Объем пирамиды

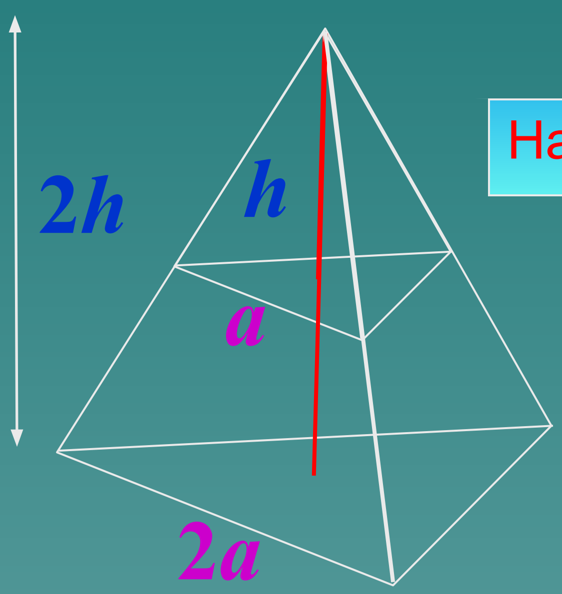
Открытый банк заданий по математике http://mathege.ru:8080/or/ege/Main.action

Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} S_1 h_1}{\frac{1}{3} S_2 h_2} =$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} ab \sin a$$

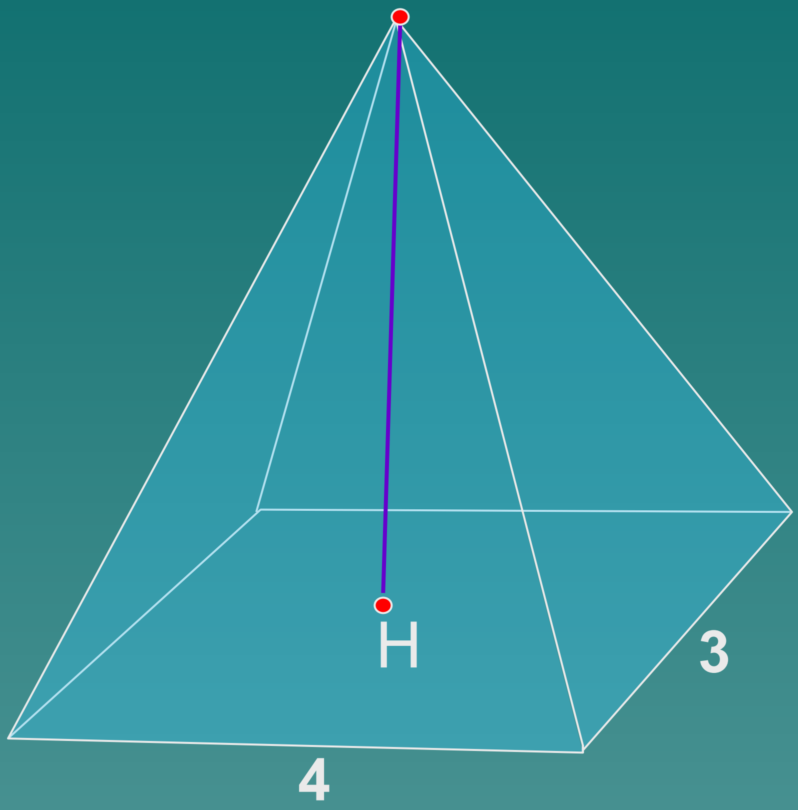


Найдем отношение объемов

$$\frac{\cancel{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}} a^2 \cancel{\sin 60^0}} \cdot \cancel{h}}{\cancel{\frac{1}{3}} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} (2a)^2 \cancel{\sin 60^0} \cdot 2\cancel{h}} = \frac{a^2}{4a^2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

В 9	8					

Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.



$$S_o = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\overset{16}{V} = \frac{1}{3}\overset{12}{S_o}H$$

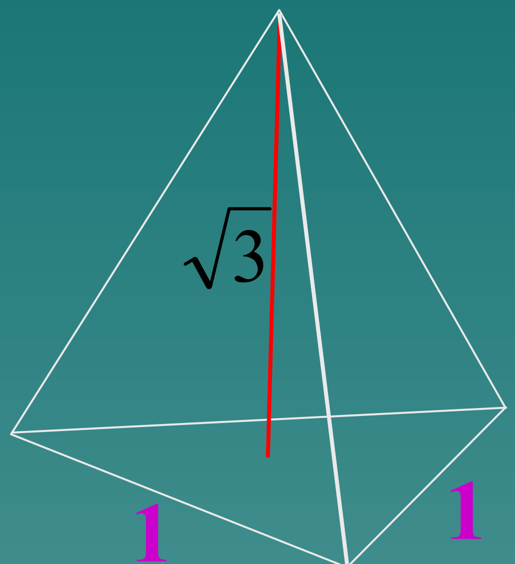
$$16 = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot H$$

$$16 = 4 \cdot H$$

$$H = 4$$

В 9	4					

Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$



$$V=\frac{1}{3}S_oH$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\overset{1}{a}\overset{1}{b}\sin\overset{60^0}{a}$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\overbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 60^0}\cdot\sqrt{3}$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{4}$$

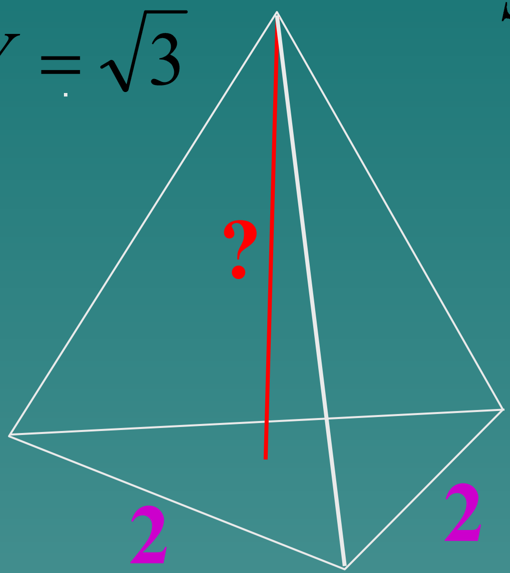
B 9	0	,	2	5		

Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объем равен $\sqrt{3}$.

