

# Объем пирамиды

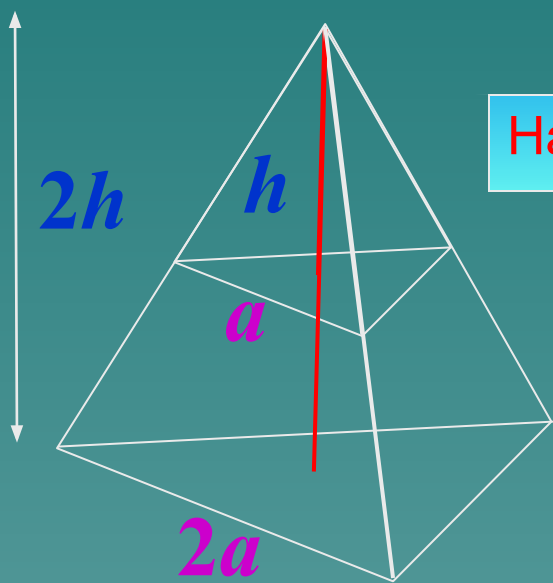
Открытый банк заданий по математике <http://mathege.ru:8080/or/ege/Main.action>

Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} S_1 h_1}{\frac{1}{3} S_2 h_2} =$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$



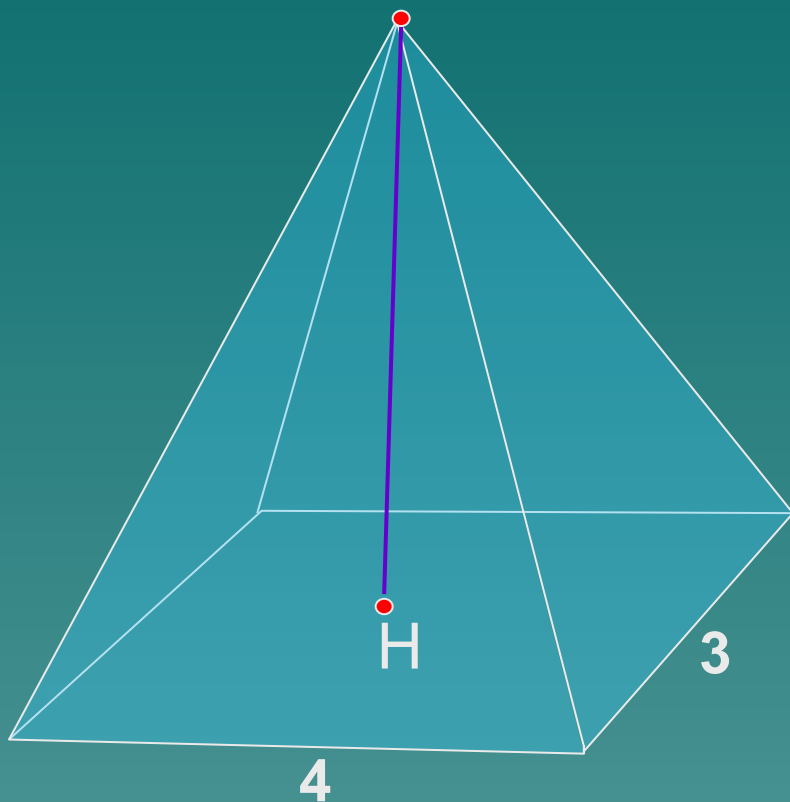
Найдем отношение объемов

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (2a)^2 \sin 60^\circ \cdot 2h} = \frac{a^2}{4a^2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

В 9

8

Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.



$$S_o = 3 \cdot 4 = 12$$

$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

The volume formula is shown in a grey box. Blue arrows point from the numbers 16 and 12 in the text above to the 'V' and 'S<sub>o</sub>' in the formula, respectively.

$$16 = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot H$$

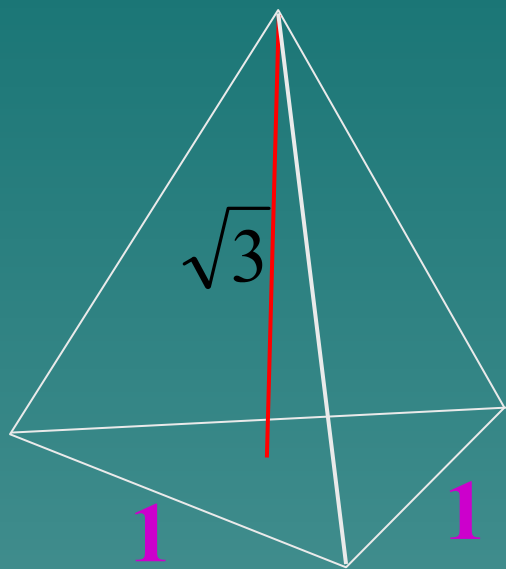
$$16 = 4 \cdot H$$

$$H = 4$$

В 9

4

Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна  $\sqrt{3}$



$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

Diagram showing a triangle with two sides of length 1 and an included angle of  $60^\circ$ . Blue arrows point from the numbers 1, 1, and  $60^\circ$  to the corresponding parts of the triangle.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sqrt{3}$$

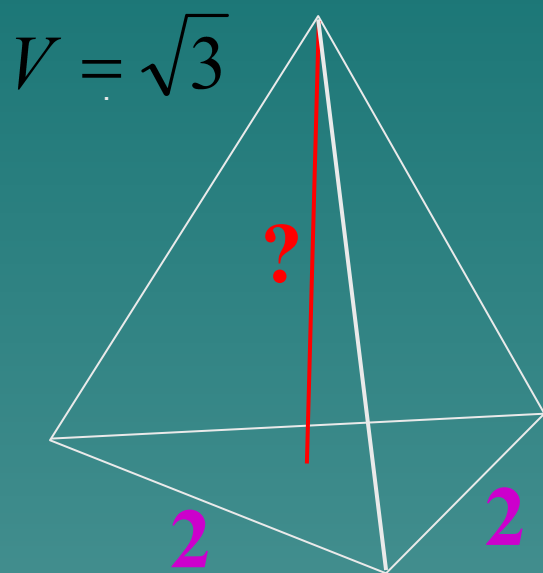
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4}$$

В 9 0 , 2 5

Найдите высоту правильной  
треугольной пирамиды, стороны  
основания которой равны 2, а  
объем равен  $\sqrt{3}$ .

