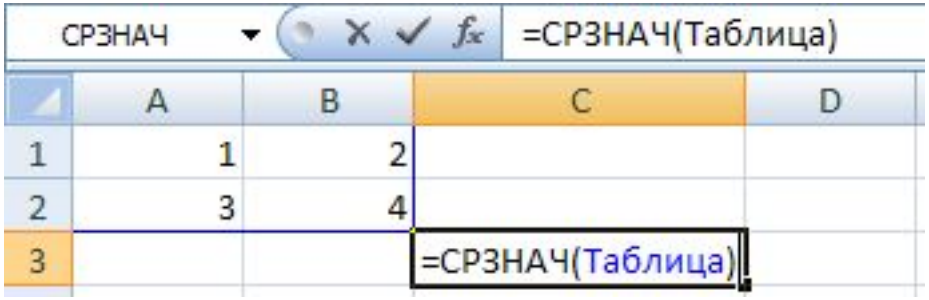
Имена ячеек и диапазонов

Присвоить имя

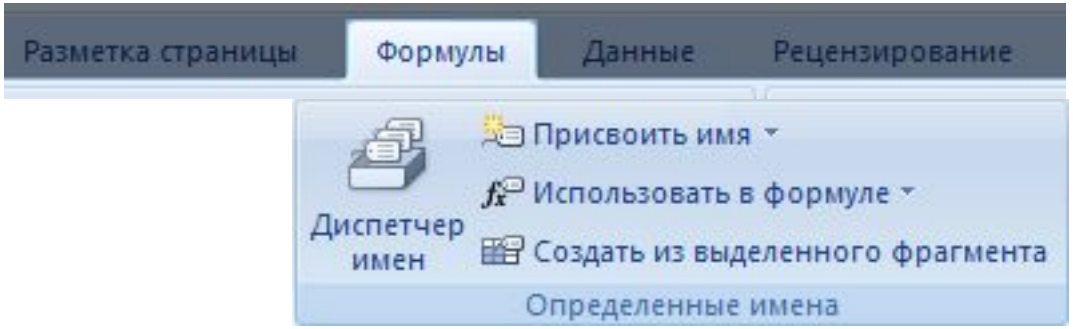
ввести имя



Имена в формулах



Работа с именами



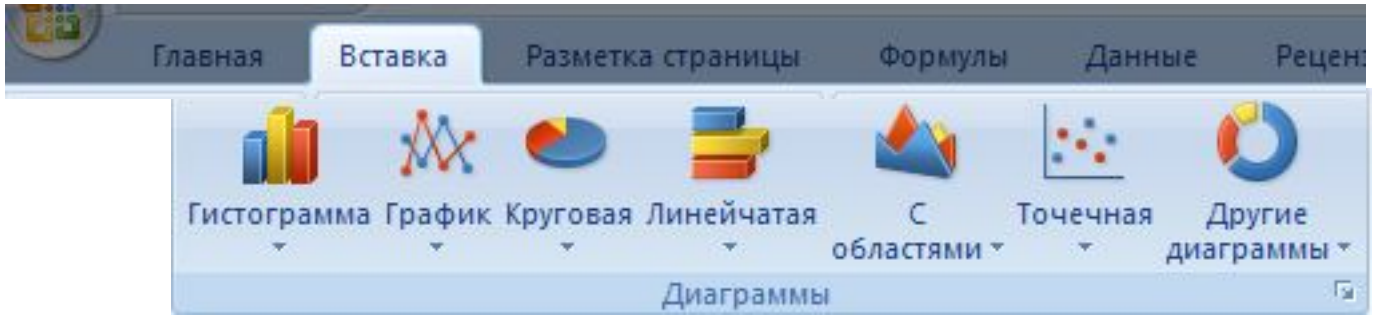
Работа в Excel 2007

Тема 2. Диаграммы

© К.Ю. Поляков, 2009-2012

Общий подход

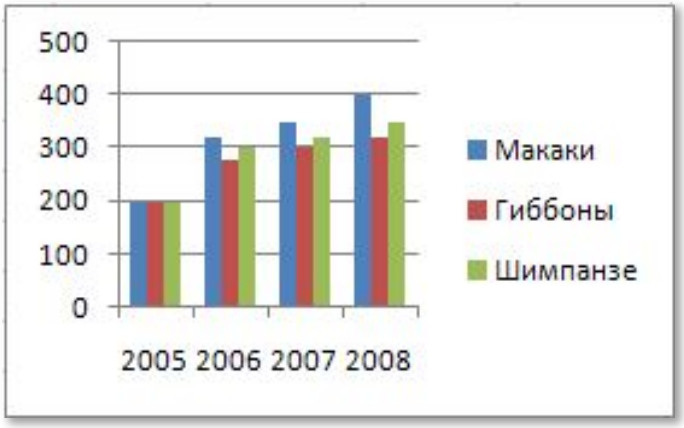
- диаграммы строятся на основе данных таблицы
- проще всего сначала выделить все нужные данные, а потом…



- все данные, которые должны обновляться автоматически, нужно выделить
- для выделения несвязанных диапазонов используем **+Ctrl**

Основные типы диаграмм

Гистограмма (столбчатая диаграмма): сравнение значений одного или нескольких рядов данных



Круговая: доли в сумме

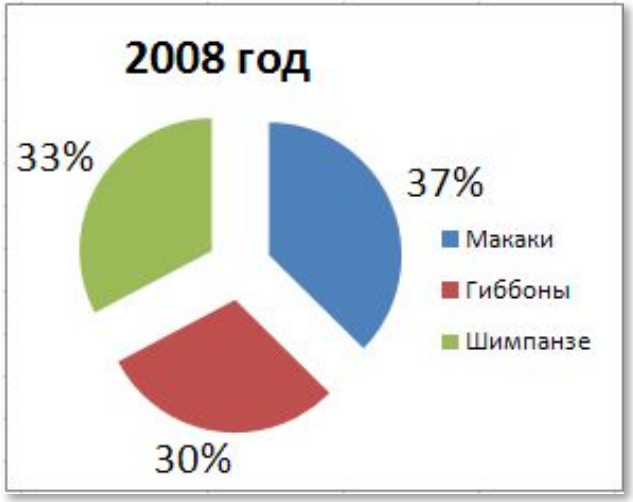
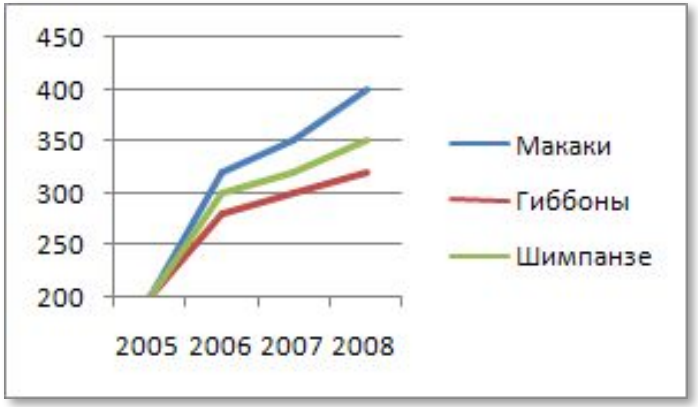
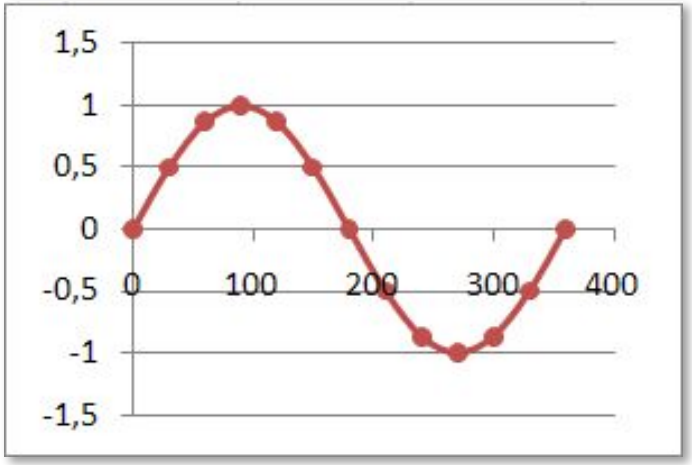


График: показывает изменение процесса во времени (**равномерные отсчеты**)

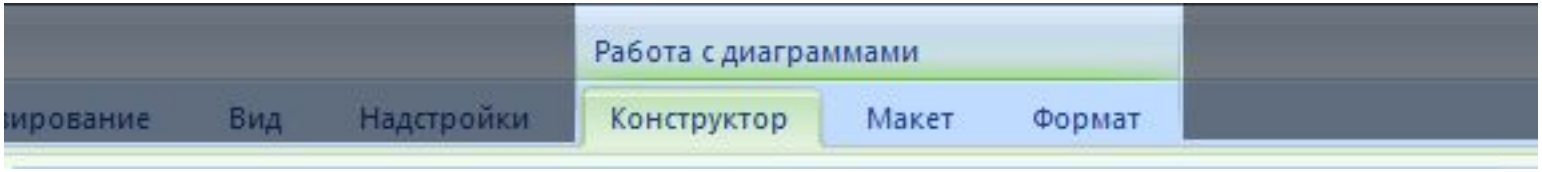


Точечная: связь между парами значений (график функции)