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\overset{2}{a}\overset{2}{b}\sin \overset{60^0}{a}$$

$$S_o = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin 60^0 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$V = \sqrt{3}$$



$$\overset{\sqrt{3}}{V} = \frac{1}{3}\overset{\sqrt{3}}{S_o}H$$

$$\sqrt{3} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot H \quad / :\sqrt{3}$$

$$1 = \frac{1}{3}\cdot H \quad / \cdot 3$$

$$H = 3$$

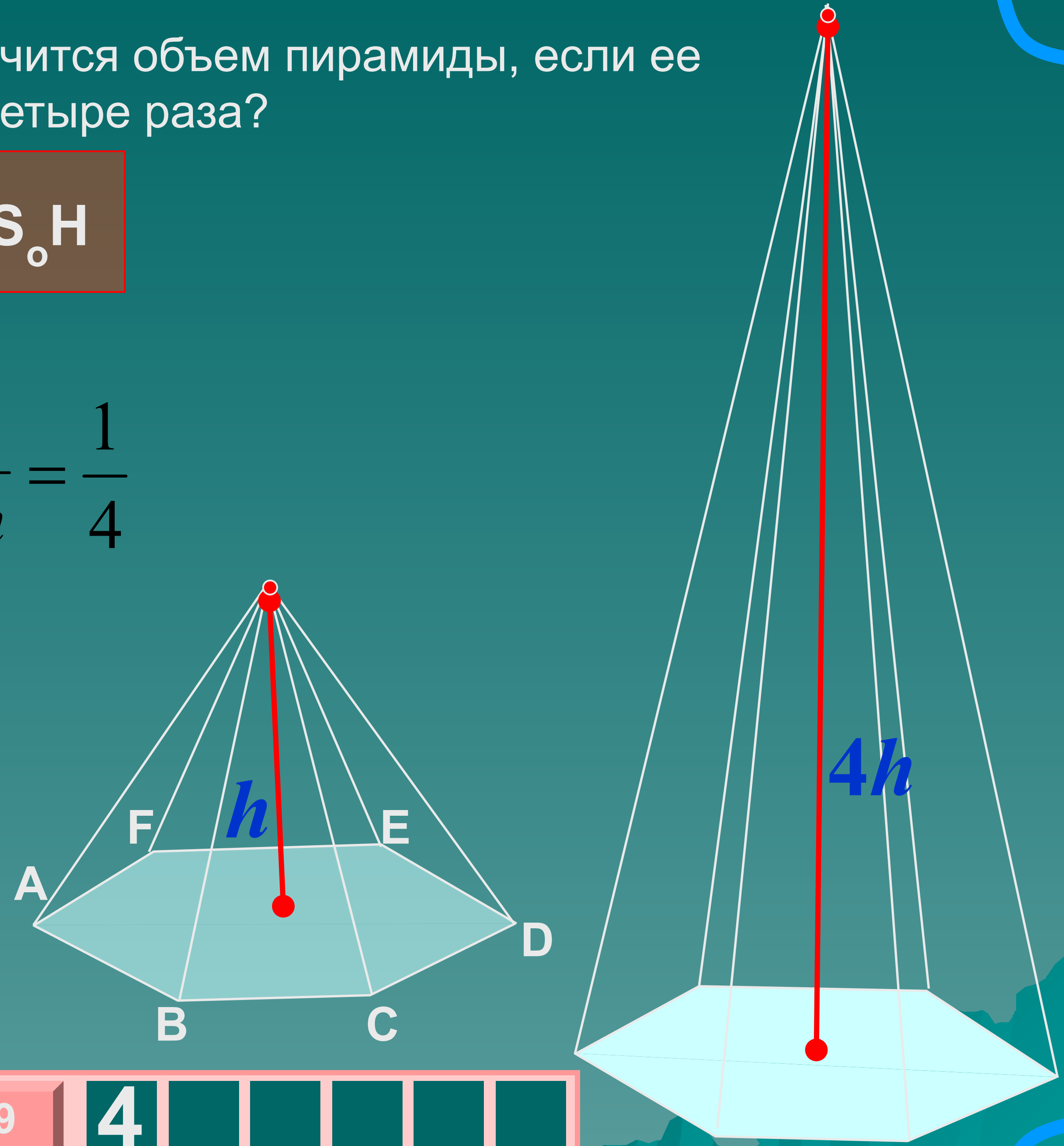
В 9	3					

Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?