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

$$S_o = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^{\circ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$



$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot H \quad /: \sqrt{3}$$

$$1 = \frac{1}{3} \cdot H \quad / \cdot 3$$

$$H = 3$$

В 9

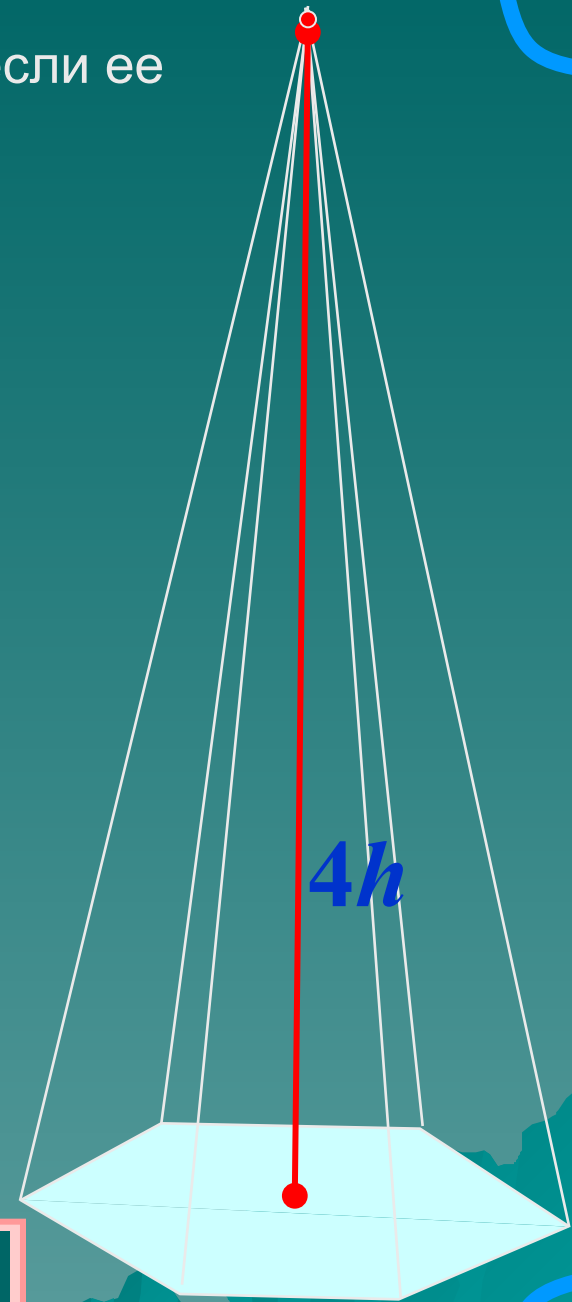
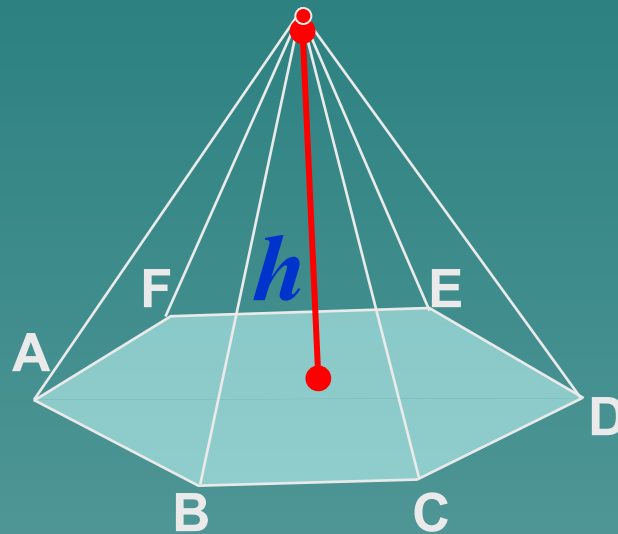
3

Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?

$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} S_o h_1}{\frac{1}{3} S_o h_2} = \frac{h}{4h} = \frac{1}{4}$$

