

**Арифметические
операции
в разных
системах счисления**

Сложение в десятичной системе.

$$\begin{array}{r} 47_{10} \\ + 96_{10} \\ \hline 143_{10} \end{array}$$

Таблица сложения в восьмеричной системе:

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

Таблица сложения в 16-ричной системе:

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F |
|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 | 11 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| A | A | B | C | D | E | F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| B | B | C | D | E | F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 1A |
| C | C | D | E | F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 1A | 1B |
| D | D | E | F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 1A | 1B | 1C |
| E | E | F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 1A | 1B | 1C | 1D |
| F | F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 1A | 1B | 1C | 1D | 1E |

Правило сложения

$$A_q + B_q = S$$

Чтобы в системе счисления с основанием q получить сумму S двух чисел A и B , надо просуммировать образующие их цифры по разрядам i справа налево:

1. если $a_i + b_i < q$, то $s_i = a_i + b_i$, старший $(i + 1)$ -й разряд не изменяется
2. если $a_i + b_i \geq q$, то $s_i = a_i + b_i - q$, старший $(i + 1)$ -й разряд увеличивается на 1

$$\begin{array}{r} + A_q \\ + B_q \\ \hline S_q \end{array} \quad \begin{array}{r} a_n \dots a_{i+1} a_i \dots a_1 a_0 q \\ b_n \dots b_{i+1} b_i \dots b_1 b_0 q \\ \hline s_n \dots s_{i+1} s_i \dots s_1 s_0 q \end{array}$$

$a_i + b_i \geq q$
 $s_i = a_i + b_i - q$

$a_i + b_i < q$
 $s_i = a_i + b_i$

Сложение чисел в системе счисления с основанием q

$$\begin{array}{r} \text{a) } \quad \quad \quad \overset{1}{1} \ \overset{1}{1} \ \overset{1}{1} \\ + \quad 121101_3 \\ \quad \quad \quad 222_3 \\ \hline 122100_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } \quad \quad \quad \overset{1}{1} \ \overset{1}{1} \\ + \quad 123456_8 \\ \quad \quad \quad 1234_8 \\ \hline 124712_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } \quad \quad \quad \overset{1}{1} \\ + \quad D21B1_{16} \\ \quad \quad \quad CAFE_{16} \\ \hline DECAF_{16} \end{array}$$

$1 + 2 = 3 \geq 3$
 записываем $3 - 3 = 0$ под 1-м разрядом,
 а 2-й разряд увеличиваем на 1

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \overset{1}{1} \\ + \quad a_n \ \dots \ a_{i+1} \ a_i \ \dots \ a_1 \ a_0 \ q \\ \quad \quad \quad b_n \ \dots \ b_{i+1} \ b_i \ \dots \ b_1 \ b_0 \ q \\ \hline \quad \quad \quad s_n \ \dots \ s_{i+1} \ s_i \ \dots \ s_1 \ s_0 \ q \end{array}$$

$a_i + b_i \geq q$
 $s_i = a_i + b_i - q$

$a_i + b_i < q$
 $s_i = a_i + b_i$

Сложение чисел с разным основанием

Для того, чтобы сложить два числа с разными основаниями систем счисления, их надо перевести в одну (удобную для вас) систему счисления и выполнить сложение.

Результат представить в требуемой в задании системе счисления.

Сложить AD_{16} и 251_8 .
Результат представить
в шестнадцатеричной системе счисления.

$$A_{16} = 10_{10}$$

$$B_{16} = 11_{10}$$

$$C_{16} = 12_{10}$$

$$D_{16} = 13_{10}$$

$$E_{16} = 14_{10}$$

$$F_{16} = 15_{10}$$

Сложить AD_{16} и 251_8 .
Результат представить в

шестнадцатеричной системе счисления

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | | | 5 | | | 1 | | |

$$A_{16} = 10_{10}$$

$$B_{16} = 11_{10}$$

$$C_{16} = 12_{10}$$

$$D_{16} = 13_{10}$$

$$E_{16} = 14_{10}$$

$$F_{16} = 15_{10}$$

Сложить AD_{16} и 251_8 .
Результат представить в
шестнадцатеричной системе счисления.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | | | 5 | | | 1 | | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

$$A_{16} = 10_{10}$$

$$B_{16} = 11_{10}$$

$$C_{16} = 12_{10}$$

$$D_{16} = 13_{10}$$

$$E_{16} = 14_{10}$$

$$F_{16} = 15_{10}$$

Сложить AD_{16} и 251_8 .
Результат представить
в шестнадцатеричной системе счисления.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|----------|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | | | 5 | | | 1 | | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| A | | | | | 9_{16} | | | |

$$A_{16} = 10_{10}$$

$$B_{16} = 11_{10}$$

$$C_{16} = 12_{10}$$

$$D_{16} = 13_{10}$$

$$E_{16} = 14_{10}$$

$$F_{16} = 15_{10}$$

Сложить AD_{16} и 251_8 .
 Результат представить
 в шестнадцатеричной системе счисления.

| | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|----------|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | | | 5 | | | 1 | | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| A | | | | | 9_{16} | | | |
| + A | | | | | D_{16} | | | |

$$A_{16} = 10_{10}$$

$$B_{16} = 11_{10}$$

$$C_{16} = 12_{10}$$

$$D_{16} = 13_{10}$$

$$E_{16} = 14_{10}$$

$$F_{16} = 15_{10}$$

Сложить AD_{16} и 251_8 .
 Результат представить
 в шестнадцатеричной системе счисления.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|-----------------|-----------------|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | | | 5 | | | 1 | | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | | A | | | 9 ₁₆ | | | |
| + | | A | | | D ₁₆ | | | |
| 1 | 5 | | | 6 ₁₆ | | | | |

$$A_{16} = 10_{10}$$

$$B_{16} = 11_{10}$$

$$C_{16} = 12_{10}$$

$$D_{16} = 13_{10}$$

$$E_{16} = 14_{10}$$

$$F_{16} = 15_{10}$$

Сложить AD_{16} и 251_8 .
 Результат представить
 в двоичной системе счисления.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----------------|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | | | 5 | | | 1 | | |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | A | | | | D | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 ₂ |

$$A_{16} = 10_{10}$$

$$B_{16} = 11_{10}$$

$$C_{16} = 12_{10}$$

$$D_{16} = 13_{10}$$

$$E_{16} = 14_{10}$$

$$F_{16} = 15_{10}$$

Правило вычитания

Чтобы в системе счисления с основанием q получить разность R двух чисел A и B , надо вычислить разности образующих их цифр по разрядам i справа налево:

1. если $a_i \geq b_i$, то $r_i = a_i - b_i$,
старший $(i + 1)$ -й разряд не изменяется

2. если $a_i < b_i$, то $r_i = q + a_i - b_i$,
старший $(i + 1)$ -й разряд **уменьшается на 1**

$$\begin{array}{r}
 - A_q \\
 - B_q \\
 \hline
 R_q
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 - a_n \dots \overset{\bullet}{a_{i+1}} a_i \dots a_1 a_0 q \\
 - b_n \dots b_{i+1} b_i \dots b_1 b_0 q \\
 \hline
 r_n \dots r_{i+1} r_i \dots r_1 r_0 q
 \end{array}$$

$a_i < b_i$
 $r_i = q + a_i - b_i$

$a_i \geq b_i$
 $r_i = a_i - b_i$

Вычитание чисел в системе счисления с основанием q

a)
$$\begin{array}{r} \overset{\bullet}{1} \overset{\bullet}{0} \overset{\bullet}{1} 1 0 1_3 \\ - \quad 1 0 2 1 0_3 \\ \hline 2 0 1 2 1_3 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \overset{\bullet}{6} \overset{\bullet}{5} \overset{\bullet}{4} 3 2 1_8 \\ - \quad 5 6 3 4 1 2_8 \\ \hline 7 0 7 0 7_8 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} \overset{\bullet}{D} E C A F_{16} \\ - \quad C A F E_{16} \\ \hline D 2 1 B 1_{16} \end{array}$$

записываем $3 + 0 - 1 = 2$ под 5-м разрядом,
делая заем в 6-м разряде

$$\begin{array}{r} \overset{\bullet}{a_n} \dots \overset{\bullet}{a_{i+1}} a_i \dots a_1 a_0_q \\ - \quad b_n \dots b_{i+1} b_i \dots b_1 b_0_q \\ \hline r_n \dots r_{i+1} r_i \dots r_1 r_0_q \end{array}$$

$$a_i < b_i$$

$$r_i = q + a_i - b_i$$

$$a_i \geq b_i$$

$$r_i = a_i - b_i$$

Правило вычитания чисел в системе счисления с основанием p

- Записать цифры числа друг под другом, соблюдая разрядность чисел.
- Начиная с младшего разряда вычитать значения цифр, предварительно переводя их в десятичную систему.
- Если в каком-то разряде уменьшаемое число меньше вычитаемого, то необходимо занять единицу из следующего разряда. При этом нужно помнить, что значение этой единицы равно основанию системы счисления P .

Найти разность чисел 11011_2 и 1101_2 .

$$\begin{array}{r} _2 \\ - _2 \\ \hline \end{array}$$

Найти разность чисел
 $ADC27_{16}$ и $25EF1_{16}$.