$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

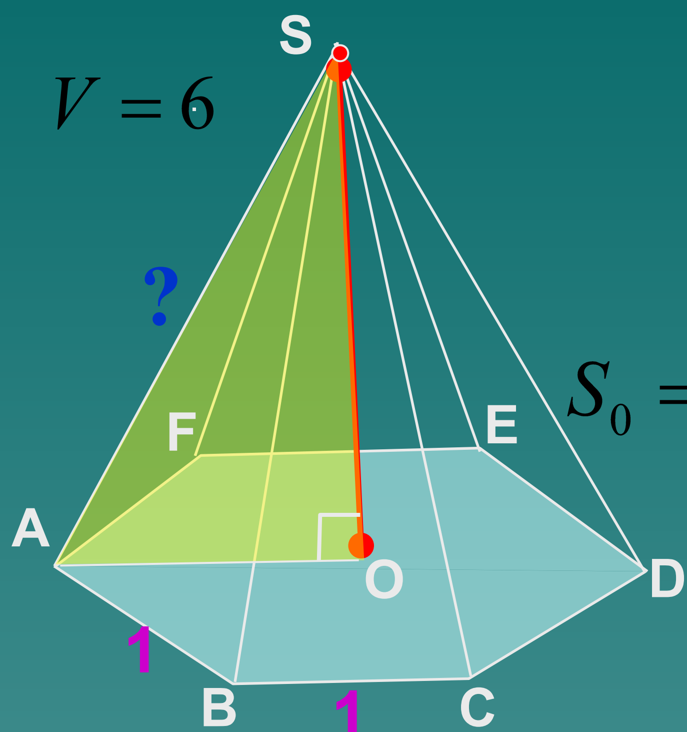
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cancel{\frac{1}{3}}\cancel{S_o}\, h_1}{\cancel{\frac{1}{3}}\cancel{S_o}\, h_2} = \frac{h}{4h} = \frac{1}{4}$$

Найдем отношение объемов



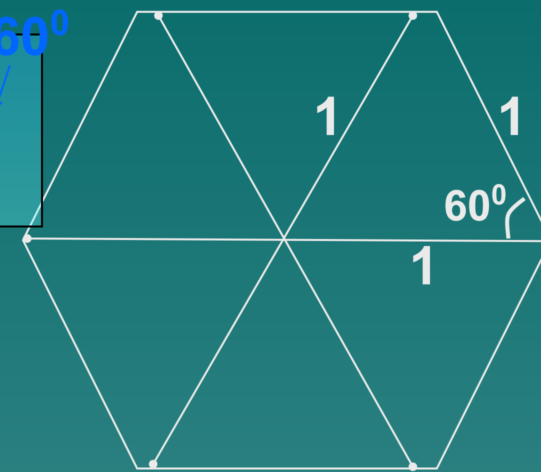
В 9	4					

Объем правильной шестиугольной пирамиды 6. Сторона основания равна 1. Найдите боковое ребро.



$$S_\Delta = \frac{1}{2}\,ab\sin a$$

1 1 60^0



$$S_0 = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 60^0$$

$$= 3\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Можно вычислить площадь правильного шестиугольника, разбив его на 6 треугольников.

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{o}} h$$

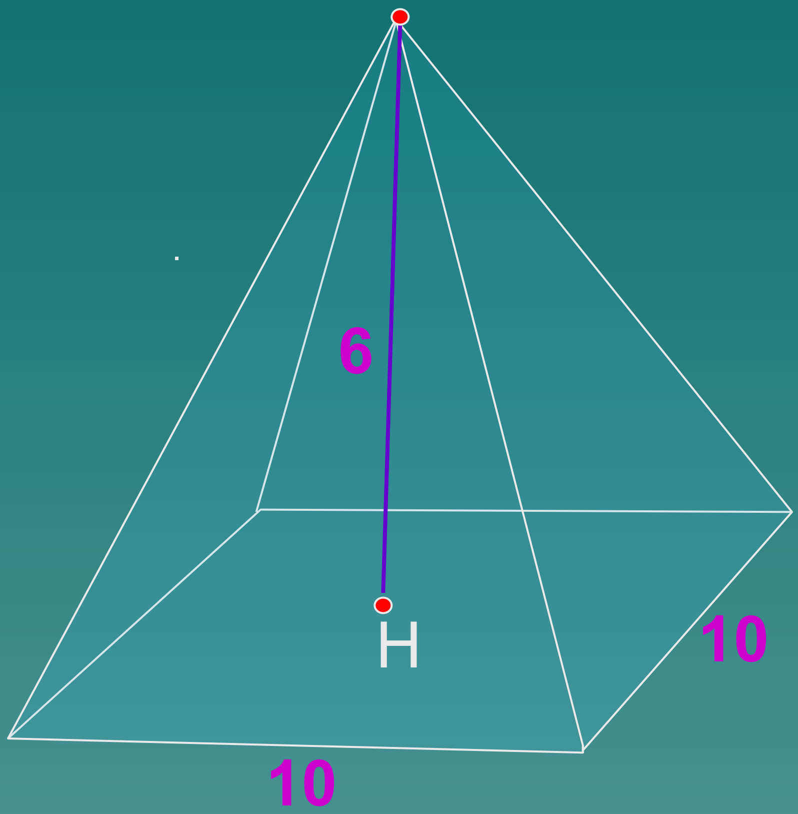
6 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$?

$$6 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}h; \quad h = \frac{6\cdot 2}{\sqrt{3}}; \quad h = \frac{12}{\sqrt{3}}.$$

Из ΔAOS по теореме Пифагора найди ребро AS.

В 9 | 7

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.