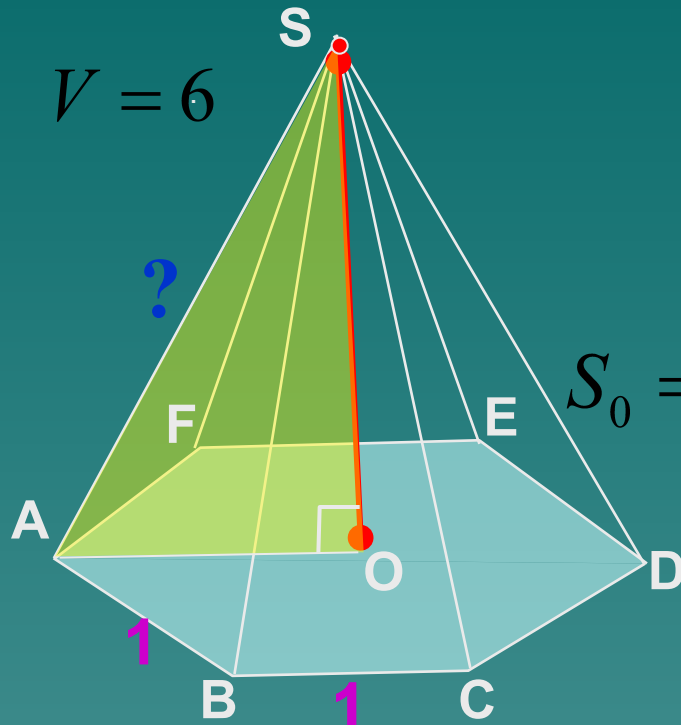
Найдем отношение объемов



В 9

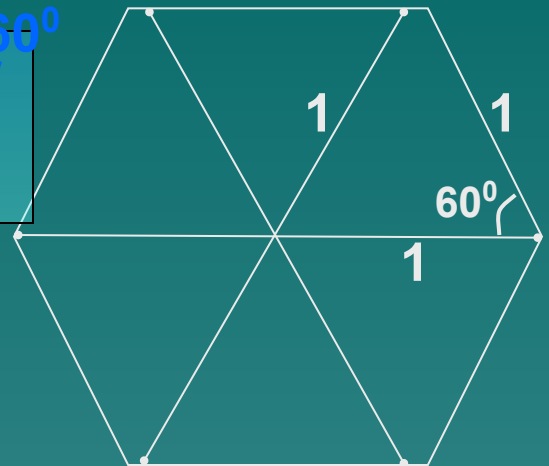
4

Объем правильной шестиугольной пирамиды 6.  
 Сторона основания равна 1. Найдите боковое ребро.



$$V = 6$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin a$$



$$S_0 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^0$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_0 h$$

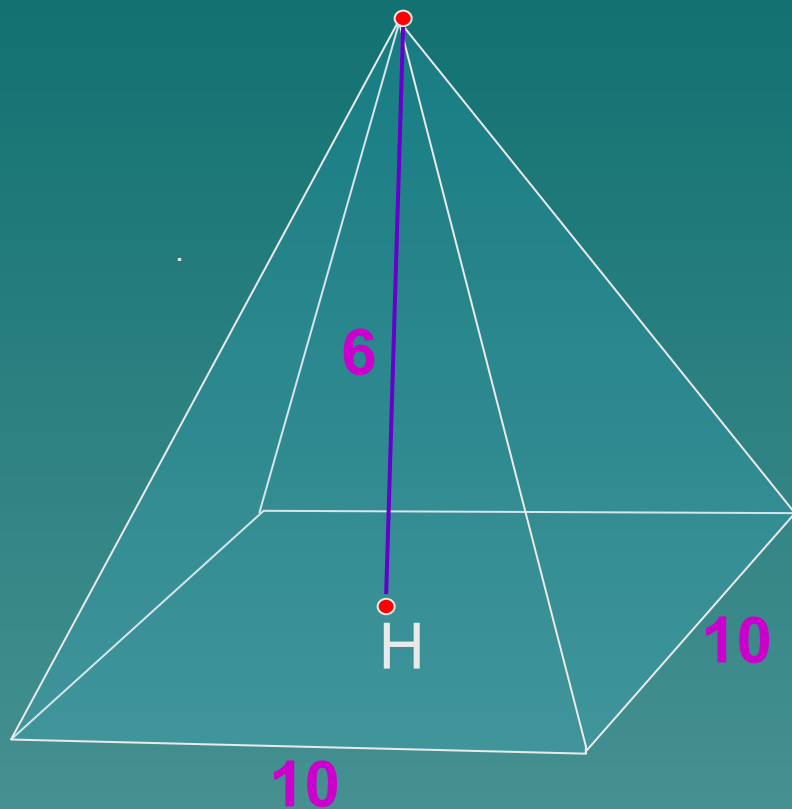
$$6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} h;$$

Можно вычислить уг. площадь правильного шестиугольника, разбив его на 6 треугольников.

Из  $\Delta AOS$  по теореме Пифагора найди ребро AS.

В 9

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{о}} H$$

$$S_{\text{КВ.}} = a^2$$

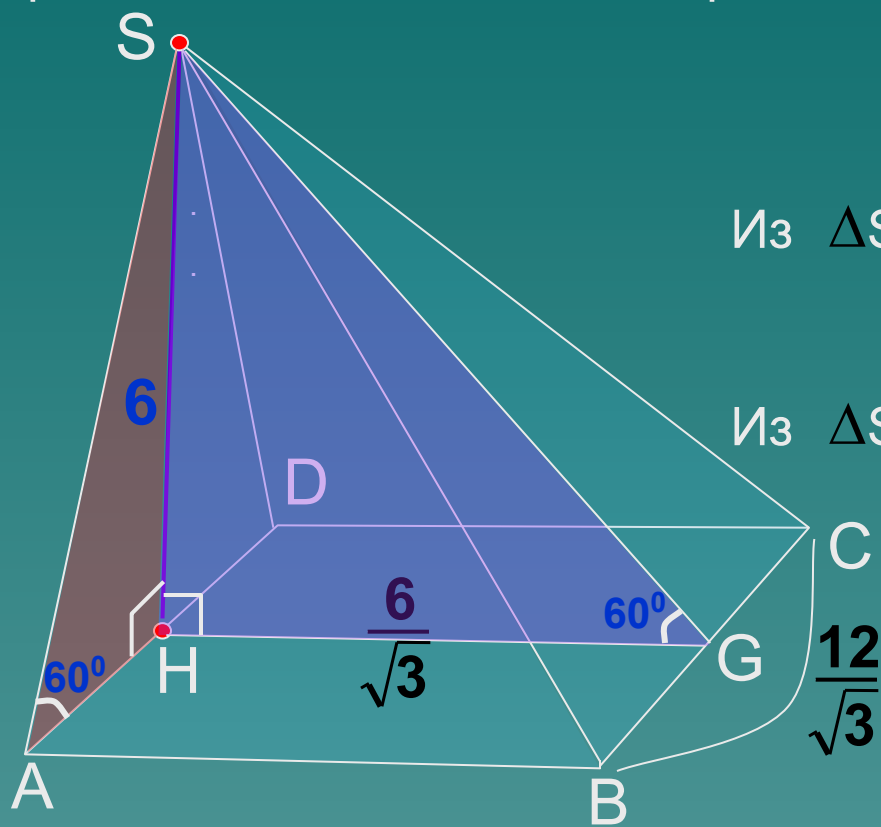
$$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 6 =$$

