

07.10.21.

Тема:

Показательная функция.

Показательные уравнения и неравенства.

*Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://youtu.be/Ulg9XNZ5RnY>

<https://youtu.be/H9AdblvXoOc>

## Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

### Показательная функция, её свойства и график

*Показательной функцией* называется функция вида  $y = a^x$ , где  $a$  — заданное число,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Свойства показательной функции.

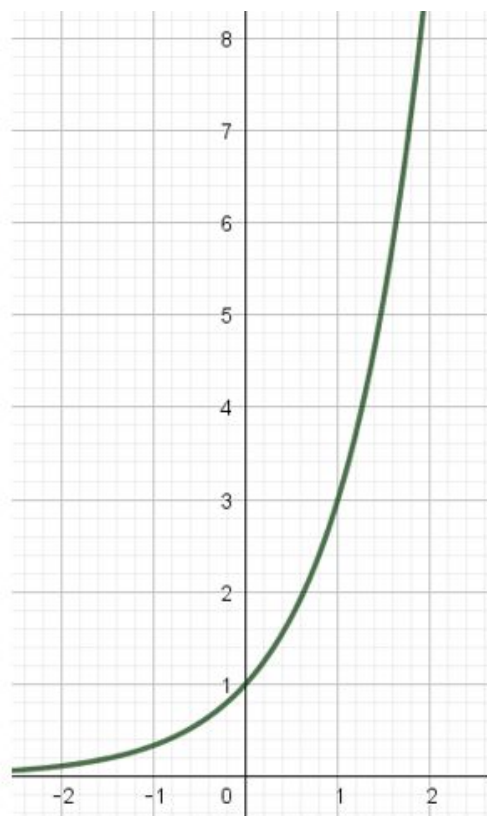
- 1) Область определения показательной функции — множество  $\mathbf{R}$  всех действительных чисел.
- 2) Множество значений показательной функции — множество всех положительных чисел.
- 3) Показательная функция  $y = a^x$  является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если  $a > 1$ , и убывающей, если  $0 < a < 1$ .

Пример показательной функции и ее графика,  $a > 1$

$y = a^x$  Где  $a$  – заданное число,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$$y = 3^x$$

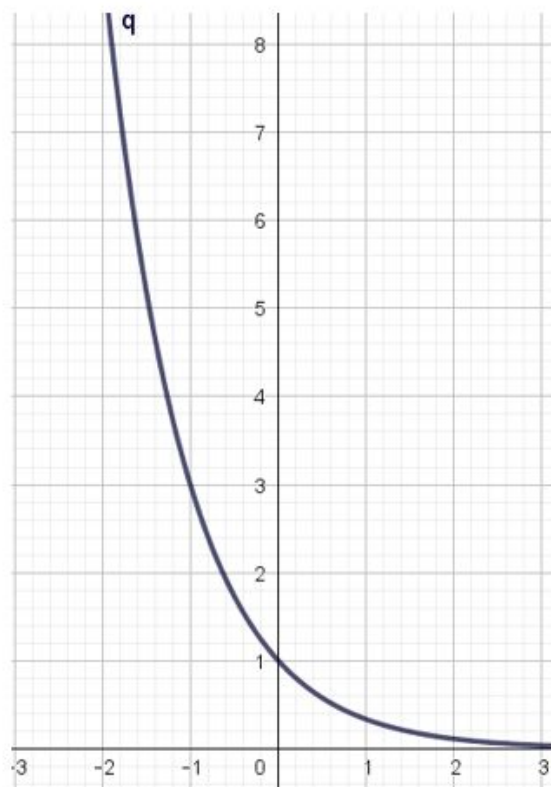
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27



$a$  может быть меньше 1,  $0 < a < 1$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$



## Показательные уравнения

Рассмотрим несколько примеров показательных уравнений, т. е. уравнений, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения  $a^x = a^b$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x$  — неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени (см. сл. 2, § 5, гл. I): степени с одинаковым основанием  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Решить уравнение  $4 \cdot 2^x = 1$ .

Запишем уравнение в виде  $2^{x+2} = 2^0$ , откуда  $x + 2 = 0$ .

Ответ:  $x = -2$

Решить уравнение  $2^{3x} \cdot 3^x = 576$ .

Так как  $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$ ,  $576 = 24^2$ , то уравнение можно записать в виде  $8^x \cdot 3^x = 24^2$ , или в виде  $24^x = 24^2$ , откуда  $x = 2$ .

$x = 2$ .  $\triangleleft$

Ответ:  $x = 2$

Решить уравнение

$$5^{2x^2 - 5x} = 5^{x^2 + 2x - 10}. \quad (1)$$

Так как  $5 > 0$ ,  $5 \neq 1$ , то

$$2x^2 - 5x = x^2 + 2x - 10, \quad (2)$$

откуда  $x^2 - 7x + 10 = 0$ ,  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 2$ .

Ответ:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 5$

Отметим, что при таком способе решения получается уравнение, равносильное исходному, например уравнение (2) равносильно уравнению (1). Поэтому после решения уравнения (2) проверка не нужна (если есть уверенность в том, что не допущены ошибки в преобразованиях и вычислениях).

## Показательные неравенства

Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств

$$a^x > a^b \text{ или } a^x < a^b.$$

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Решить неравенство  $3^x < 81$ .

Запишем неравенство в виде  $3^x < 3^4$ . Так как  $3 > 1$ , то функция  $y = 3^x$  является возрастающей. Поэтому решениями неравенства  $3^x < 81$  являются числа  $x < 4$ .

**Ответ**  $x < 4$ .

Решить неравенство  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$ .

Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{\frac{3}{2}}, \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Так как  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  — убывающая функция, то

$$x < -\frac{3}{2}.$$

**Ответ**  $x < -\frac{3}{2}$ .

Решить неравенство  $3^{x^2-x} < 9$ .

Запишем неравенство в виде  $3^{x^2-x} < 3^2$ . Так как  $3 > 1$ , то  $x^2 - x < 2$ , откуда  $x^2 - x - 2 < 0$ ,  $-1 < x < 2$ .

**Ответ**  $-1 < x < 2$ .

## Практическая часть.

209 1)  $27^x = \frac{1}{3}$ ; 2)  $400^x = \frac{1}{20}$ ; 3)  $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$ ; 4)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$ .

210 1)  $3 \cdot 9^x = 81$ ; 2)  $2 \cdot 4^x = 64$ ;  
3)  $3^{x+\frac{1}{2}} \cdot 3^{x-2} = 1$ ; 4)  $0,5^{x+7} \cdot 0,5^{1-2x} = 2$ ;  
5)  $0,6^x \cdot 0,6^3 = \frac{0,6^{2x}}{0,6^5}$ ; 6)  $6^{3x} \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$ .

211 1)  $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$ ; 2)  $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$ ;

Решить неравенство (228—229).

228 1)  $3^x > 9$ ; 2)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$ ; 3)  $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$ ;  
4)  $4^x < \frac{1}{2}$ ; 5)  $2^{3x} \geq \frac{1}{2}$ ; 6)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leq \frac{1}{9}$ .

229 1)  $5^{x-1} \leq \sqrt{5}$ ; 2)  $3^{\frac{x}{2}} > 9$ ; 3)  $3^{x^2-4} \geq 1$ ; 4)  $5^{2x^2-18} < 1$ .

231 1)  $2^{-x^2+3x} < 4$ ; 2)  $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{9}{7}$ .