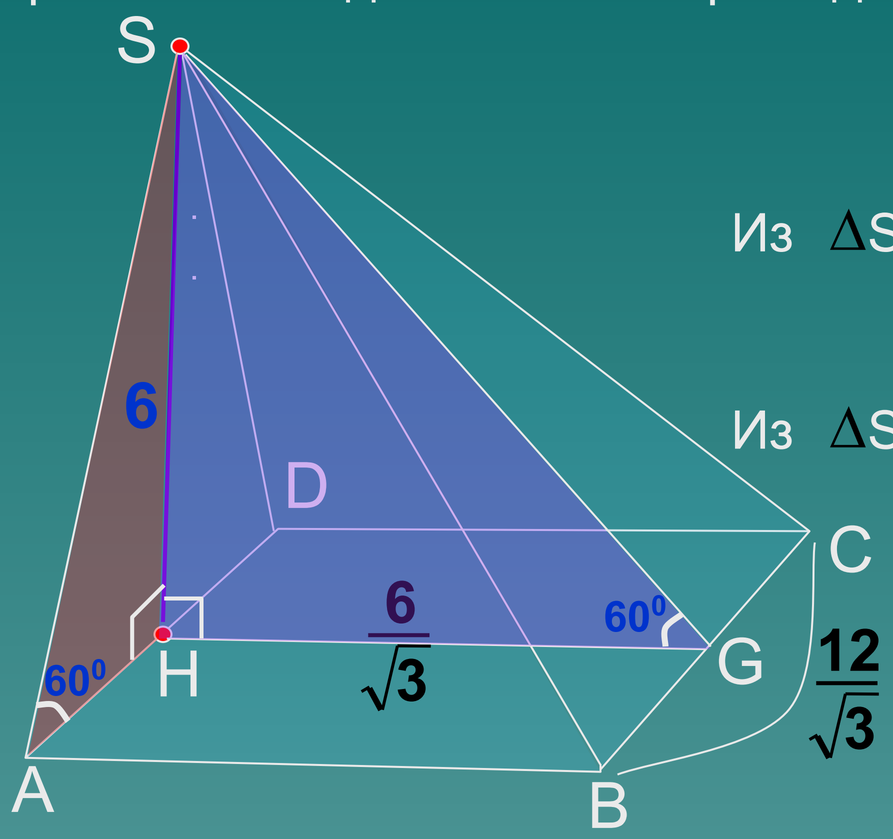
$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$S_{кв.} = a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \overbrace{10^2} \cdot 6 =$$

В 9	2	0	0			

Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60^0. Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.



$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

Из ΔSHG: $tg 60^0 = \frac{6}{HG}$; $HG = \frac{6}{\sqrt{3}}$

Из ΔSHA: $tg 60^0 = \frac{6}{AH}$; $AH = \frac{6}{\sqrt{3}}$

$AD = \frac{12}{\sqrt{3}}$

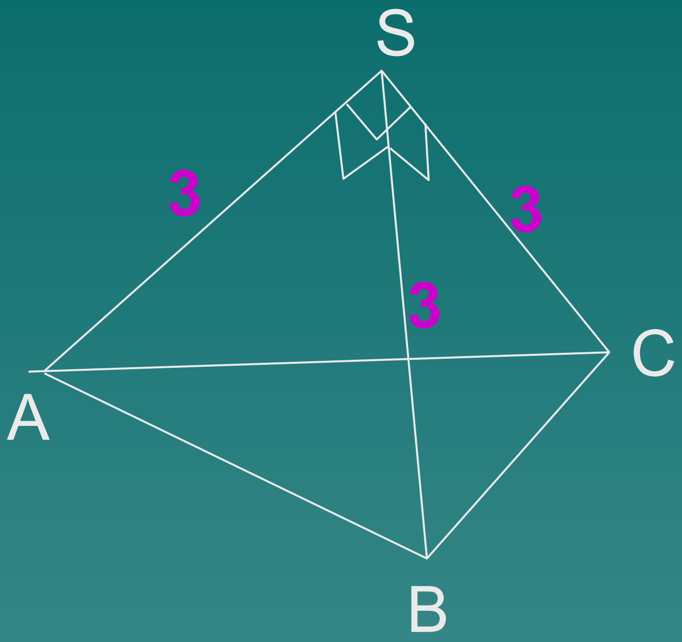
$$S_{пр.} = ab$$

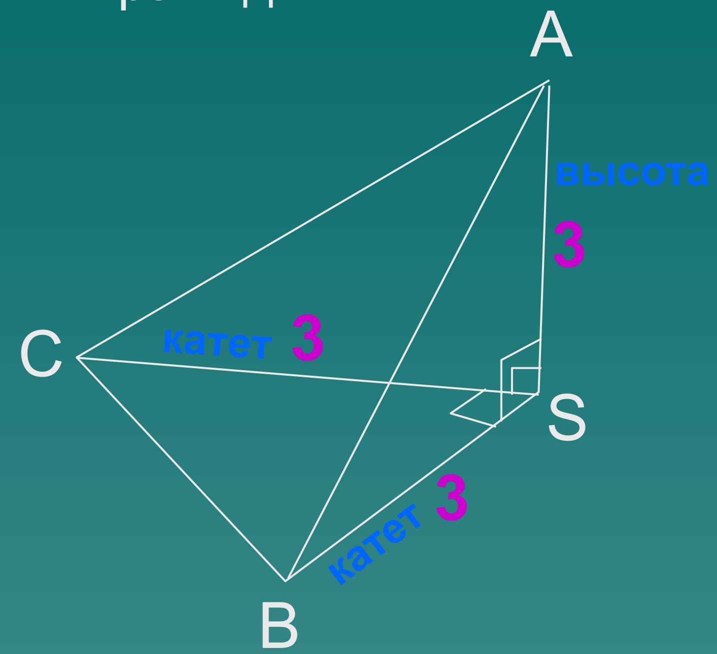
$$S_{ABCD} = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = 24$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6$$

В 9 | 4 | 8

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.