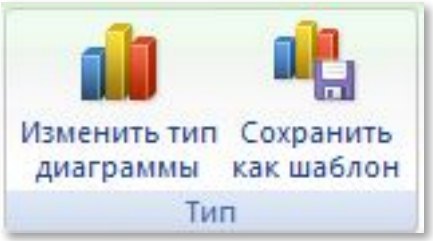


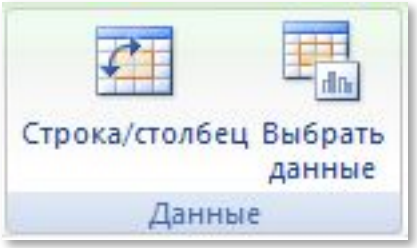
Элементы диаграмм

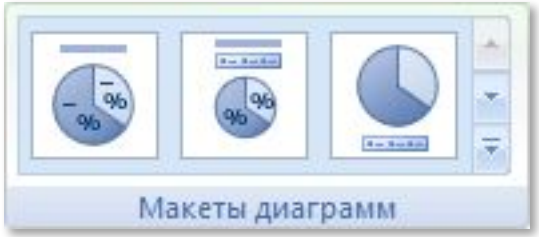
Настройка диаграммы и ее элементов



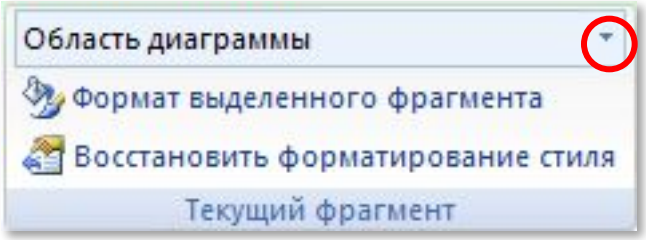
Конструктор: общие свойства

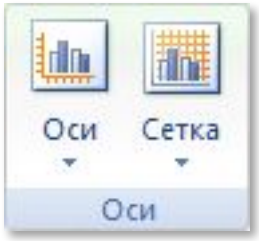




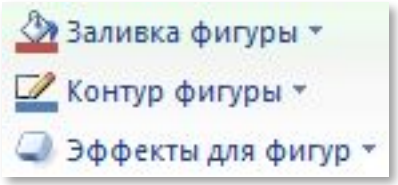


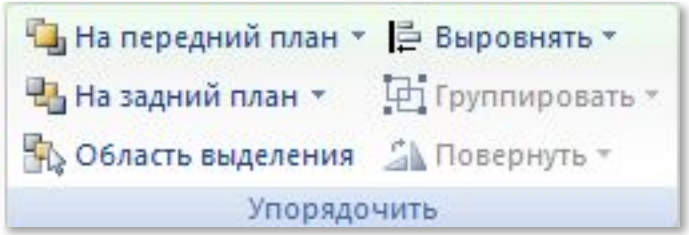
Макет: настройка свойств отдельных элементов

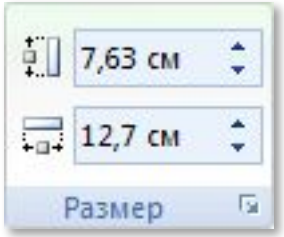




Формат: оформление отдельных элементов







Графики функций

Задача: построить график функции $y = x^2$ для $-5 \le x \le 5$.

Таблица значений функции: шаг 0,5

	A	B
1	x	y
2	-5	
3	-4,5	
4		
5		
6		

ЛКМ

	A	B
1	x	y
2	-5	
3	-4,5	
4	-4	
5	-3,5	
6	-3	
7	-2,5	
8	-2	

	A	B
1	x	y
2	-5	=A2^2
3	-4,5	
4	-4	
5	-3,5	
6	-3	
7	-2,5	
8	-2	

ЛКМ

	A	B
1	x	y
2	-5	=A2^2
3	-4,5	=A3^2
4	-4	=A4^2
5	-3,5	=A5^2
6	-3	=A6^2
7	-2,5	=A7^2
8	-2	=A8^2

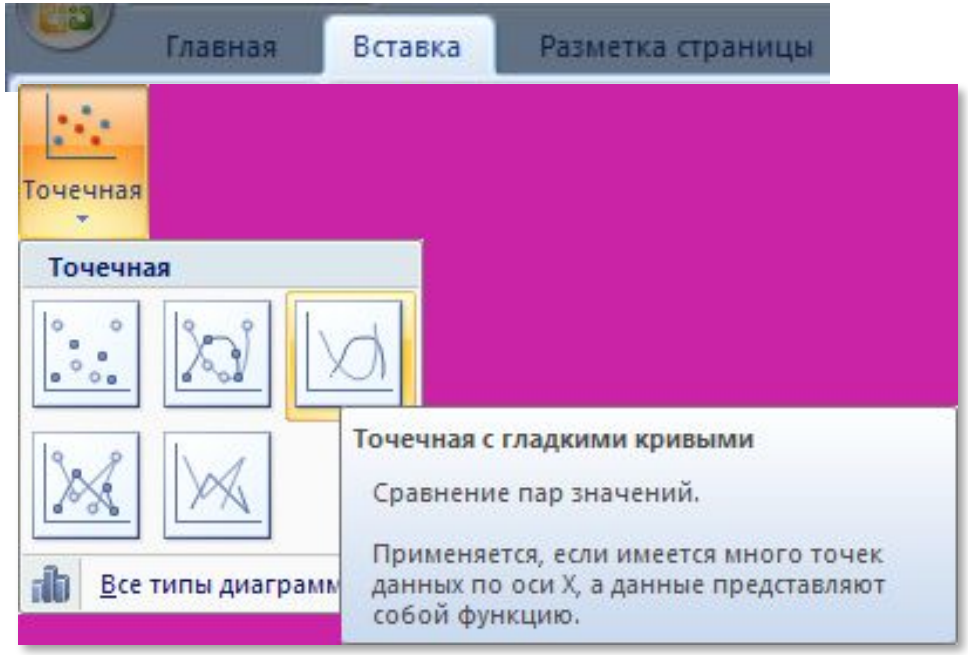
! Что зависит от шага?

Графики функций

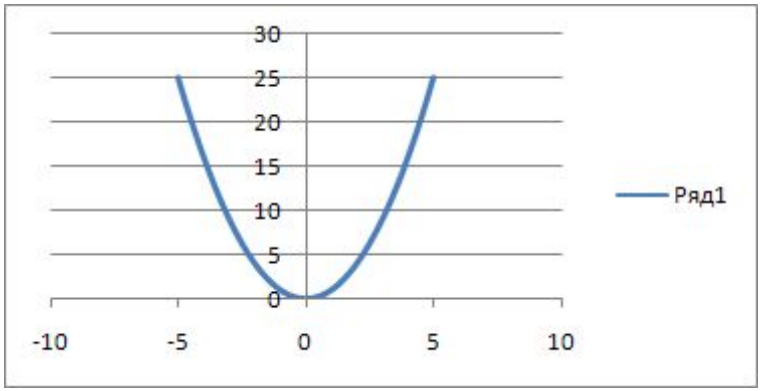
Вставка диаграммы «Точечная»:

выделить данные

	A	B
1	x	y
2	-5	25
3	-4,5	20,25
4	-4	16
5	-3,5	12,25
6	-3	9
7	-2,5	6,25
8	-2	4
9	-1,5	2,25



результат:



Работа в Excel 2007

Тема 3. Численные методы

© К.Ю. Поляков, 2009-2012

Решение уравнений

Задача: найти все решения уравнения $x^2 = 5\cos x$ на интервале [-5,5]

Как решить математическими методами?

Методы решения уравнений:

- **аналитические**: решение в виде формулы $x = \ldots$
- **численные**: *приближенное* решение, число
  1) выбрать *начальное приближение* x_0 «рядом» с решением

     Как выбрать начальное приближение?

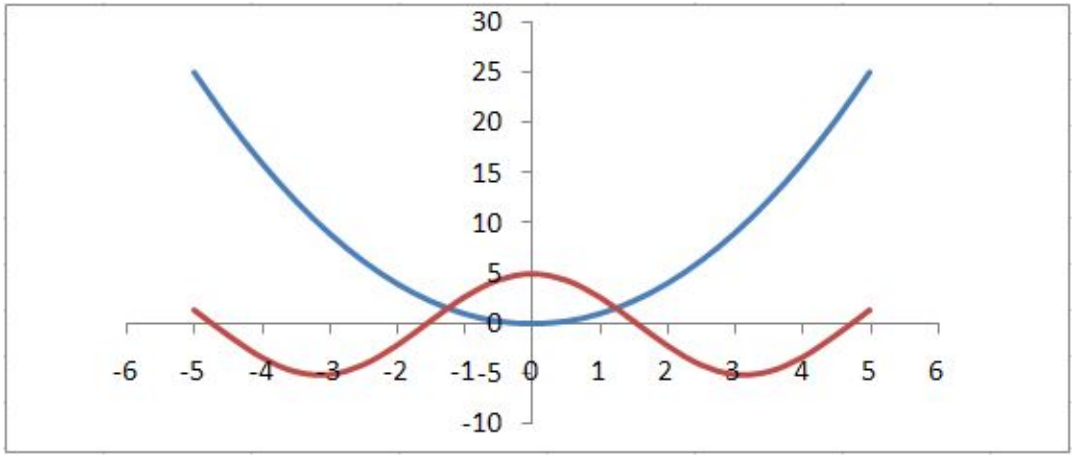
  2) по некоторому алгоритму вычисляют первое приближение, затем – второе и т.д. $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots$
  3) вычисления прекращают, когда значение меняется очень мало (метод сходится) $x_0 \to \ldots \to x_{15} \to x_{16} \approx x^*$

Решение уравнения $x^2 = 5\cos x$

1. Таблица значений функций на интервале [-5,5]

	A	B	C	D
1	x	f1	f2	
2	-5	=A2^2	=5*COS(A2)	
3	-4,5			
4				

2. Графики функций (диаграмма «Точечная»)



2 решения:
начальные приближения

$$x_0 = -1{,}5$$

$$x_0 = 1{,}5$$

Решение уравнения $x^2 = 5\cos x$

3. Подготовка данных

начальное приближение

	E	F	G	H
1	x	f1	f2	f2-f1
2	-1,5	=E2^2	=5*COS(E2)	=F2-G2
3				

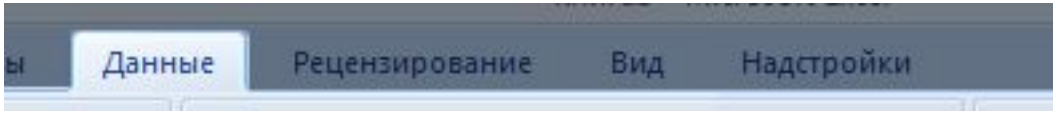
целевая ячейка

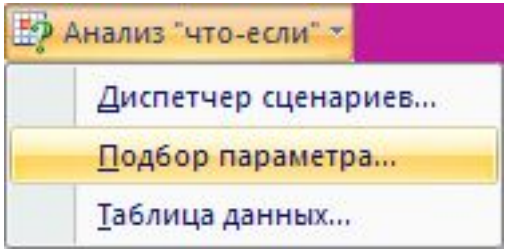
Цель: H2=0

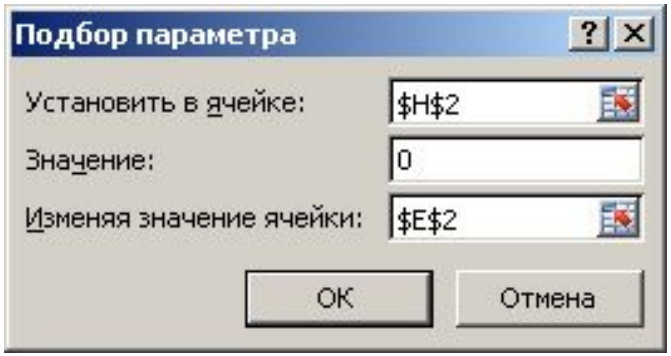
Зачем нужна разность?

