



## Тема лекции 5.

---

# Статистические оценки параметров распределения случайных величин по выборкам. Степенные средние.

**Степенные средние и способы их вычисления.**

**Средняя взвешенная**

Средняя геометрическая

**Средняя квадратичная**

**Средняя кубическая**

**Средняя гармоническая**

**Средняя арифметическая для альтернативных признаков.**

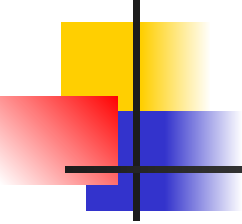
**Степенные средние и способы их вычисления.** Средняя арифметическая ( $\bar{X}$  – для выборочной совокупности;  $\tilde{X}$  – для генеральной совокупности). Этот показатель является центром распределения, вокруг которого группируются все варианты статистической совокупности. Средняя арифметическая может быть простой ( $\bar{X}$ ) и взвешенной ( $\bar{X}_{взв}$ ).

Методы вычисления средней арифметической ( $\bar{X}$ ):

а) прямой, когда среднюю арифметическую определяют как сумму вариантов всех членов совокупности, деленную на их число:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_n}{n} \quad (5)$$

прямой метод вычисления  $\bar{X}$  приемлем для малых выборок.

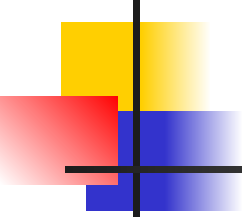


---

б) не прямой, приемлемый для больших выборок:

$$\bar{X} = A + k \frac{\sum fa}{n} \quad (6)$$

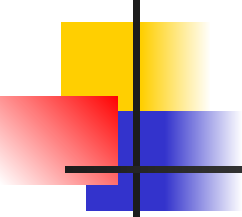
где  $A$  – условная средняя, взятая из модального класса.



---

**Средняя взвешенная** ( $\bar{X}_{вз}$ ) – это результат усреднения средних арифметических нескольких совокупностей. Для вычисления этого показателю пользуются формулой:

$$\bar{X}_{вз} = \frac{\bar{X}_1 \cdot n_1 + \bar{X}_2 \cdot n_2 + \dots + \bar{X}_n \cdot n_n}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} = \frac{\sum \bar{X} \cdot n}{\sum n} \quad (7)$$




---

*Условие.* Имеются средние арифметические показатели длины тела (в см) отдельных лабораторных крыс и их количество в разных лабораториях:

№ стад	1	2	3	4	5
$\bar{X}$	20	22	25	18	24
n	210	150	240	100	300

Требуется вычислить среднюю длину тела лабораторных крыс по этим лабораториям.



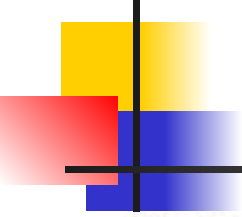
*Решение.* В данном случае нельзя вычислять среднюю арифметическую путем сложения всех средних по длине тела и деления суммы на количество лабораторий, так как средняя длина тела в каждой отдельной лаборатории относится к разному количеству крыс. Поэтому для вычисления пользуются формулой 6:

$$X_{\text{взв}} = \frac{20 \cdot 210 + 22 \cdot 150 + 25 \cdot 240 + 18 \cdot 100 + 24 \cdot 300}{210 + 150 + 240 + 100 + 300} = \frac{4200 + 3300 + 6000 + 1800 + 7200}{1000} = \frac{22500}{1000} =$$

22,5

*Ответ.* Средняя длина тела крыс по пяти лабораториям составляет:

$$X_{\text{взв}} = 22,5 \text{ см.}$$

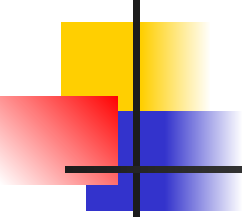


---

**Средняя геометрическая** ( $\bar{X}_g$ ) – это среднее значение признака, характеризующий темп роста, темп увеличения популяции. Применение данного показателя удобно в тех случаях, когда признак выражен в долях единицы или в процентах и изменяется во времени или по периодам. При вычислении  $\bar{X}_g$  необходимо исключать варианты, выражающиеся нулем или отрицательным числом. С помощью  $\bar{X}_g$  можно определить относительный прирост стада, привесов тела за определенный период времени. Формула для вычисления средней геометрической:

$$\bar{X}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (8)$$

где,  $x$  – варьирующий признак,  
 $n$  – число наблюдений в выборке.



---

*Условие.* Допустим, необходимо определить темп увеличения численности популяции бактерии кишечной палочки *E.coli* за 7 мин: 5-8-25.

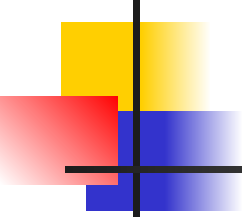
*Решение.* Для выполнения этого задания необходимо воспользоваться формулой 8.

$$\bar{X}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[3]{5 \cdot 8 \cdot 25} = \sqrt[3]{1000} = 10$$

*Ответ.* За 7 минут, в среднем, популяция бактерии *E.coli* увеличивается на 10.

—





---

**Средняя квадратичная ( $\bar{X}_s$ ) – характеристика мер площади:**

$$\bar{X}_s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}} \quad (9)$$

где  $\sum x^2$  - сумма квадратов варьирующего признака,  
n – число наблюдений в выборке.