$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

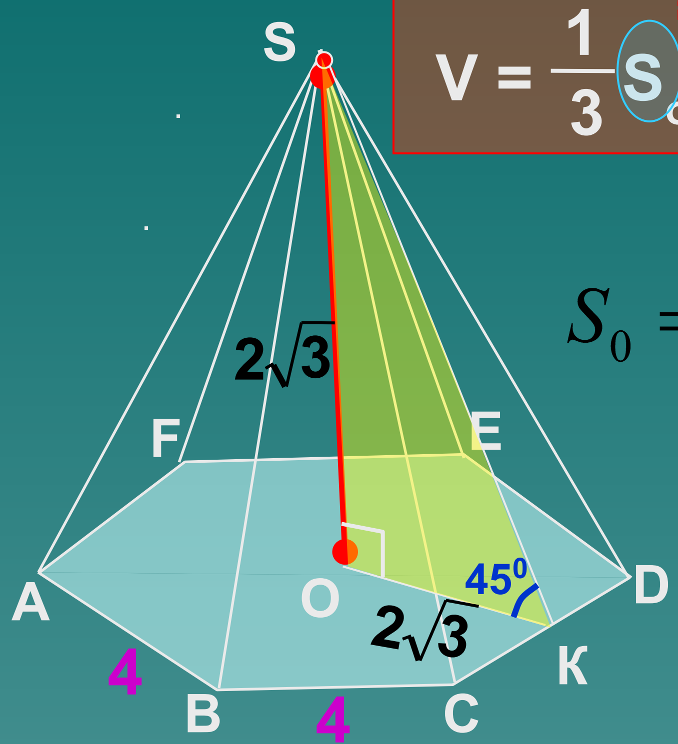
$$S_\Delta = \frac{1}{2} \overset{3}{a}\overset{3}{b}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3}_{S_\Delta} \cdot 3$$

Задача очень простая, если догадаться опрокинуть пирамиду на удобную грань, например, SCB.
Основание – прямоугольный треугольник SCB, высота AS.

В 9 | 4 , 5

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45^0. Найдите объем пирамиды.



$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

? ?

$$S_\Delta = \frac{1}{2} ab \sin a$$

4 4 60^0

$$S_0 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^0$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

Найдем **ОК** по теореме Пифагора

Можно вычислить площадь правильного шестиугольника, разбив его на 6 треугольников.

$$OK = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$$

$$\Delta SOK - р/б, \; OK = OS = 2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 24\cancel{\sqrt{3}} \cdot 2\cancel{\sqrt{3}}$$

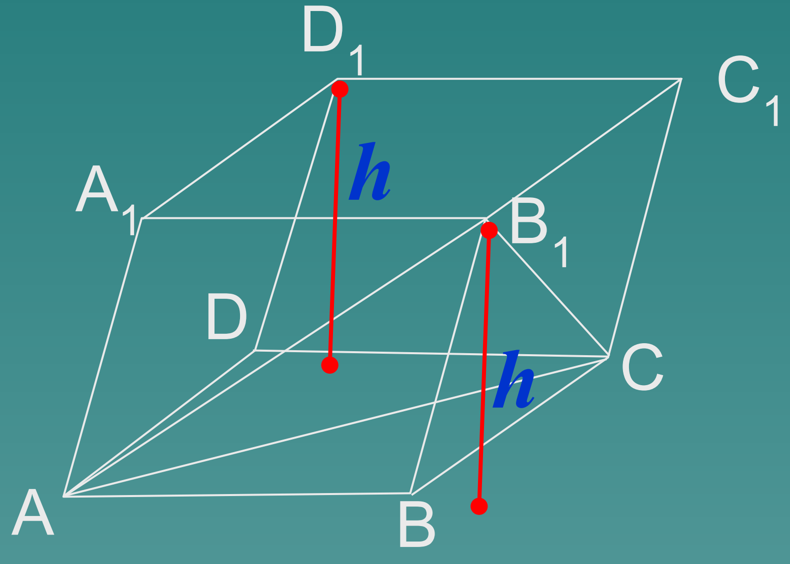
В 9	4	8				

Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12. Найдите объем треугольной пирамиды B_1ABC.

$$V_{\text{приз.}} = S_o H$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_{\text{приз.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{\overset{2S_{ABC}}{\overset{=}{S_{ABCD}}}\,\cancel{h}}{\frac{1}{3} S_{ABC}\,\cancel{h}} = \frac{2\cancel{S_{ABC}}}{\frac{1}{3}\cdot\cancel{S_{ABC}}} = \frac{6}{1}$$



Найдем отношение объемов

$$\frac{12}{V_{\text{пир.}}} = \frac{6}{1}$$

В 9 | 2

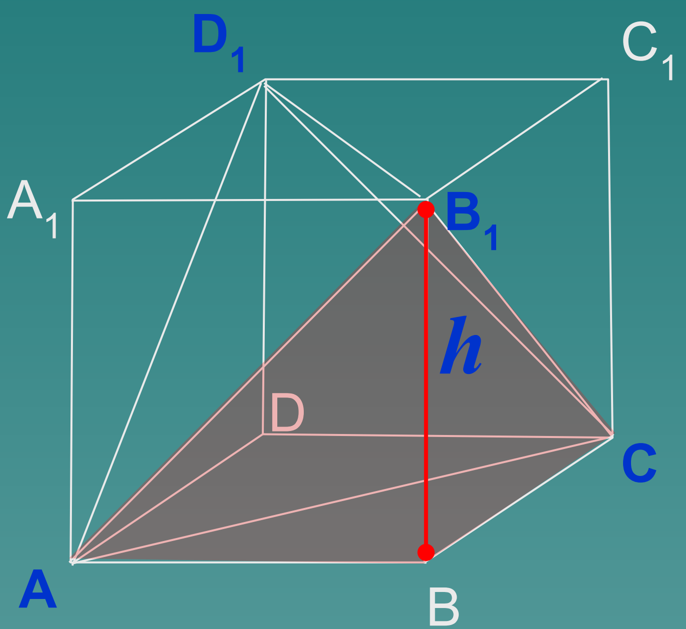
Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1.