Решение уравнения $x^2 = 5\cos x$

4. Подбор параметра







ошибка

решение уравнения

	E	F	G	H
1	**x**	**f1**	**f2**	**f2-f1**
2	-1,252	1,568	1,567	0,00053

Почему не нуль?

Как найти второе решение?

Оптимизация

Оптимизация – это поиск оптимального (наилучшего) варианта в заданных условиях.

Оптимальное решение – такое, при котором некоторая заданная функция (*целевая функция*) достигает минимума или максимума.

Постановка задачи:

- **целевая функция**

$$f(x) \to \min \quad \text{(расходы, потери, ошибки)}$$

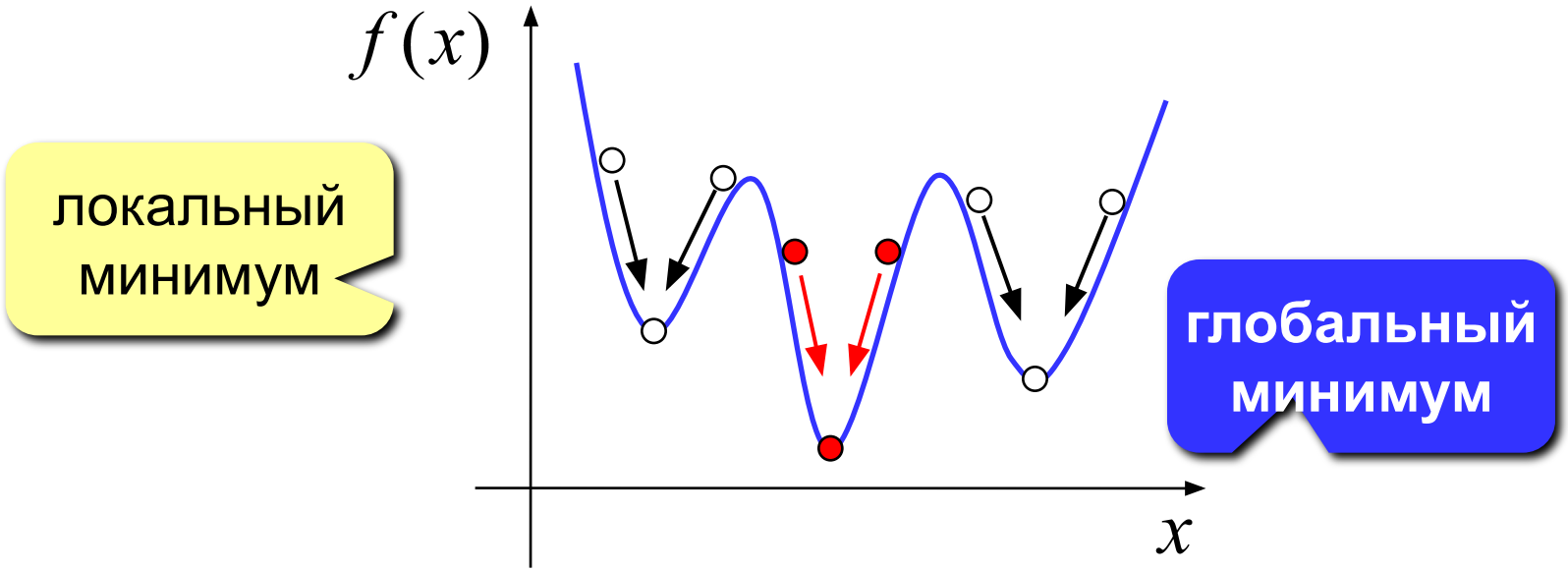
$$f(x) \to \max \quad \text{(доходы, приобретения)}$$

- **ограничения**, которые делают задачу осмысленной

Задача без ограничений: построить дом при минимальных затратах.

Решение: не строить дом вообще.

Оптимизация

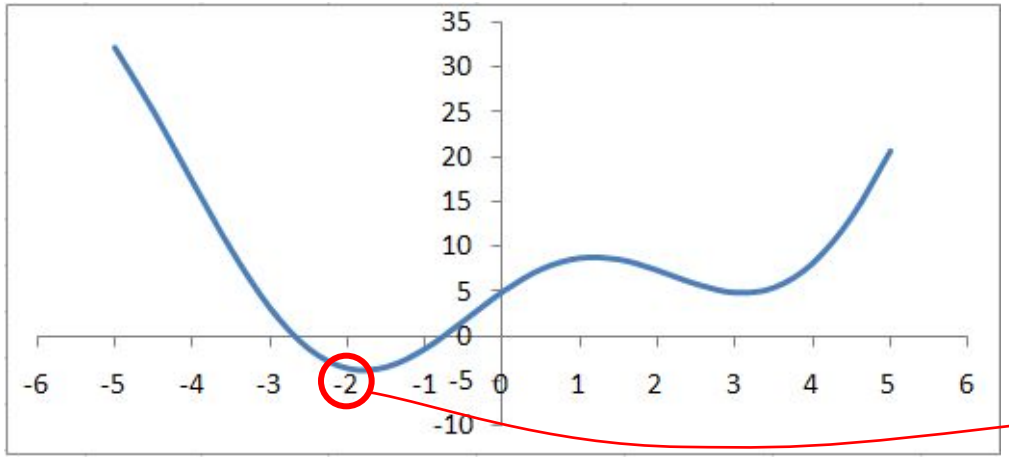


- обычно нужно найти **глобальный минимум**
- большинство численных методов находят только **локальный минимум**
- минимум, который найдет *Excel,* зависит от выбора начального приближения («шарик на горке скатится в ближайшую ямку»)

Поиск минимума функции

$$y = x^2 + 6\sin x + 5\cos x$$

1. Строим график функции (диаграмма «Точечная»)



Зачем нужен график?

начальное приближение

$$x_0 = -2$$

2. Подготовка данных

начальное приближение

	E	F
1	x	f
2	-2	=E2^2+6*SIN(E2)+5*COS(E2)

целевая ячейка

Изменение E2 должно влиять на F2!

Поиск минимума функции

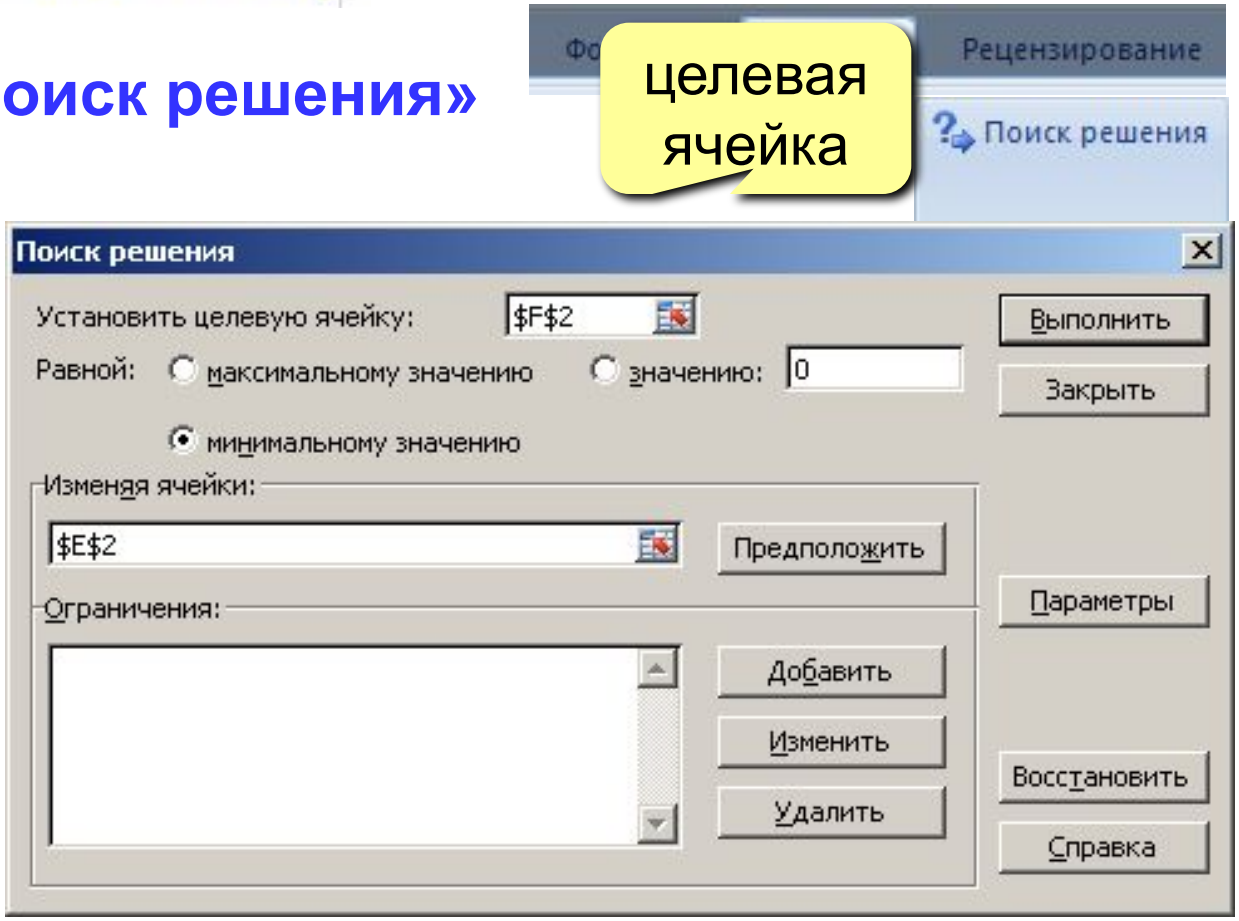
	E	F
1	x	f
2	-2	=E2^2+6*SIN(E2)+5*COS(E2)