В 9

2 0 0



Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{пр.}} H$$

$$\text{Из } \triangle SHG: \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{6}{HG}; \quad HG = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Из } \triangle SHA: \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{6}{AH}; \quad AH = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

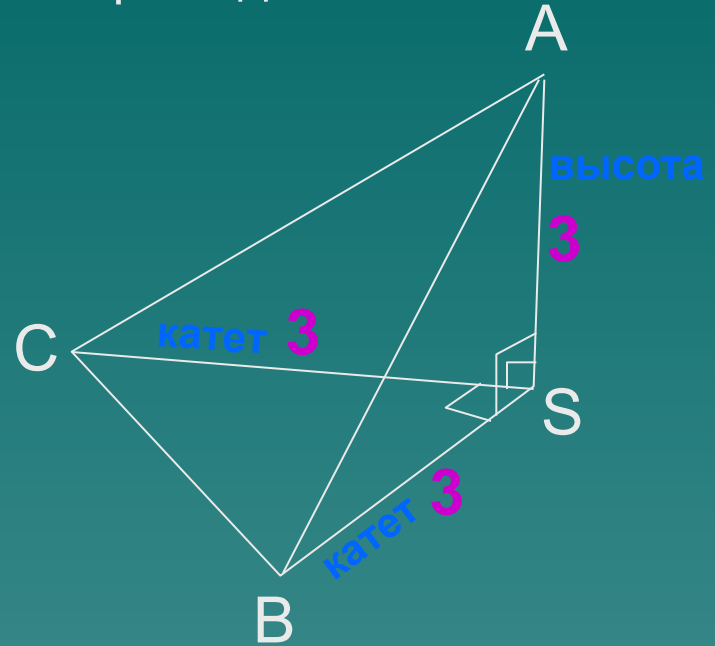
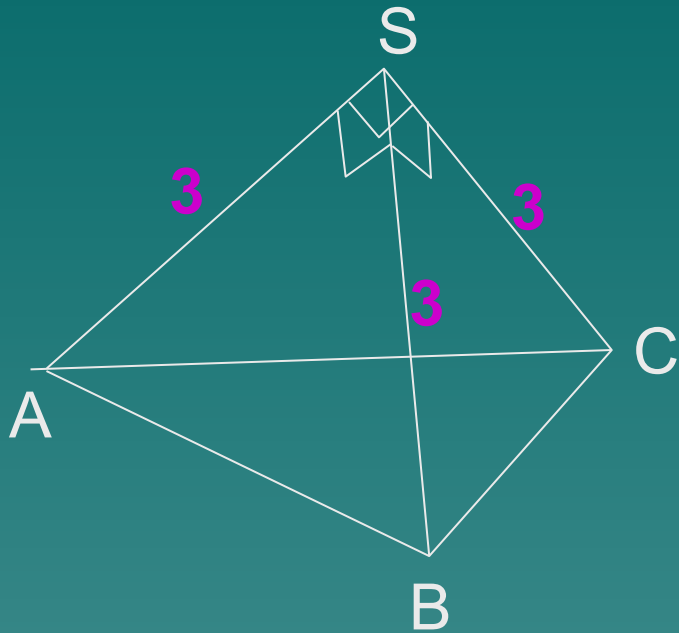
$$S_{\text{пр.}} = ab \quad AD = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = 24$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6$$

В 9	4	8				
-----	---	---	--	--	--	--

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



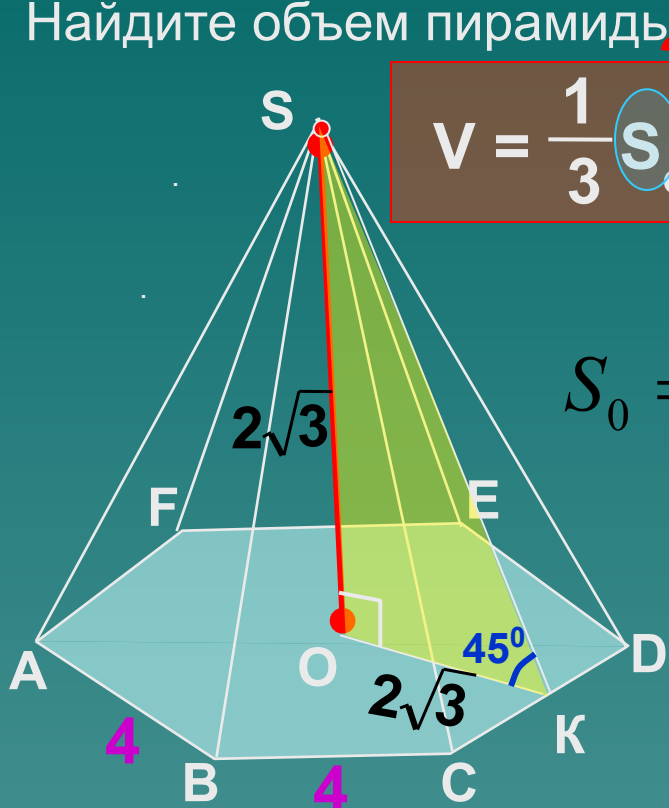
$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