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---------------|
| | A | D | C | 2 | 7 | ₁₆ |
| - | 2 | 5 | E | F | 1 | ₁₆ |
| <hr/> | | | | | | |

$$A_{16} = 10_{10}$$

$$B_{16} = 11_{10}$$

$$C_{16} = 12_{10}$$

$$D_{16} = 13_{10}$$

$$E_{16} = 14_{10}$$

$$F_{16} = 15_{10}$$

Найти разность чисел
 $ADC27_{16}$ и $25EF1_{16}$.

$$\begin{array}{r} \\ - \\ \hline \\ \end{array}$$

| | | |
|----------|---|-----------|
| A_{16} | = | 10_{10} |
| B_{16} | = | 11_{10} |
| C_{16} | = | 12_{10} |
| D_{16} | = | 13_{10} |
| E_{16} | = | 14_{10} |
| F_{16} | = | 15_{10} |

Найти разность чисел
 $ADC27_{16}$ и $25EF1_{16}$.

·

| | | | | | | |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
| | A | D | C | 2 | 7 | $_{16}$ |
| - | 2 | 5 | E | F | 1 | $_{16}$ |
| | | | | 3 | 6 | $_{16}$ |

$A_{16} = 10_{10}$

$B_{16} = 11_{10}$

$C_{16} = 12_{10}$

$D_{16} = 13_{10}$

$E_{16} = 14_{10}$

$F_{16} = 15_{10}$

Найти разность чисел
 $ADC27_{16}$ и $25EF1_{16}$.

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & & \cdot & \cdot & & \\
 & \mathbf{A} & \mathbf{D} & \mathbf{C} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \\
 - & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{1} & \\
 \hline
 & & & \mathbf{D} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \\
 \end{array}$$

$$\mathbf{A}_{16} = \mathbf{10}_{10}$$

$$\mathbf{B}_{16} = \mathbf{11}_{10}$$

$$\mathbf{C}_{16} = \mathbf{12}_{10}$$

$$\mathbf{D}_{16} = \mathbf{13}_{10}$$

$$\mathbf{E}_{16} = \mathbf{14}_{10}$$

$$\mathbf{F}_{16} = \mathbf{15}_{10}$$

Найти разность чисел
 $ADC27_{16}$ и $25EF1_{16}$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \hline \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{A}_{16} = \mathbf{10}_{10} \\ \mathbf{B}_{16} = \mathbf{11}_{10} \\ \mathbf{C}_{16} = \mathbf{12}_{10} \\ \mathbf{D}_{16} = \mathbf{13}_{10} \\ \mathbf{E}_{16} = \mathbf{14}_{10} \\ \mathbf{F}_{16} = \mathbf{15}_{10} \end{array}$$

Найти разность чисел
 $ADC27_{16}$ и $25EF1_{16}$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \hline \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$A_{16} = 10_{10}$$

$$B_{16} = 11_{10}$$

$$C_{16} = 12_{10}$$

$$D_{16} = 13_{10}$$

$$E_{16} = 14_{10}$$

$$F_{16} = 15_{10}$$

Правило умножения

Чтобы в системе счисления q получить произведение M многозначного числа A и однозначного числа b , надо вычислить произведения b и цифр числа A по разрядам i :

1. если $a_i \cdot b < q$, то $m_i = a_i \cdot b$,

старший $(i + 1)$ -й разряд не изменяется

2. если $a_i \cdot b \geq q$, то $m_i = a_i \cdot b \bmod q$,

старший $(i + 1)$ -й разряд увеличивается на $a_i \cdot b \operatorname{div} q$

$$\begin{array}{r}
 \times \begin{array}{c} A_q \\ B_q \end{array} \\
 \hline
 M_q
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{c} a_i \cdot b \operatorname{div} q \\ \times \end{array}
 \begin{array}{c} a_n \dots a_{i+1} a_i \dots a_1 a_0 \\ b \end{array} \\
 \hline
 m_n \dots m_{i+1} m_i \dots m_1 m_0
 \end{array}$$

$a_i \cdot b \geq q$
 $m_i = a_i \cdot b \bmod q$

$a_i \cdot b < q$
 $m_i = a_i \cdot b$

Div – деление нацело (остаток отбрасывается).

Mod – остаток от деления.