3. Надстройка «Поиск решения»

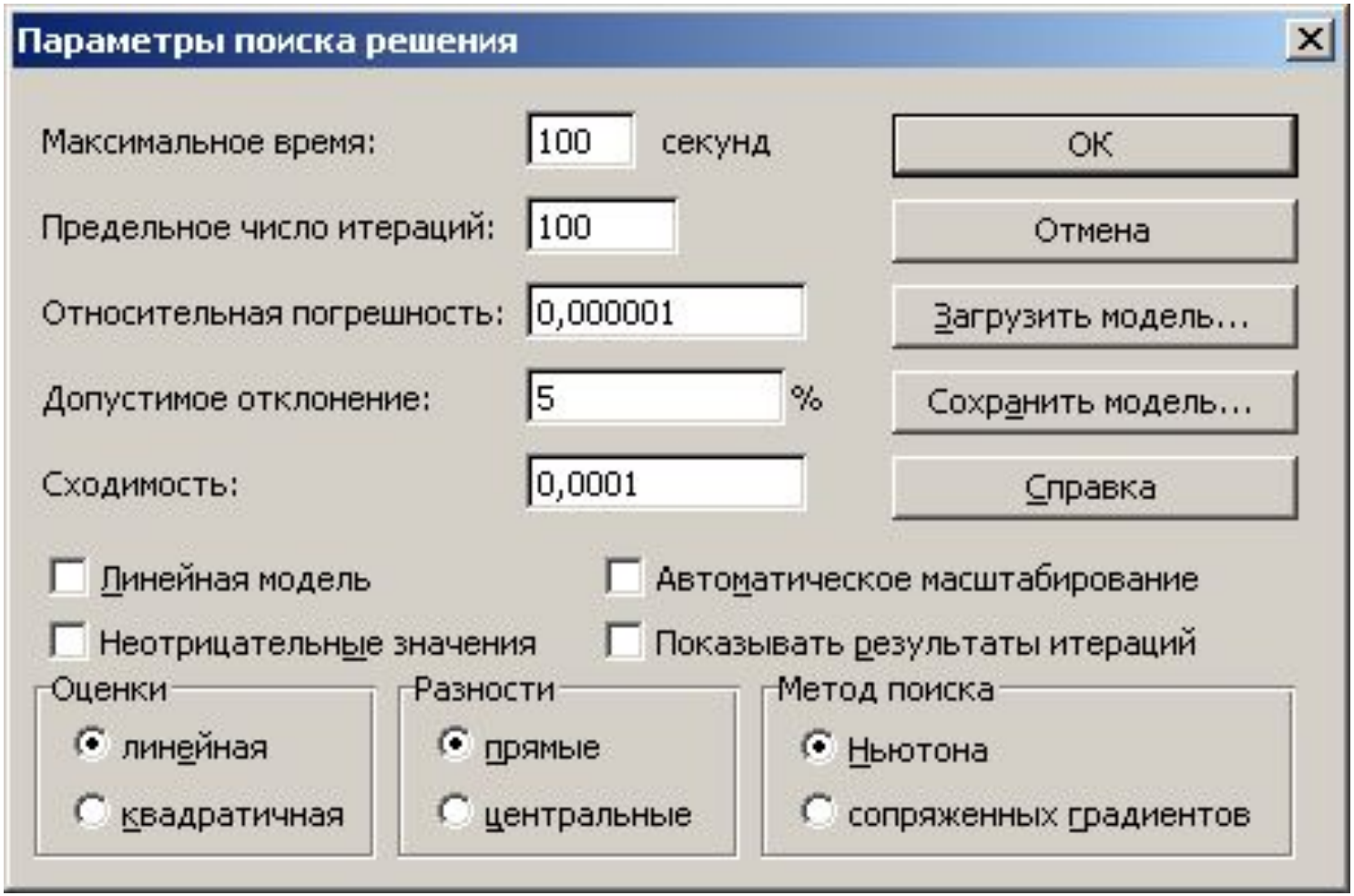
целевая ячейка

изменяемые ячейки:
E2
D2:D6
D2:D6; C5:C8

ограничения
A1 <= 20
B2:B8 >= 5
A1 = целое



Параметры оптимизации



Оптимизация

Подбор параметра – это оптимизация?

Надстройка «Поиск решения» позволяет:

- искать минимум и максимум функции
- использовать несколько изменяемых ячеек и диапазонов
- вводить ограничения (<=, >=, целое, двоичное)

Как влияет ограничение «A1-целое» на сложность решения задачи?

Работа в Excel 2007

Тема 4. Статистика

© К.Ю. Поляков, 2009-2012

Ряд данных и его свойства

Ряд данных – это упорядоченный набор значений

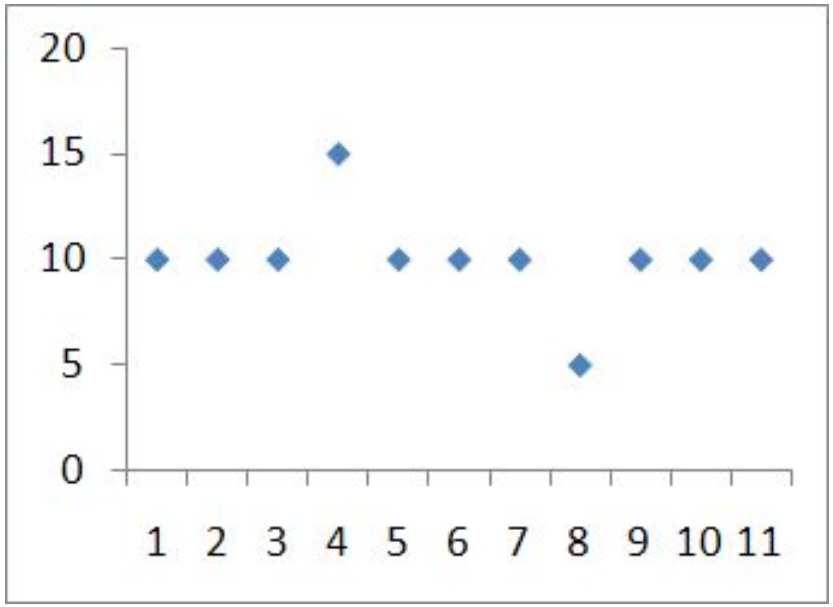
$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

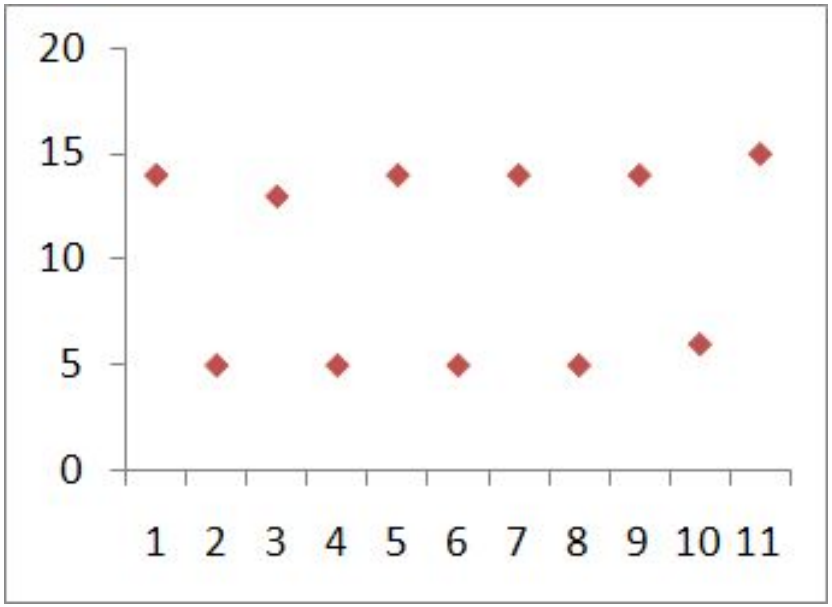
Основные свойства (ряд **A1:A20**):

- количество элементов **=СЧЕТ(A1:A20)**
- количество элементов, удовлетворяющих некоторому условию:
  = СЧЕТЕСЛИ(A1:A20;"<5")
- минимальное значение **=МИН(A1:A20)**
- максимальное значение **=МАКС(A1:A20)**
- сумма элементов **=СУММ(A1:A20)**
- среднее значение **=СРЗНАЧ(A1:A20)**

Дисперсия

Для этих рядов одинаковы МИН, МАКС, СРЗНАЧ





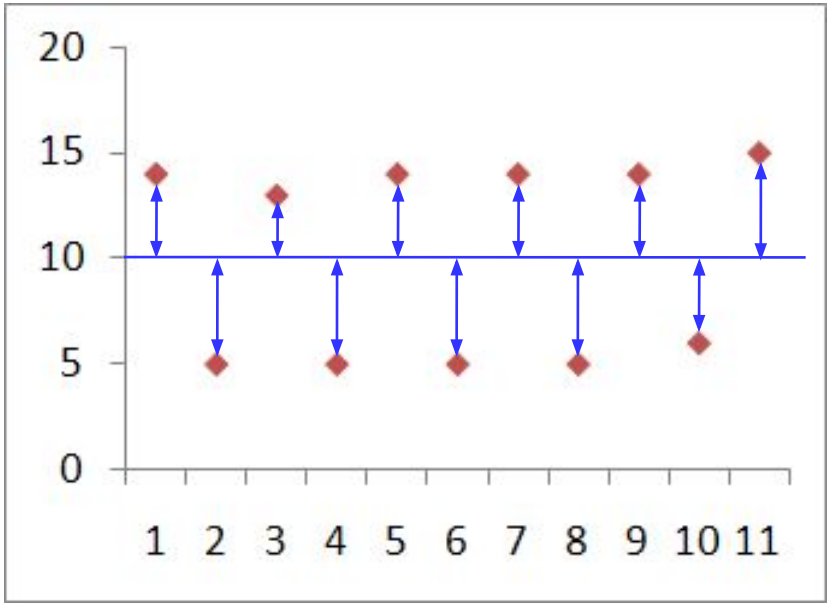
В чем различие?