Пирамида AD_1CB_1 получается, если мы отрежем от параллелепипеда четыре пирамиды по углам — $ABCB_1$, $D_1B_1CC_1$, $AA_1D_1B_1$ и $ADCD_1$. А объем каждой из них легко посчитать — мы делали это в предыдущей задаче. Например, найдем объем пирамиды $ABCB_1$.

$$V_{\text{пар.}} = S_o H$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_{\text{пар.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{\overset{2S_{ABC}}{S_{ABCD}} \cdot \cancel{h}}{\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \cancel{h}} = \frac{2\cancel{S_{ABC}}}{\frac{1}{3} \cdot \cancel{S_{ABC}}} = \frac{6}{1}$$



На… отношение объемов

$$\frac{4{,}5}{V_{\text{пир.}}} = \frac{6}{1}; \qquad V_{\text{пир.}} = \frac{3}{4}$$

Четыре пирамиды по углам — $ABCB_1$, $D_1B_1CC_1$, $AA_1D_1B_1$ и $ADCD_1$

$$4V_{\text{пир.}} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$$

Объем пирамиды AD_1CB_1

$$V_{AD_1CB_1} = 4{,}5 - 3 = 1{,}5$$

B 9	1	,	5			

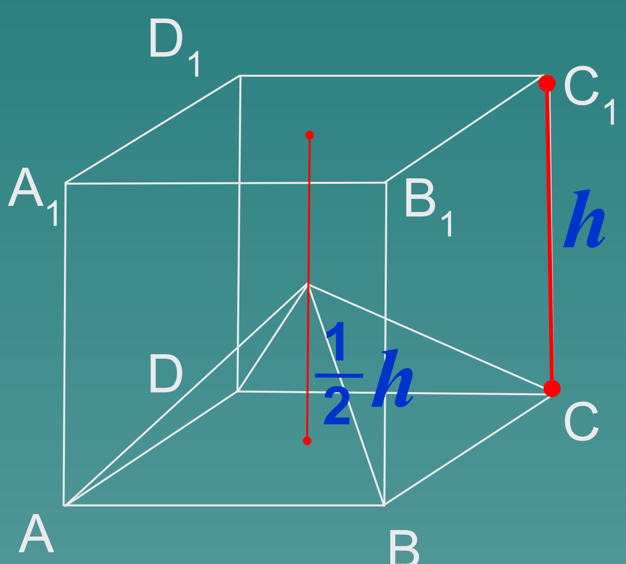
Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

Найдем отношение объемов

$$V_{\text{куб.}} = S_o h$$

$$\mathbf{V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_o H}$$

$$\frac{V_{\text{куб.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{\cancel{S_{ABCD}}\,\cancel{h}}{\frac{1}{3}\cancel{S_{ABCD}}\,\frac{1}{2}\cancel{h}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{1}$$



$$\frac{12}{V_{\text{пир.}}} = \frac{6}{1}$$

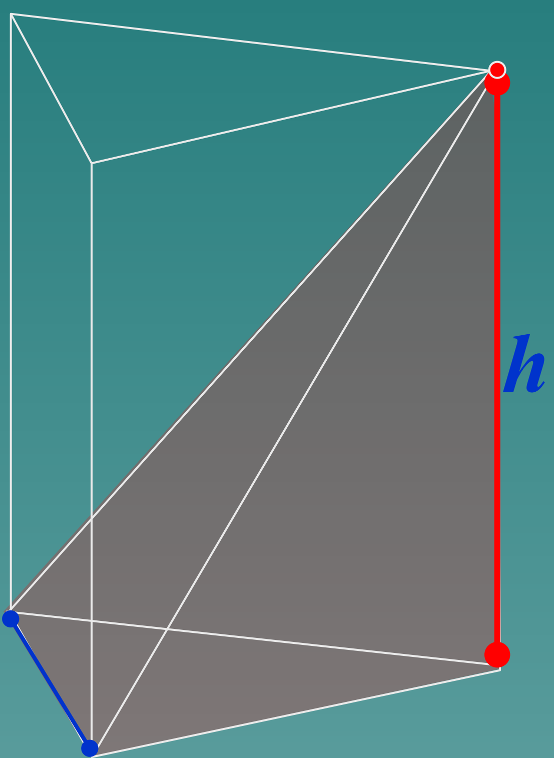
В 9 | 2

От треугольной призмы, объем которой равен 150, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.

$V_{\text{приз.}} = S_o H$

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_o H$

$$\frac{V_{\text{приз.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{\cancel{S_o}\,\cancel{h}}{\frac{1}{3}\cancel{S_o}\,\cancel{h}} = \frac{3}{1}$$



Найдем отношение объемов

$$\frac{150}{V_{\text{пир.}}} = \frac{3}{1}$$

В 9 | 5 0

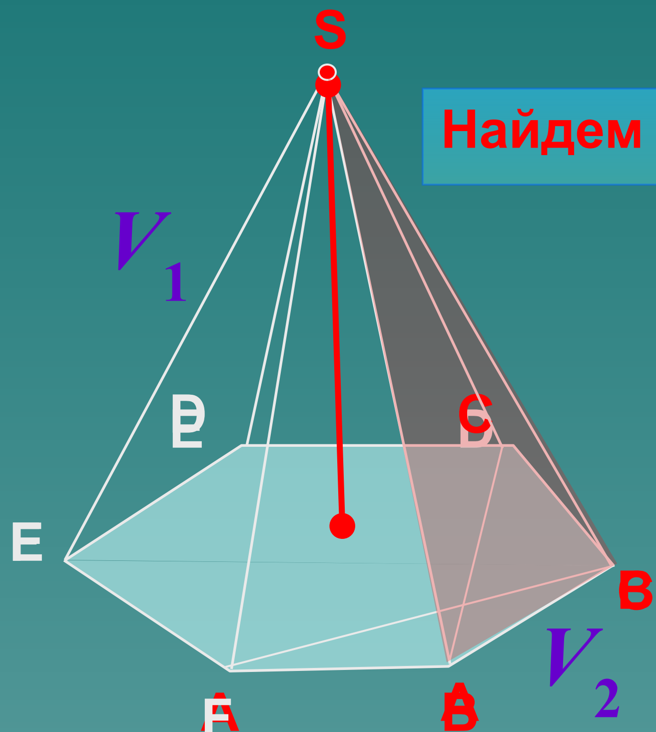
Объем треугольной пирамиды *SABC*, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF*, равен 8. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

У треугольной и шестиугольной пирамид, о которых говорится в условии, одинаковые высоты. Убедимся в этом, изменим расположение букв… Одинаковая высота, но площадь оснований различна.