Примеры:

$$45 \text{ div } 10 = 4$$

$$45 \text{ mod } 10 = 5$$

$$13 \text{ div } 2 = 6$$

$$13 \text{ mod } 2 = 1$$

Умножение чисел в системе счисления с основанием q

a)

$$\begin{array}{r} \\ x \\ \\ \hline \\ \\ \hline \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} \\ x \\ \\ \hline \\ \\ \hline \end{array}$$

c)

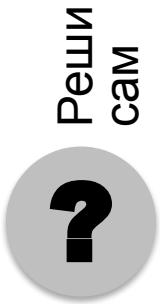
$$\begin{array}{r} \\ x \\ \\ \hline \\ \\ \hline \end{array}$$

$2 \cdot 2 = 4 \geq 3$
 записываем $4 \bmod 3 = 1$ под 1-м разрядом,
 2-й разряд увеличиваем на $4 \div 3 = 1$

$$\begin{array}{r} \dots \phantom{a_{i+1}} \dots \\ x \dots \phantom{a_{i+1}} \dots \\ \dots \phantom{a_{i+1}} \dots \\ \hline \dots \phantom{a_{i+1}} \dots \\ \dots \phantom{a_{i+1}} \dots \\ \hline \dots \phantom{a_{i+1}} \dots \end{array}$$

$a_i \cdot b \geq q$
 $m_i = a_i \cdot b \bmod q$

$a_i \cdot b < q$
 $m_i = a_i \cdot b$



Деление чисел в системе счисления

с основанием q

- Деление нельзя свести к поразрядным операциям над цифрами, составляющими число.
- Деление чисел в системе счисления с произвольным основанием q выполняется так же, как и в десятичной системе счисления.
- А значит нам понадобятся правила умножения и вычитания чисел в системе счисления с основанием q .

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & a_i \cdot b \text{ div } q & & & & \\
 x & a_n & \dots & a_{i+1} & a_i & \dots & a_1 & a_0 & q \\
 & & & & & & & & b & q \\
 \hline
 & m_n & \dots & m_{i+1} & m_i & \dots & m_1 & m_0 & q
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 a_i \cdot b \geq q \\
 m_i = a_i \cdot b \text{ mod } q
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & \bullet & & & & \\
 - & a_n & \dots & a_{i+1} & a_i & \dots & a_1 & a_0 & q \\
 & b_n & \dots & b_{i+1} & b_i & \dots & b_1 & b_0 & q \\
 \hline
 & r_n & \dots & r_{i+1} & r_i & \dots & r_1 & r_0 & q
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 a_i < b_i \\
 r_i = q + a_i - b_i
 \end{array}
 \end{array}$$

Решите самостоятельно

ТЕМЕ

Умножения в системе счисления с основанием q

№ 7.

a) $2001_3 : 12_3 = 102_3$

b) $4545_8 : 5_8 = 741_8$

$$\begin{array}{r} 2001 \overline{)12} \\ \underline{12} \\ 101 \\ \underline{101} \\ 0 \end{array}$$

c) $2B5C_{16} : A_{16} = 456_{16}$

$a_i \cdot b \text{ div } q$

$$\begin{array}{r} a_n \dots a_{i+1} a_i \dots a_1 a_0_q \\ \times \phantom{a_n \dots a_{i+1}} b_q \\ \hline m_n \dots m_{i+1} m_i \dots m_1 m_0_q \end{array}$$

$a_i \cdot b \geq q$
 $m_i = a_i \cdot b \text{ mod } q$

$a_i \cdot b < q$
 $m_i = a_i \cdot b$

$$\begin{array}{r} a_n \dots a_{i+1} a_i \dots a_1 a_0_q \\ - b_n \dots b_{i+1} b_i \dots b_1 b_0_q \\ \hline r_n \dots r_{i+1} r_i \dots r_1 r_0_q \end{array}$$

$a_i < b_i$
 $r_i = q + a_i - b_i$

$a_i \geq b_i$
 $r_i = a_i - b_i$

Задание

1. Чему равна сумма чисел $X=43_8$ и $Y=56_8$?
2. Чему равна сумма чисел $X=43_{16}$ и $Y=56_{16}$?
3. Чему равна сумма чисел $X=43_8$ и $Y=56_{16}$?
Результат выразить последовательно в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления.
4. Чему равна сумма чисел $X=1110011_2$ и $Y=1001001_2$?
5. Чему равна сумма чисел $X=55_8$ и $Y=AE_{16}$?
Результат выразить в шестнадцатеричной системе счисления.
6. Чему равно значение выражения $10_{16} + 10_8 \cdot 10_2$ в двоичной системе счисления?

7. Чему равна разность чисел $X=110111_2$ и $Y=101_2$?
8. Чему равна разность чисел $X=124_8$ и $Y=56_8$?
9. Чему равна разность чисел $X=124_8$ и $Y=52_{16}$?
Результат выразить последовательно в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления.
10. Чему равна разность чисел $X=1110011_2$ и $Y=1001001_2$?
11. Чему равна разность чисел $X=AE1_{16}$ и $Y=55_8$?
Результат выразить в шестнадцатеричной системе счисления.
12. Чему равно значение выражения $10_{16} - 10_2 \cdot 10_5$ в двоичной системе счисления?