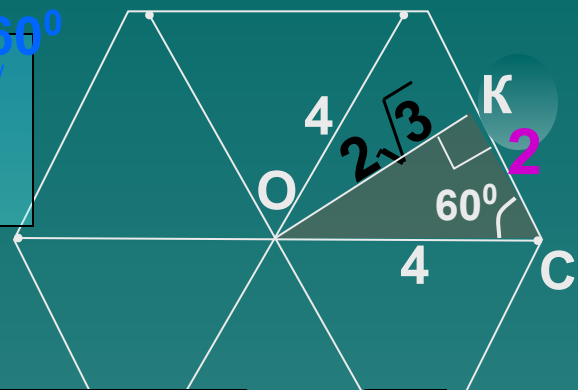
Задача очень простая, если догадаться опрокинуть пирамиду на удобную грань, например, SCB.  
 Основание – прямоугольный треугольник SCB, высота AS.

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен  $45^\circ$ .  
Найдите объем пирамиды



$$V = \frac{1}{3} S_0 H$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin a$$



$$S_0 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ$$

Найдем ОК по теореме Пифагора

$$= 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

Можно вычислить площадь правильного шестиугольника, разбив его на 6 треугольников.

$$OK = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Delta SOK - p / \delta, OK = OS = 2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$$

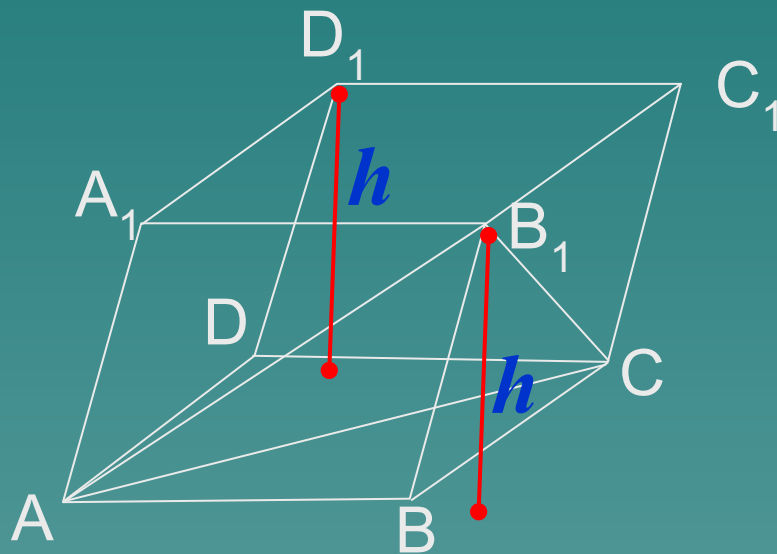
В 9 4 8

Объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен 12.  
Найдите объем треугольной пирамиды  $B_1 ABC$ .

$$V_{\text{приз.}} = S_o H$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_{\text{приз.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{\overset{2S_{ABC}}{S_{ABCD}} \cancel{h}}{\frac{1}{3} S_{ABC} \cancel{h}} = \frac{2S_{ABC}}{\frac{1}{3} S_{ABC}} = \frac{6}{1}$$



Найдем отношение объемов

$$\frac{12}{V_{\text{пир.}}} = \frac{6}{1}$$

В 9

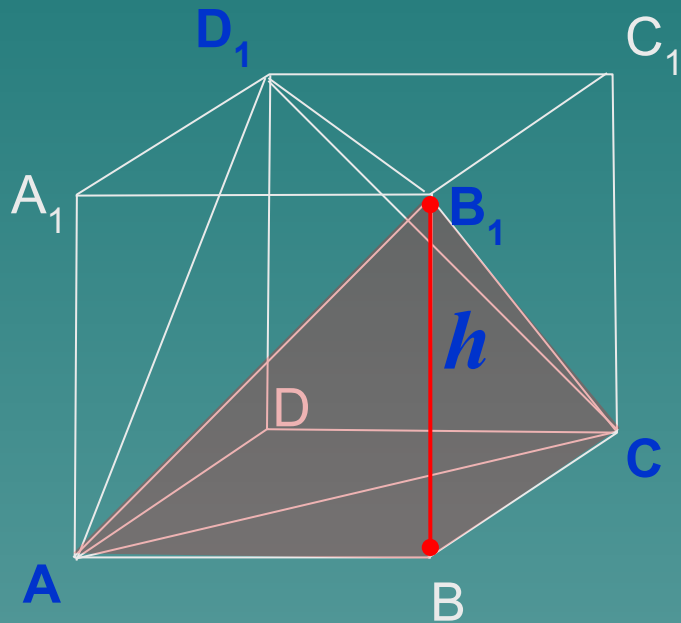
2

Объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды  $AD_1 CB_1$ .

Пирамида  $AD_1 CB_1$  получается, если мы отрезем от параллелепипеда четыре пирамиды по углам —  $ABCB_1$ ,  $D_1 B_1 CC_1$ ,  $AA_1 D_1 B_1$  и  $ADCD_1$ . А объем каждой из них легко посчитать — мы делали это в предыдущей задаче.

Например, найдем объем пирамиды  $ABCB_1$ .