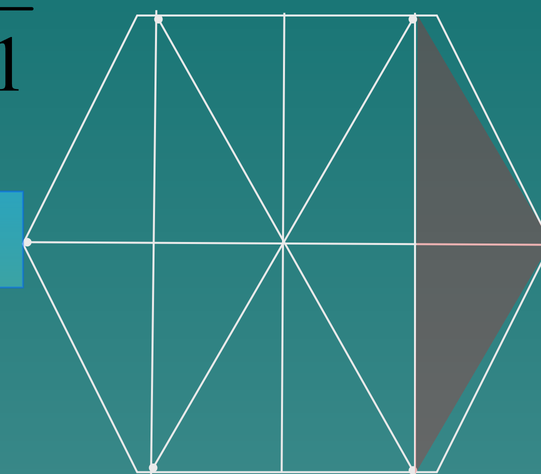
$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{о}} H$$

$$\frac{V_{\text{пир.1}}}{V_{\text{пир.2}}} = \frac{\cancel{\frac{1}{3}} S_6 \cancel{h}}{\cancel{\frac{1}{3}} S_{ABC} \cancel{h}} = \frac{6}{1}$$

Найдем отношение объемов



$$\frac{V_{\text{пир.1}}}{8} = \frac{6}{1}$$



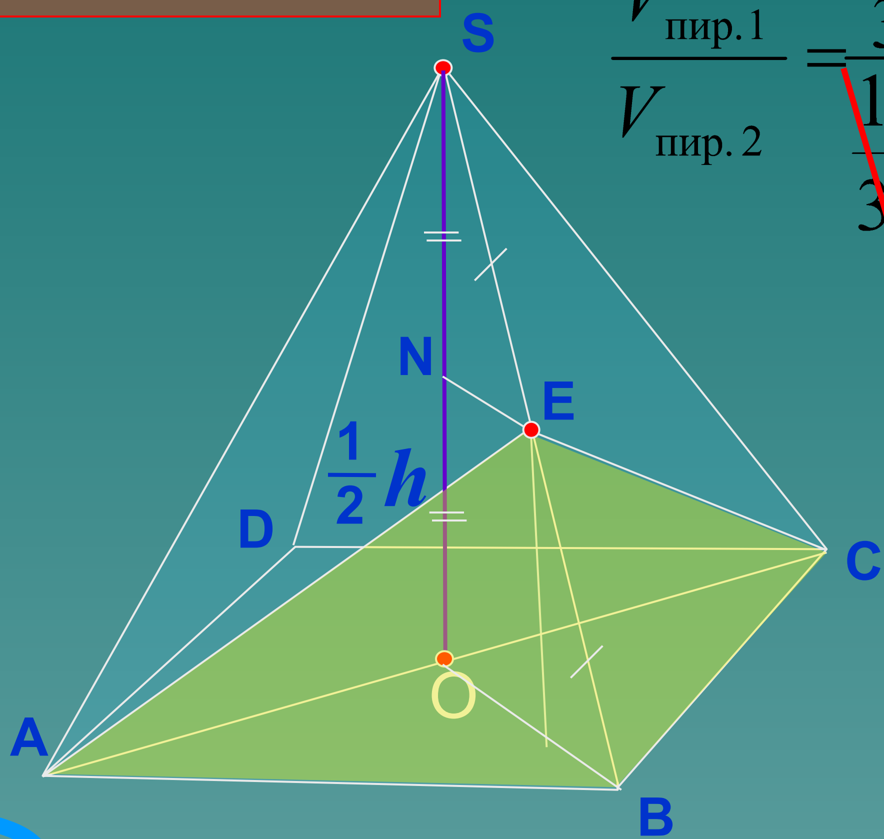
Поработаем с выносным чертежом. Видим, что площадь основания треугольной пирамиды в 6 раз меньше, чем у шестиугольной.

В 9: 4 8

Объем правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* равен 12. Точка *E* — середина ребра *SB*. Найдите объем треугольной пирамиды *EABC*.

Точка E – середина ребра SB, значит, точка N – середина SO (по т. Фалеса). Высота пирамиды EABC равна половине высоты пирамиды SABCD.

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{o}} H$$



$$\frac{V_{\text{пир.}1}}{V_{\text{пир.}2}} = \frac{\cancel{\frac{1}{3}} \overset{2S_{ABC}}{S_{ABCD}}\, \cancel{h}}{\cancel{\frac{1}{3}} S_{ABC} \frac{1}{2} \cancel{h}} = \frac{2\cancel{S_{ABC}}}{\cancel{S_{ABC}} \frac{1}{2}} = \frac{4}{1}$$