Дисперсия («разброс») – это величина, которая характеризует разброс данных относительно среднего значения.

Дисперсия

$$D_x = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$ среднее арифметическое



$(x_1 - \bar{x})^2$ квадрат отклонения x_1 от среднего

D_x *средний* квадрат отклонения от среднего значения

Дисперсия и СКВО

Стандартная функция

=ДИСПР(A1:A20)

Функции – Другие – Статистические

Что неудобно:

если x измеряется в метрах,

то D_x – в м^2

В каких единицах измеряется?

СКВО = среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

=СТАНДОТКЛОНП(A1:A20)

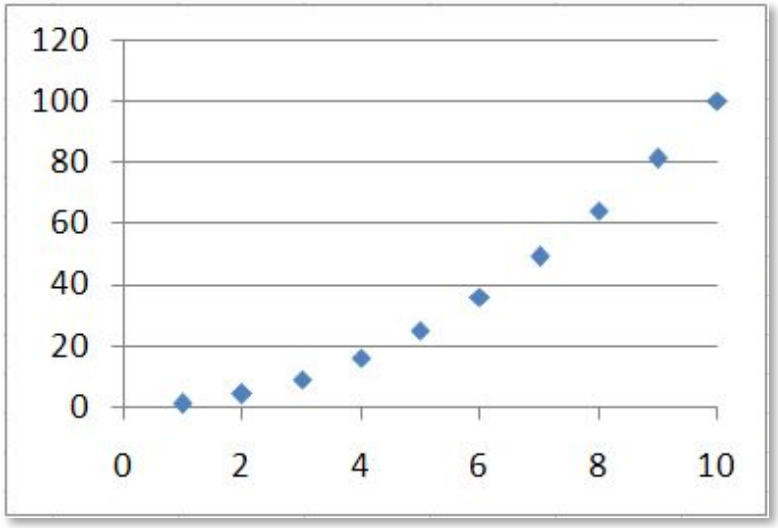
Взаимосвязь рядов данных

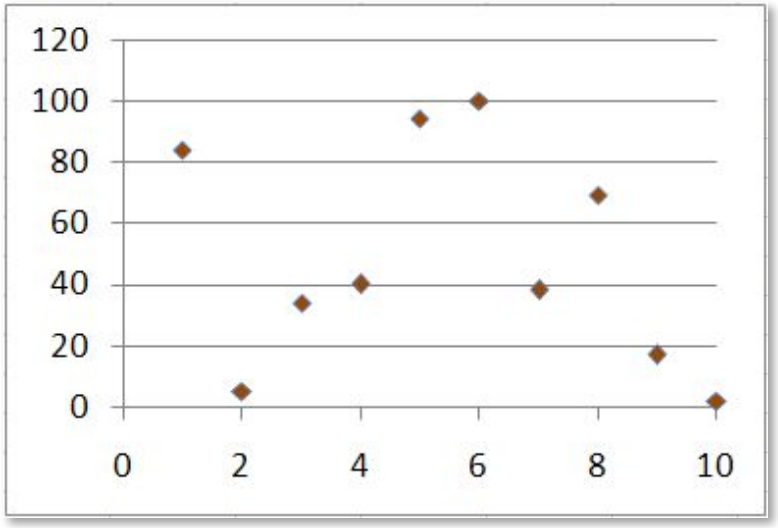
Два ряда одинаковой длины:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \qquad\qquad y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

Вопросы:

- есть ли связь между этими рядами (соответствуют ли пары (x_i, y_i) какой-нибудь зависимости $y = f(x)$)
- насколько сильна эта связь?





Взаимосвязь рядов данных

Ковариация:

$$K_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

Если x и y – один и тот же ряд? $K_{xx} = D_x$

в среднем!

Как понимать это число?

- если $K_{xy} > 0$ увеличение x приводит к увеличению y
- если $K_{xy} < 0$ увеличение x приводит к уменьшению y
- если $K_{xy} \approx 0$ связь обнаружить не удалось

Что плохо?

- единицы измерения: если x в метрах, y в литрах, то K_{xy} – в м·л
- K_{xy} зависит от абсолютных значений x и y, поэтому ничего не говорит о том, насколько сильна связь

Взаимосвязь рядов данных

Коэффициент корреляции:

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

σ_x, σ_y – СКВО рядов x и y

Какова размерность? безразмерный!

$$\boxed{-1 \le \rho_{xy} \le 1}$$

Как понимать это число?

- если $\rho_{xy} > 0$: увеличение x приводит к увеличению y
- если $\rho_{xy} < 0$: увеличение x приводит к уменьшению y
- если $\rho_{xy} \approx 0$: связь обнаружить не удалось

=КОРРЕЛ(A1:A20;B1:B20)

Взаимосвязь рядов данных

Как понимать коэффициент корреляции?

$0 < |\rho_{xy}| \le 0{,}2$: очень слабая корреляция

$0{,}2 < |\rho_{xy}| \le 0{,}5$: слабая

$0{,}5 < |\rho_{xy}| \le 0{,}7$: средняя

$0{,}7 < |\rho_{xy}| \le 0{,}9$: сильная

$0{,}9 < |\rho_{xy}| \le 1$: очень сильная

$\rho_{xy} = 1$: линейная зависимость $y = ax + b, \quad a > 0$

$\rho_{xy} = -1$: линейная зависимость $y = ax + b, \quad a < 0$

Если $\rho_{xy} \approx 0$, то связи нет?

Метод для определения линейной зависимости!

Работа в Excel 2007

Тема 5. Восстановление зависимостей

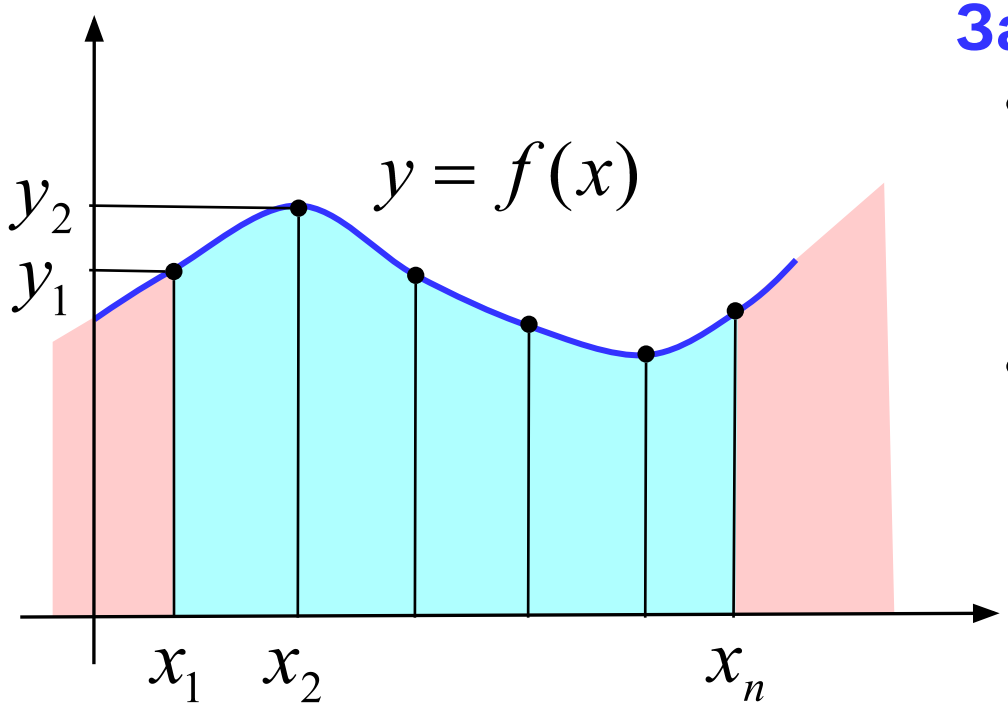
© К.Ю. Поляков, 2009-2012

Восстановление зависимостей

Два ряда одинаковой длины:

$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \qquad\qquad y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$

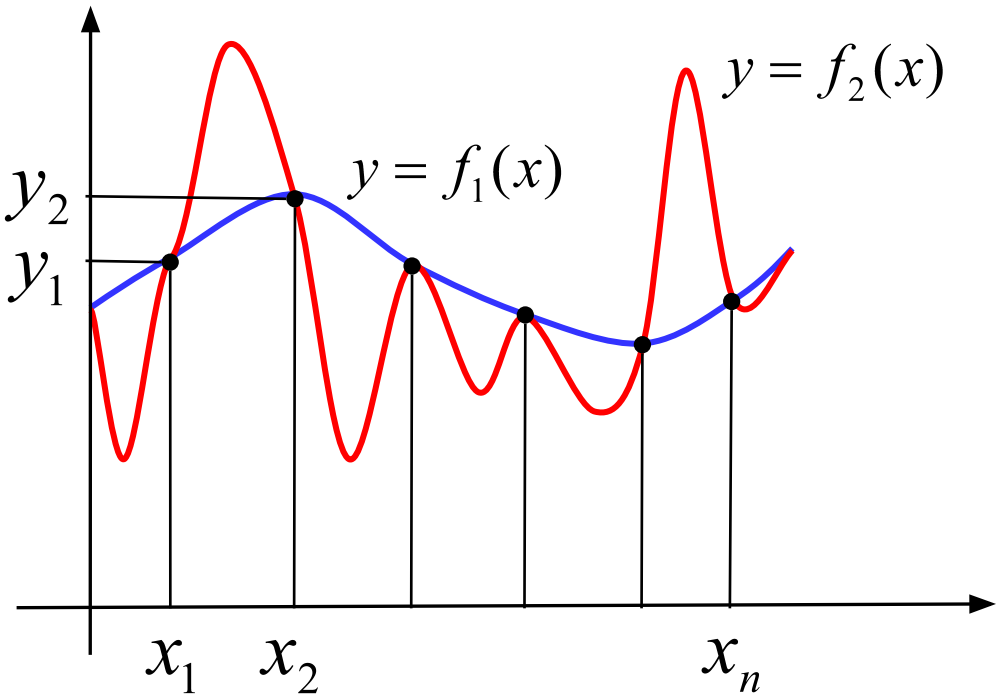
задают некоторую неизвестную функцию $y = f(x)$



Зачем:

- найти y в промежуточных точках *(интерполяция)*
- найти y вне диапазона измерений *(экстраполяция, прогнозирование)*

Какое решение нам нужно?