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{ос}} H$$



На 4,5 отношение объемов

$$\frac{V_{\text{пар.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{6}{1}; \quad V_{\text{пир.}} = \frac{3}{4}$$

Четыре пирамиды по углам —  $ABCB_1$ ,  $D_1 B_1 CC_1$ ,  $AA_1 D_1 B_1$  и  $ADCD_1$

$$4V_{\text{пир.}} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$$

Объем пирамиды  $AD_1 CB_1$

$$V_{AD_1 CB_1} = 4,5 - 3 = 1,5$$

В 9

1, 5

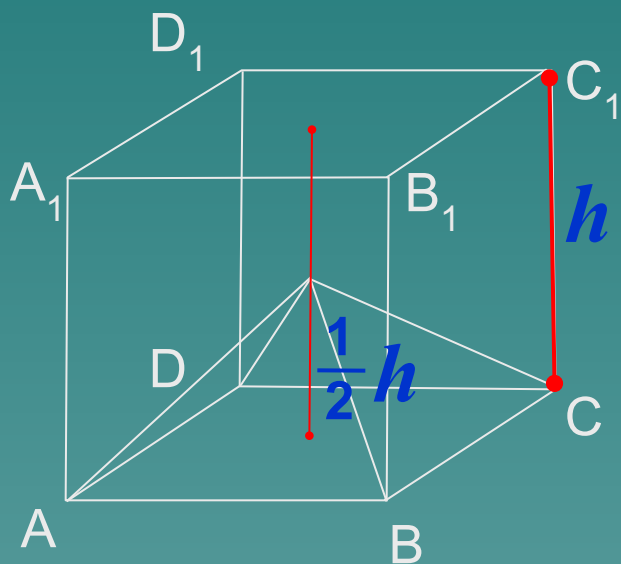
Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

**Найдем отношение объемов**

$$V_{\text{куб.}} = S_o h$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_{\text{куб.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{\cancel{S_{ABCD}} h}{\frac{1}{3} \cancel{S_{ABCD}} \frac{1}{2} \cancel{h}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{1}$$



$$\frac{12}{V_{\text{пир.}}} = \frac{6}{1}$$

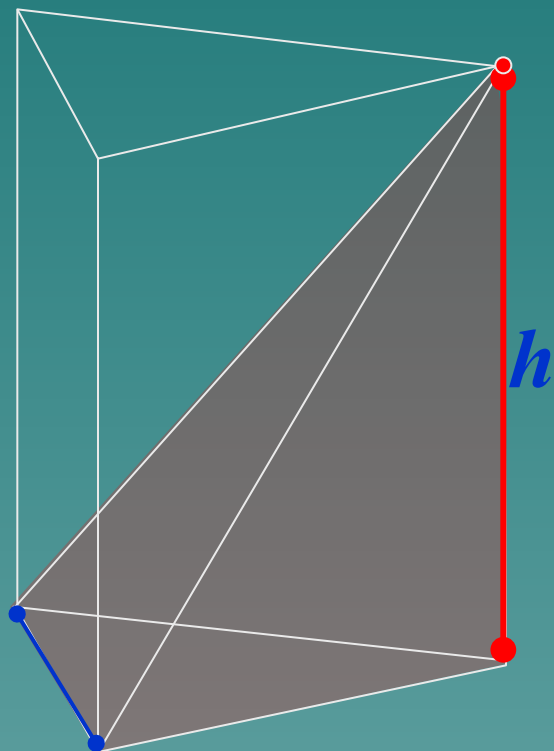
В 9

От треугольной призмы, объем которой равен 150, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.

$$V_{\text{приз.}} = S_o H$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_{\text{приз.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{S_o \cancel{h}}{\frac{1}{3} S_o \cancel{h}} = \frac{3}{1}$$



Найдем отношение объемов

$$\frac{150}{V_{\text{пир.}}} = \frac{3}{1}$$

В 9

5 0

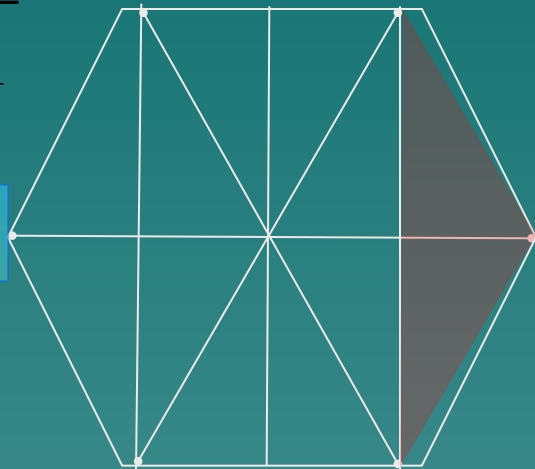
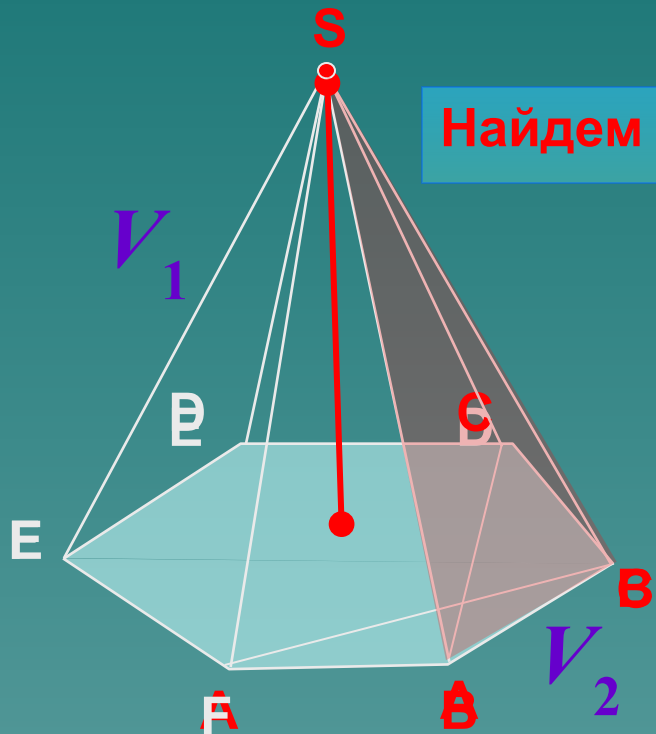
Объем треугольной пирамиды  $SABC$ , являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$ , равен 8. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

У треугольной и шестиугольной пирамид, о которых говорится в условии, одинаковые высоты. Убедимся в этом, изменим расположение букв...  
 Одинаковая высота, но площадь оснований различна.