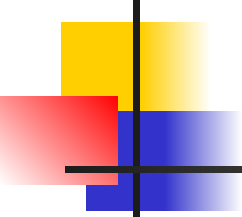
*Условие.* Необходимо определить средний диаметр ядра в клетках следующего вариационного ряда ( $x$  – диаметр клеток, микрон):

№	$x$	$x^2$	№	$x$	$x^2$
1	15	225	7	20	400
2	12	144	8	19	361
3	20	400	9	17	289
4	22	484	10	14	196
5	18	324	11	14	196
6	15	225	12	12	144
					$\sum x^2 = 3388$

*Решение.* Используя формулу 9, находим

$$\bar{X}_s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}} = \sqrt{\frac{3388}{12}} = \sqrt{282,33} = 16,80$$

*Ответ.* Средний диаметр ядер равен 16,80  $\mu$ .



---

**Средняя кубическая ( $\bar{X}_Q$ ) – характеристика объемных признаков:**

$$\bar{X}_Q = \sqrt[3]{\frac{\sum fx^3}{n}} \quad (10)$$

*Условие.* Допустим, необходимо определить средний объем яиц по их диаметрам. Объем 18 куриных яиц (учитывали полусумму большого и малого диаметра) были следующими (диаметр яиц –  $x$ , см; число случаев –  $f$ ):

$x$ , см	4,7	4,8	5,0	5,4	5,6	6,0	
$f$	2	4	6	3	2	1	$\Sigma f = n = 18$

*Решение.* Средний объем яиц при использовании формулы 9 составит:

$$\bar{X}_Q = \sqrt[3]{\frac{\sum fx^3}{n}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 4,7^3 + 4 \cdot 4,8^3 + 6 \cdot 5,0^3 + 3 \cdot 5,4^3 + 2 \cdot 5,6^3 + 1 \cdot 6,0^3}{18}} = \sqrt[3]{\frac{2419,638}{18}} = \sqrt[3]{134,42} = 5,12 \text{ см}$$

*Ответ.* Средний объем яиц равен 5,12 см.


**Средняя гармоническая** ( $X_H$ ) – показатель используется для определения средних изменяющихся скоростей. Для таких процессов характерно, что при увеличении одного показателя другой изменяется в обратном направлении, т.е. уменьшается. Например, чем быстрее бежит лошадь, тем меньше она тратит время на прохождение пути.

$$\bar{X}_H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}} \quad (11)$$

В заключении обзора степенных средних необходимо отметить, что между ними существуют определенные соотношения, выражаемые следующим рядом мажорантности (неравенства):

$$\bar{X}_g > \bar{X}_s > \bar{X} > \bar{X}_Q > \bar{X}_H. \quad (12)$$

Из этого ряда следует, что  $\bar{X}_H$  всегда меньше, чем  $\bar{X}$ ,  $M_o$ ,  $M_e$  и других средних величин.



*Условие.* Допустим, пять школьников возрастом 10 лет в течение 1 часа (60 мин) прочитали следующее количество страниц:

первый – 10с; второй – 20с; третий – 25 с; четвертый – 30 с; пятый – 20 с.  
Всего - 105 с.


*Решение.* При использовании формулы 10 мы получим среднее количество страниц, прочитанное ими за 60 мин:

$$\bar{X}_H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}} = \frac{5}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20}} = \frac{5}{0,273} = 18,31 \text{стр}$$

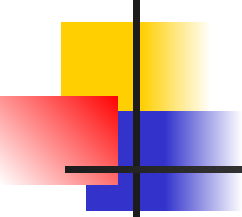
*Ответ.* Среднее количество страниц, прочитанное за 60 мин школьниками равно 18,31с.

**Средняя арифметическая для альтернативных признаков.** При вычислении средней арифметической для альтернативных признаков применяют показатель доли, в которую входят члены совокупности, имеющие данный альтернативный признак. Это можно выразить следующей формулой:

---


$$\bar{X}_{\text{альт}} = \frac{P}{n} \quad (13)$$

где  $p$  - число членов совокупности с наличием альтернативного признака;  
 $n$  – общее число членов выборки.



---

Показатель разнообразия для альтернативных признаков определяют при помощи среднего квадратического отклонения в абсолютных и относительных выражениях по формулам:

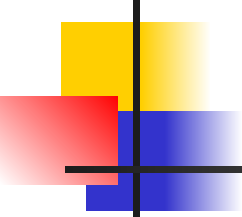
$$\sigma = \sqrt{p \cdot q} \quad (14)$$

$$\text{или } \sigma = \sqrt{p \cdot (1 - q)} \quad (15)$$

$$\text{или } \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \quad (16)$$

где:  $p$ - доля особей, имеющих данный признак в совокупности;  
 $q$ - доля особей, лишенных данного признака.





---

Если требуется получить величину стандартного отклонения, выраженную в абсолютных показателях, необходимо воспользоваться формулой 15.

Необходимо помнить, что величина стандартного отклонения для качественных признаков не больше 0,5 или 50%.

*Литература:*

Основная – 1 [6-88]; 2 [т.1-11-78]; 3 [14-17].

Дополнительная – 3 [9-24]; 5 [8-16].

*Контрольные вопросы:*

1. Показатели средних величин: свойства и особенности их применения.
2. Структурные средние и способы их вычисления.
3. Степенные средние и способы их вычисления.
4. Средняя гармоническая.
5. Средняя арифметическая для альтернативных признаков.



