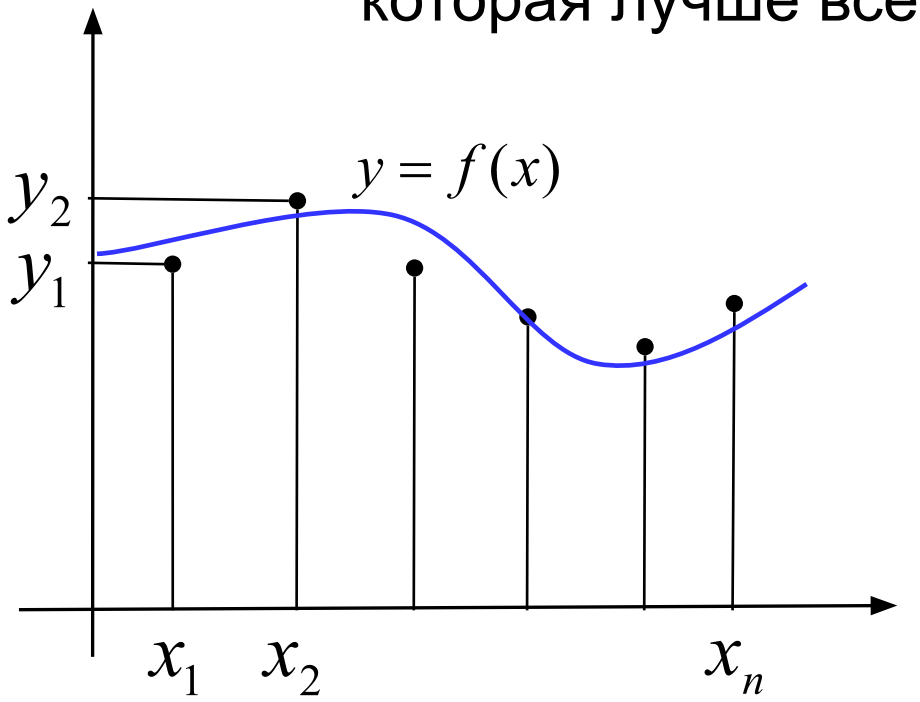


Через заданный набор точек проходит бесконечно много разных кривых!

Вывод: задача **некорректна**, поскольку решение неединственно.

Восстановление зависимостей

Корректная задача: найти функцию **заданного вида**, которая лучше всего соответствует данным.



Примеры:

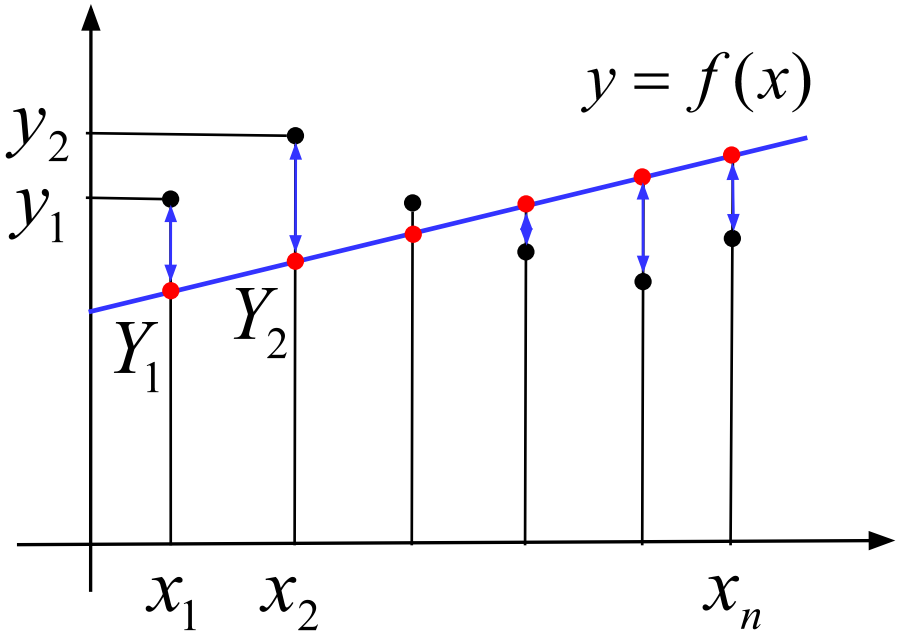
- линейная $y = a \cdot x + b$
- полиномиальная
$$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
- степенная $y = a \cdot x^b$
- экспоненциальная
$$y = a \cdot e^{bx}$$
- логарифмическая
$$y = a \cdot \ln x + b$$

! **График функции не обязательно проходит через заданные точки!**

? **Как выбрать функцию?**

Что значит «лучше всего соответствует»?

Метод наименьших квадратов (МНК):



(x_i, y_i) заданные пары значений

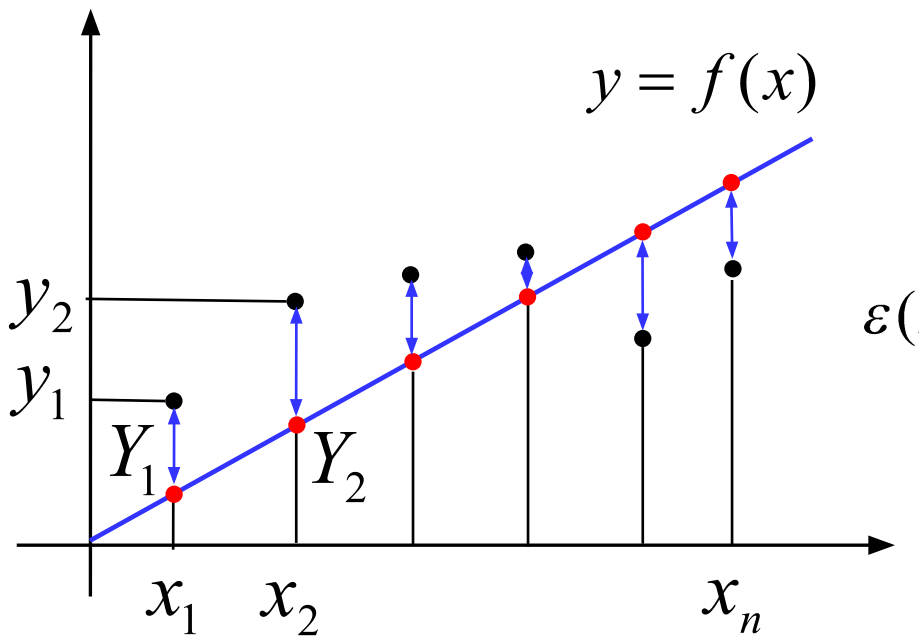
$$Y_i = f(x_i)$$

$$\boxed{\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 \to \min}$$

Зачем возведение в квадрат?

1) чтобы складывать положительные значения
2) решение сводится к системе линейных уравнений (просто решать!)

МНК для линейной функции



неизвестно!

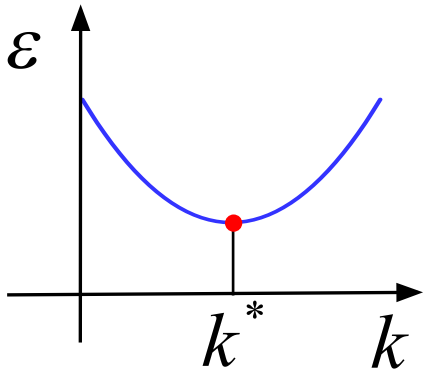
$$Y_i = k \cdot x_i$$

$$\varepsilon(k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i)^2$$

$$= k^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - k \cdot 2\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

a $-b$ c

$$\varepsilon(k) = ak^2 + bk + c \to \min$$



$$k^* = -\frac{b}{2a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Коэффициент достоверности

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

(x_i, y_i) заданные пары значений

$Y_i = f(x_i)$

$\bar{y}$ – среднее значение y_i

Крайние случаи:

- если график проходит через точки:

$$R^2 = 1$$

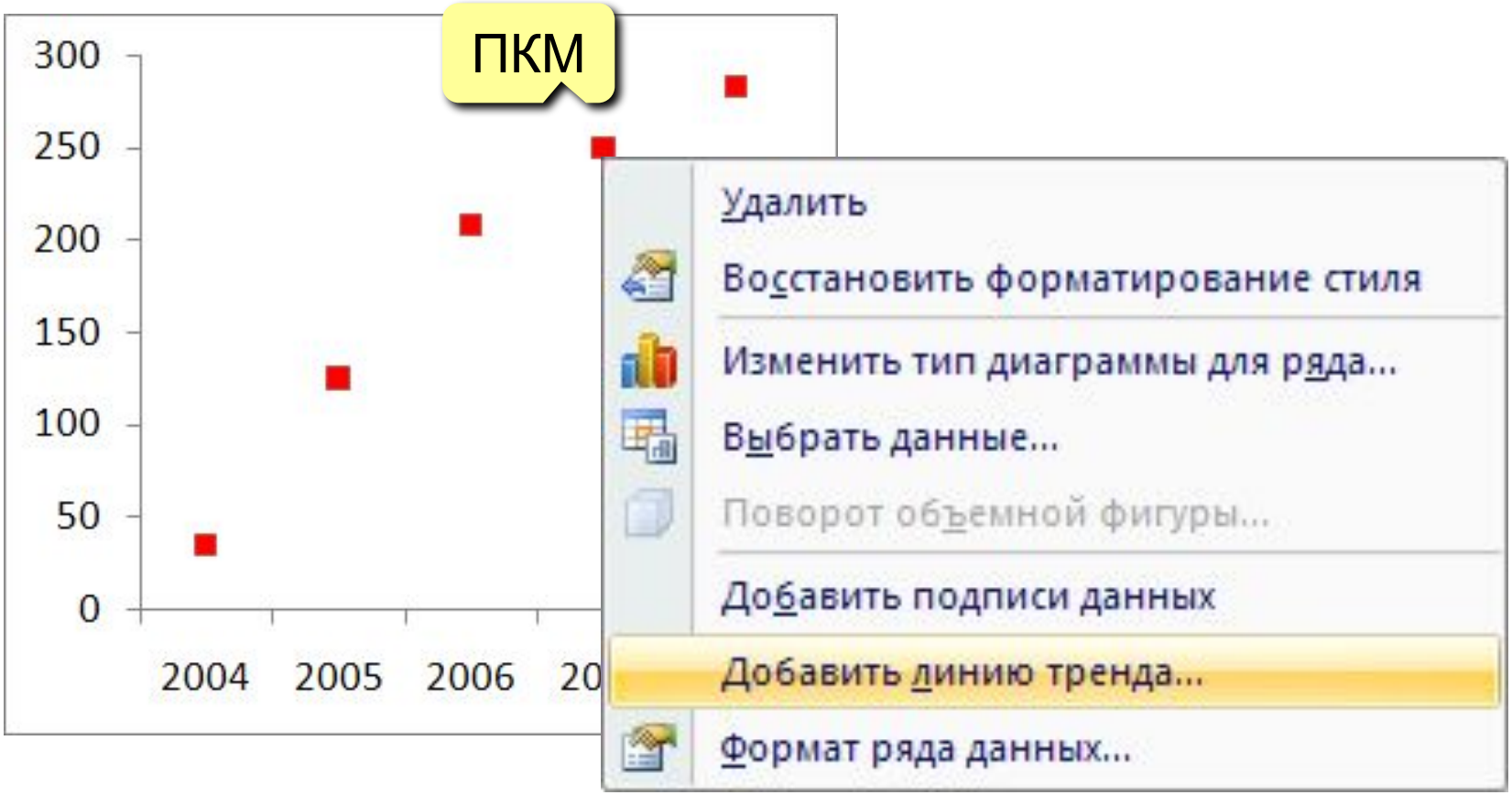
- если считаем, что y не меняется и $Y_i = \bar{y}$:

$$R^2 = 0$$

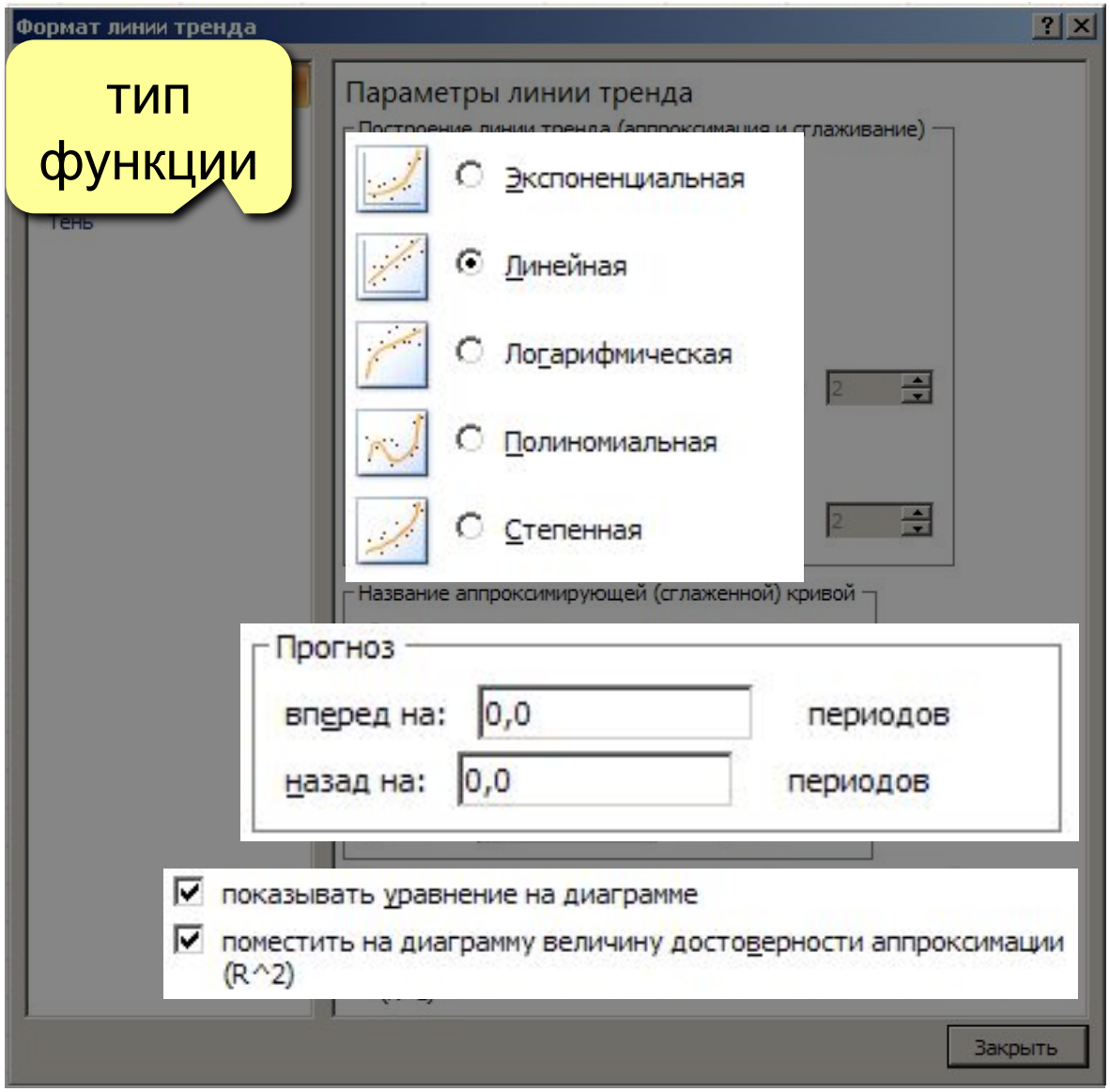
Фактически – метод наименьших квадратов!

Восстановление зависимостей

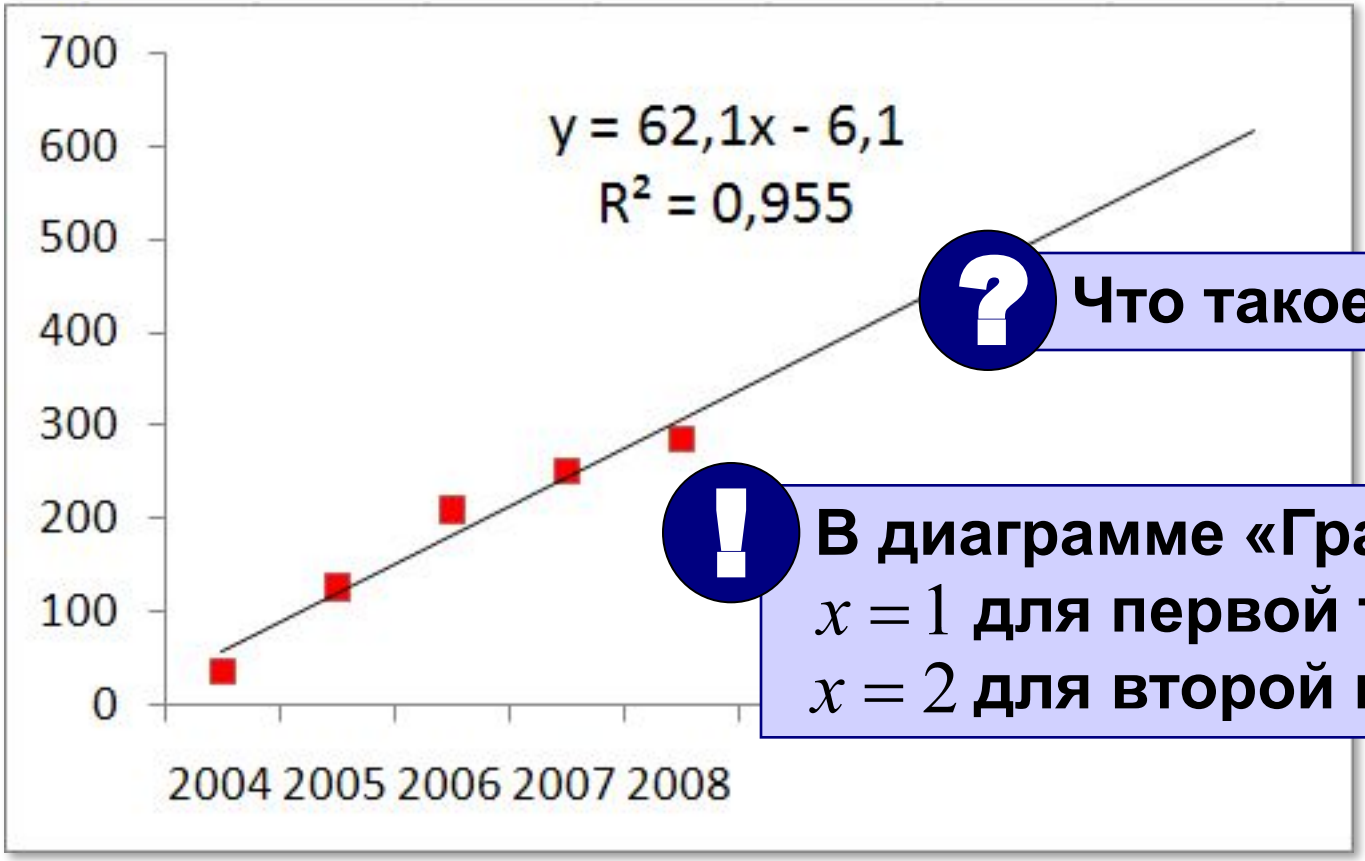
Диаграмма «График»:



Восстановление зависимостей



Восстановление зависимостей



Что такое x ?