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{о}} H$$

$$\frac{V_{\text{пир.1}}}{V_{\text{пир.2}}} = \frac{\frac{1}{3} S_6 H}{\frac{1}{3} S_{ABC} h} = \frac{6}{1}$$

**Найдем отношение объемов**



$$\frac{V_{\text{пир.1}}}{8} = \frac{6}{1}$$

Поработаем с выносным чертежом. Видим, что площадь основания треугольной пирамиды в 6 раз меньше, чем у шестиугольной.

В 9	4	8				
-----	---	---	--	--	--	--

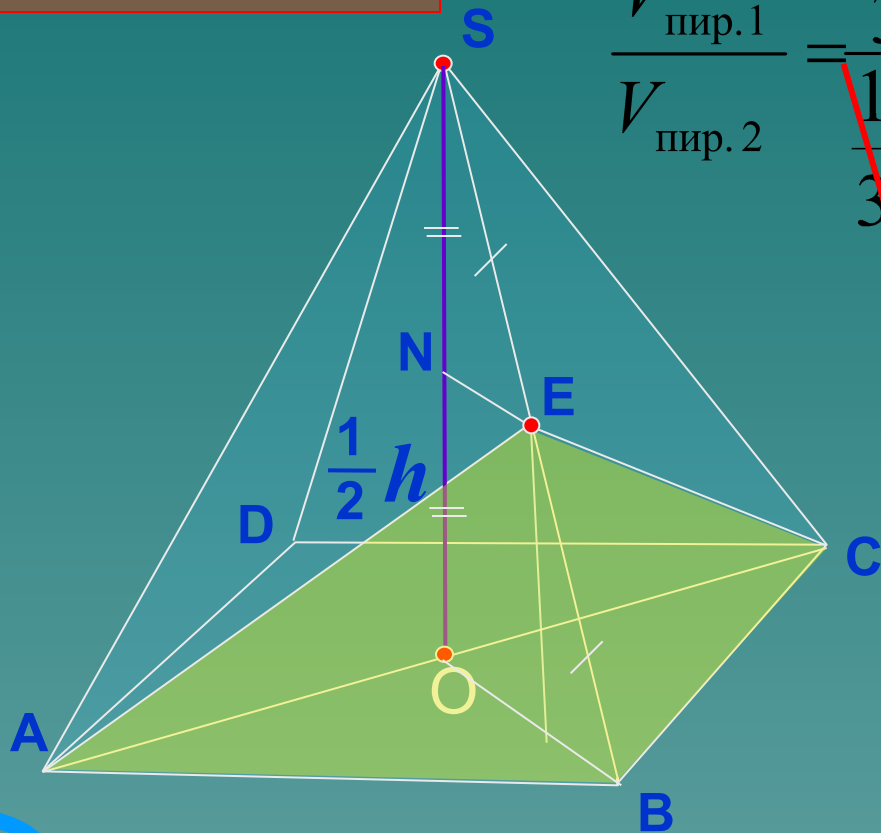


Объем правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  равен 12.  
Точка  $E$  — середина ребра  $SB$ . Найдите объем треугольной пирамиды  $EABC$ .

Точка  $E$  — середина ребра  $SB$ , значит, точка  $N$  — середина  $SO$  (по т. Фалеса).  
Высота пирамиды  $EABC$  равна половине высоты пирамиды  $SABCD$ .

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\circ} H$$

$$\frac{V_{\text{пир.1}}}{V_{\text{пир.2}}} = \frac{\frac{1}{3} \overset{2S_{ABC}}{S_{ABCD}} h}{\frac{1}{3} S_{ABC} \frac{1}{2} h} = \frac{2S_{ABC}}{S_{ABC} \frac{1}{2}} = \frac{4}{1}$$



**Найдем отношение объемов**

$$\frac{12}{V_{\text{пир.2}}} = \frac{4}{1}$$

В 9

3



От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания.