Найдем отношение объемов

$$\frac{12}{V_{\text{пир.}2}} = \frac{4}{1}$$

В 9	3					

От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin a$$

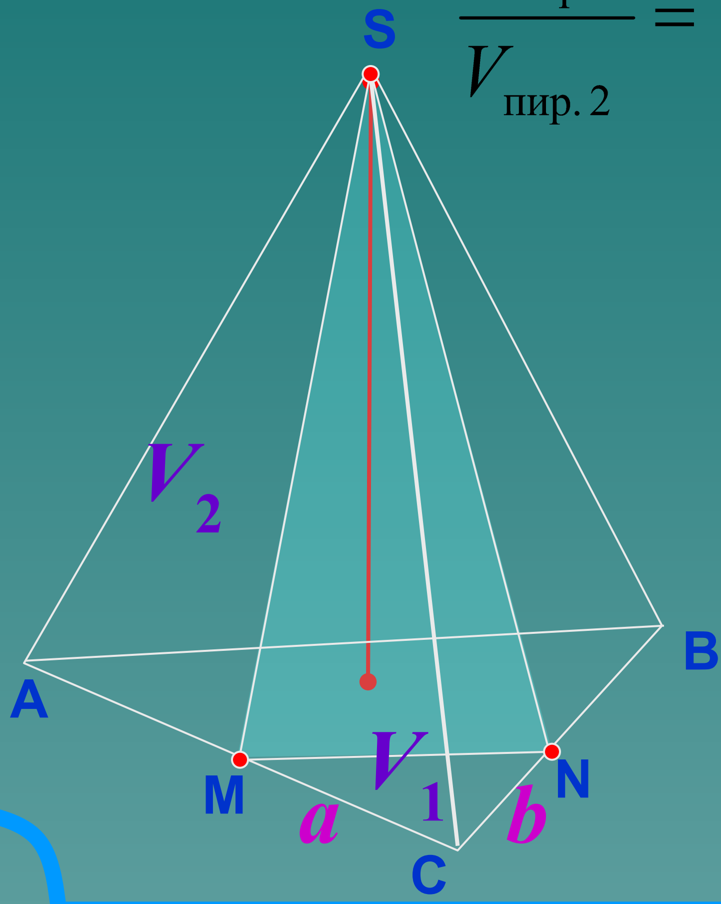
У треугольной пирамиды и отсеченной пирамиды, о которых говорится в условии, одинаковые высоты. Убедимся в этом, изменим расположение букв…

Одинаковая высота, но площадь оснований различна.

Работать можно с любым из этих чертежей.

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{o} H$$

$$\frac{V_{пир.1}}{V_{пир.2}} = \frac{\cancel{\frac{1}{3}} S_{NCM} \cancel{h}}{\cancel{\frac{1}{3}} S_{ABC} \cancel{h}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{a}\cancel{b} \cancel{\sin C}}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot 2\cancel{a} \cdot 2\cancel{b} \cancel{\sin C}} = \frac{1}{4}$$



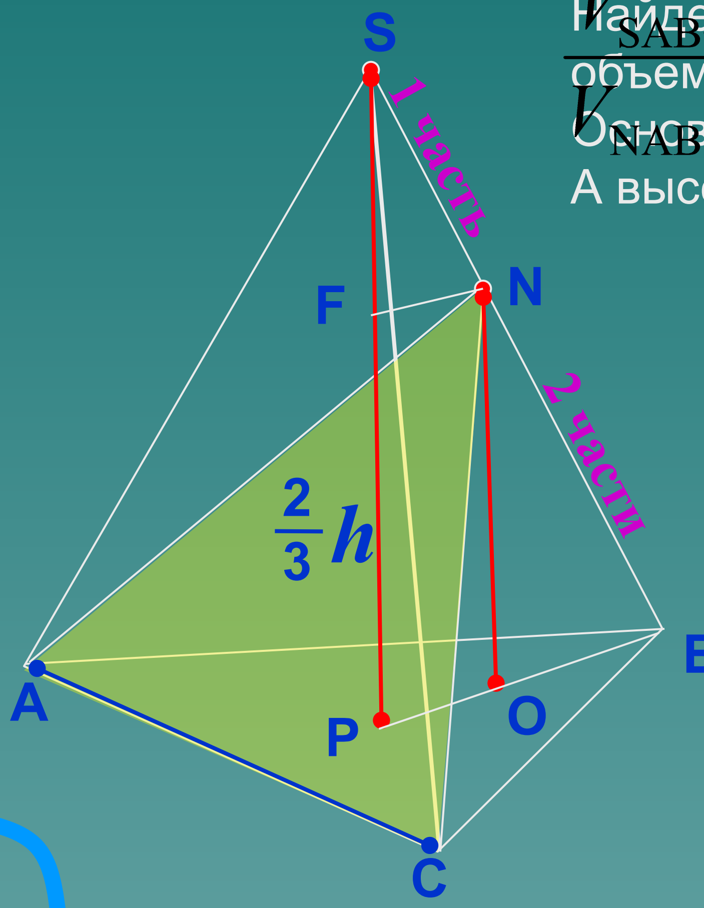
Найдем отношение объемов

$$\frac{V_{пир.1}}{12} = \frac{1}{4}$$

В 9	3					

Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

Надо сравнить объемы пирамид NABC и NSAC. Найдем объем пирамиды NABC. Затем из V_{SABC} (это 15) вычтем V_{NABC}, найдем V_{NSAC}.



Найдем объем пирамиды NABC. Сравним его с объемом всей пирамиды SABC, составив отношение. Основания у них одинаковые – треугольник ABC. А высоты разные, сравним их.

$$\frac{V_{SABC}}{V_{NABC}} = \frac{\cancel{\frac{1}{3}}\cancel{S_{ABC}}\cancel{h}}{\cancel{\frac{1}{3}}\cancel{S_{ABC}}\frac{2}{3}\cancel{h}} = \frac{3}{2}$$

По т. Фалеса FP:SP = 2:3.

Т... SP=h, то FP= $\frac{2}{3}$h, NO= $\frac{2}{3}$h

$$\frac{15}{V_{NABC}} = \frac{3}{2}$$

$$V_{NABC} = 10;$$

$$V_{NSAC} = 15 - 10 = 5.$$

В 9 | 1 | 0