В диаграмме «График» $x = 1$ для первой точки, $x = 2$ для второй и т.д.

Насколько хорошо выбрана функция?

Восстановление зависимостей

Сложные случаи (нестандартная функция):

$$f(x) = a \cdot \sin kx + b$$

Что делать?

Алгоритм:

1) выделить ячейки для хранения a, k, b
2) построить ряд $Y_i = f(x_i)$ для тех же x_i
3) построить на одной диаграмме ряды y_i и Y_i
4) попытаться подобрать a, k, b так, чтобы два графика были близки
5) вычислить R^2 в отдельной ячейке

   функции: СУММКВРАЗН – сумма квадратов разностей рядов
   ДИСПР – дисперсия

6) **Поиск решения**: $R^2 \to \min$

Это задача оптимизации!

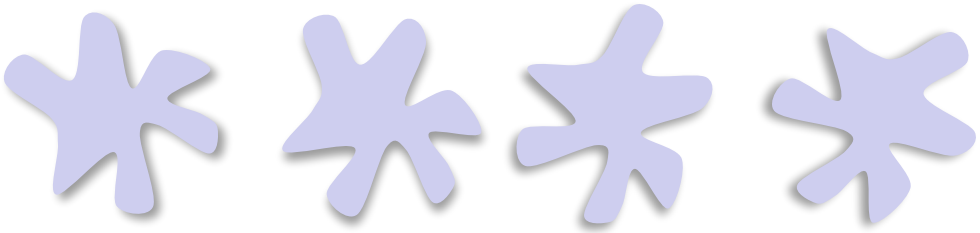
Работа в Excel 2007

Тема 6. Моделирование

(по материалам учебника Н.В. Макаровой)

© К.Ю. Поляков, 2009-2012

Модель деления

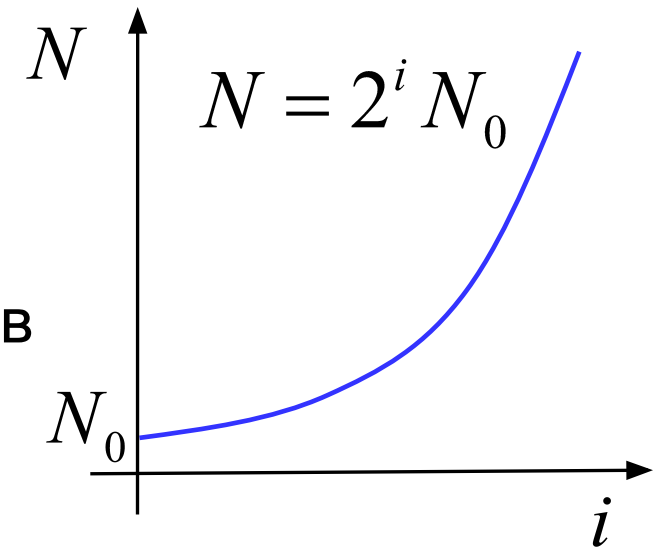


N_0 – начальная численность

$N_1 = 2N_0$ – после 1 цикла деления

$N_2 = 2N_1 = 4N_0$ – после 2-х циклов

$N_i = 2N_{i-1} = 2^i N_0$



Особенности модели:

1) не учитывается смертность
2) не учитывается влияние внешней среды
3) не учитывается влияние других видов

Рождаемость и смертность

$$N_i = N_{i-1} + K_p \cdot N_{i-1} - K_c \cdot N_{i-1}$$

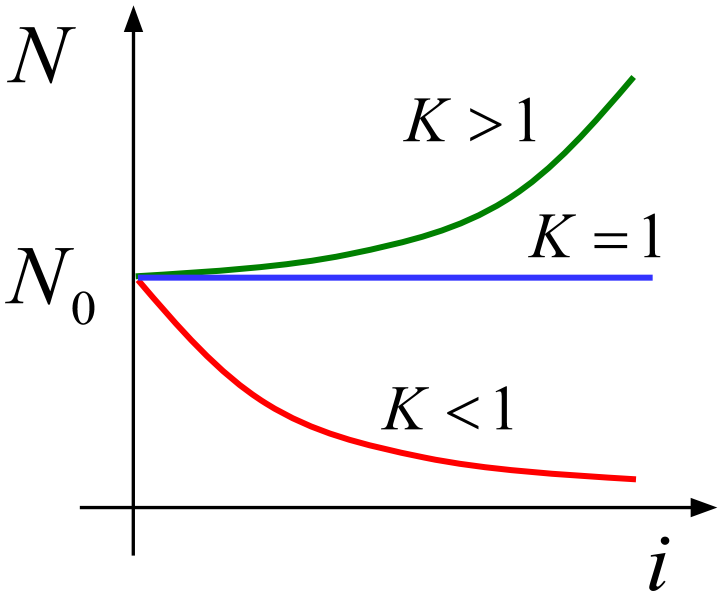
K_p – коэффициент рождаемости

K_c – коэффициент смертности

$$\boxed{N_i = K \cdot N_{i-1}}$$

Коэффициент изменения численности

$$K = 1 + K_p - K_c$$



Особенности модели:

1) не учитывается влияние численности N и внешней среды на K
2) не учитывается влияние других видов на K

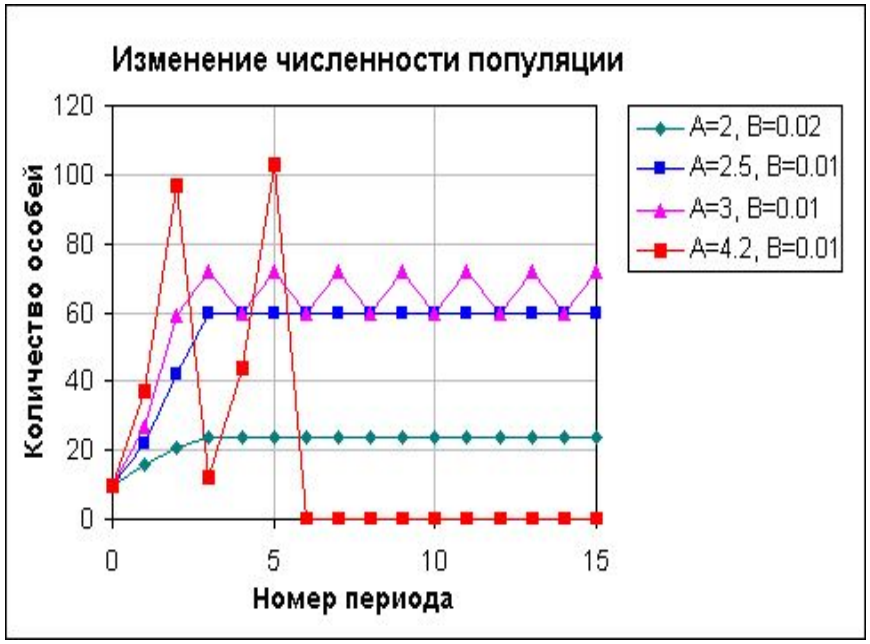
Влияние численности и внешней среды

$$N_i = K \cdot N_{i-1}$$

$$K = A \cdot (1 - B \cdot N_{i-1})$$

A – коэффициент устойчивости вида

B – коэффициент среды обитания



Варианты:

- устанавливается постоянная численность
- постоянно меняется (колебания)
- вымирание

Влияние других видов

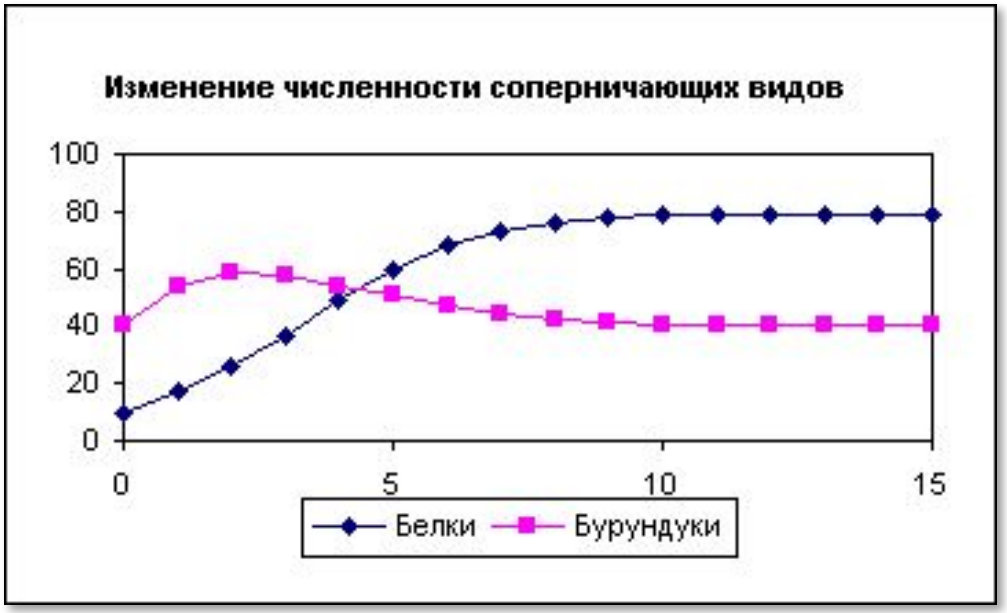
N_i – численность белок, M_i – численность бурундуков

$$N_i = N_{i-1}(2 - K_1 \cdot N_{i-1} - K_2 \cdot M_{i-1})$$
$$M_i = M_{i-1}(2 - K_3 \cdot M_{i-1} - K_4 \cdot N_{i-1})$$

Откуда видно влияние?

K_2, K_4 – взаимное влияние

если $K_2 > K_1$ или $K_4 > K_3$ – враждующие виды



Моделирование двух популяций

N_0 M_0

	A	B	C	D	E	F
1	*i*	*N*	*M*		*K1*	0,05
2	0	20	20		*K2*	0,01
3	1	=B2*(2-F1*B2-F2*C2)			*K3*	0,05
4	2				*K4*	0,01
5	3					

$$N_i = N_{i-1}(2 - K_1 \cdot N_{i-1} - K_2 \cdot M_{i-1})$$

Как скопировать формулы «вниз»?

Конец фильма