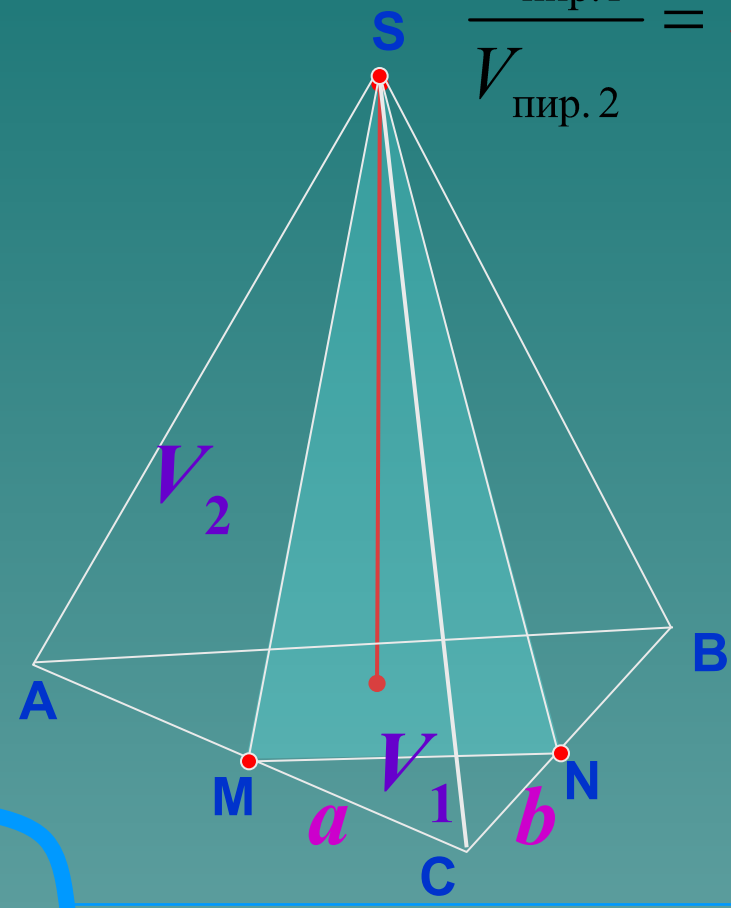
Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin a$$

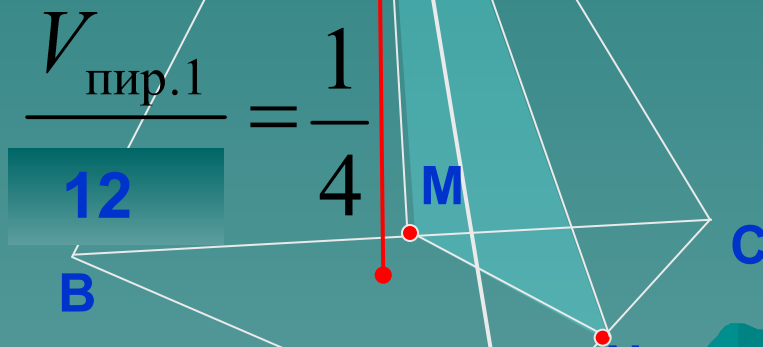
У треугольной пирамиды и отсеченной пирамиды, о которых говорится в условии, одинаковые высоты. Убедимся в этом, изменим расположение букв... Одинаковая высота, но площадь оснований различна.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

$$\frac{V_{\text{пир.1}}}{V_{\text{пир.2}}} = \frac{\frac{1}{3} S_{NCM} h}{\frac{1}{3} S_{ABC} h} = \frac{\frac{1}{2} ab \sin C}{\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b \sin C} = \frac{1}{4}$$



Найдем отношение объемов



12

В 9	3				
-----	---	--	--	--	--

Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

Надо сравнить объемы пирамид NABC и NSAC. Найдем объем пирамиды NABC. Затем из  $V_{SABC}$  (это 15) вычтем  $V_{NABC}$ , найдем  $V_{NSAC}$ .

Найдем объем пирамиды NABC. Сравним его с объемом всей пирамиды SABC, составив отношение. Основания у них одинаковые – треугольник ABC. А высоты разные, сравним их.

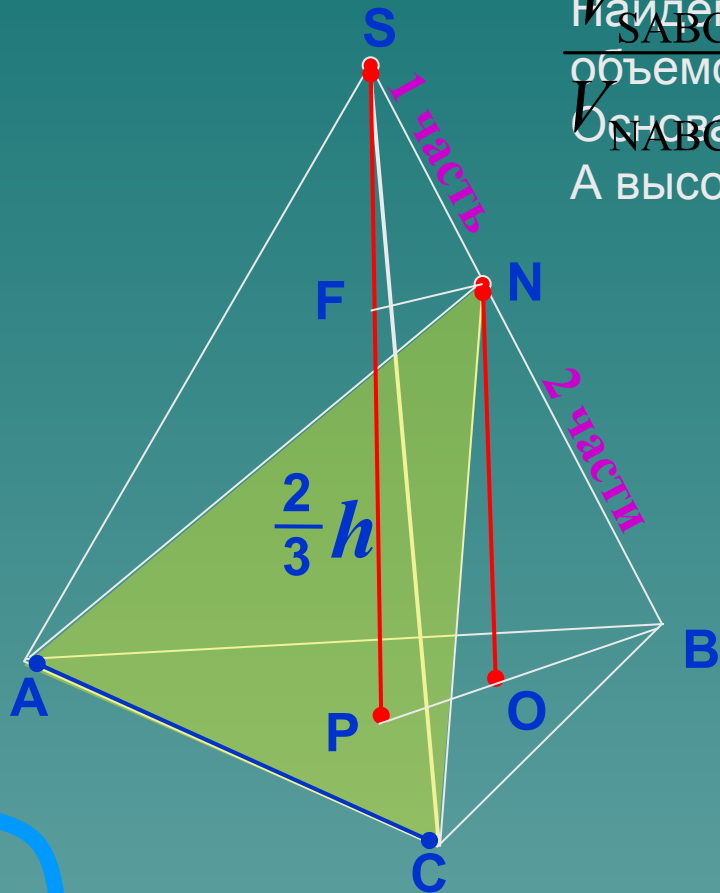
По условию  $FP:SP = 2:3$ .

Тогда  $SO = \frac{2}{3}h$ , то  $FP = \frac{2}{3}h$ ,  $NO = \frac{2}{3}h$

$$\frac{V_{NABC}}{V_{SABC}} = \frac{2}{3}$$

$$V_{NABC} = 10;$$

$$V_{NSAC} = 15 - 10 = 5.$$



B 9