07.10.21.

Тема:
Показательная функция. Показательные уравнения и неравенства.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://youtu.be/UIg9XNZ5RnY
https://youtu.be/H9AdblvXoOc

Теоретическая часть:
Прочитать и понять.
Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Показательная функция, её свойства и график

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Свойства показательной функции.

1) Область определения показательной функции — множество R всех действительных чисел.

2) Множество значений показательной функции — множество всех положительных чисел.

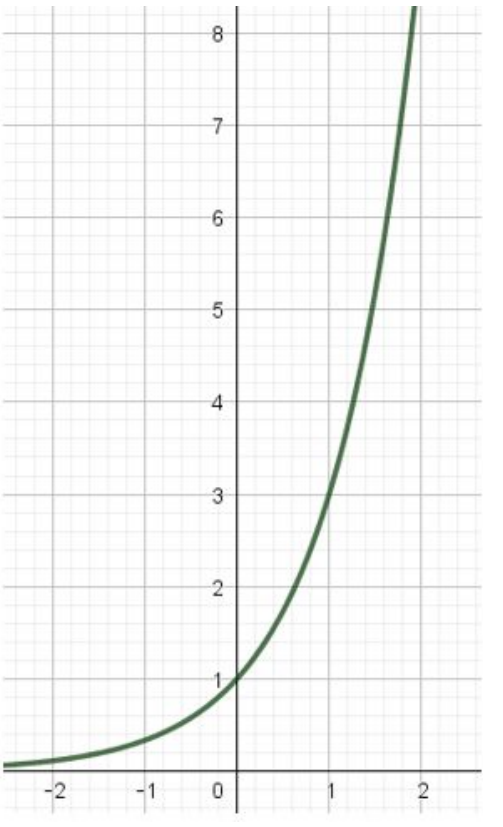
3) Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

Пример показательной функции и ее графика, а >1

$y = a^x$ **Где a – заданное число**, ***a>0, a≠1.***

$y = 3^x$

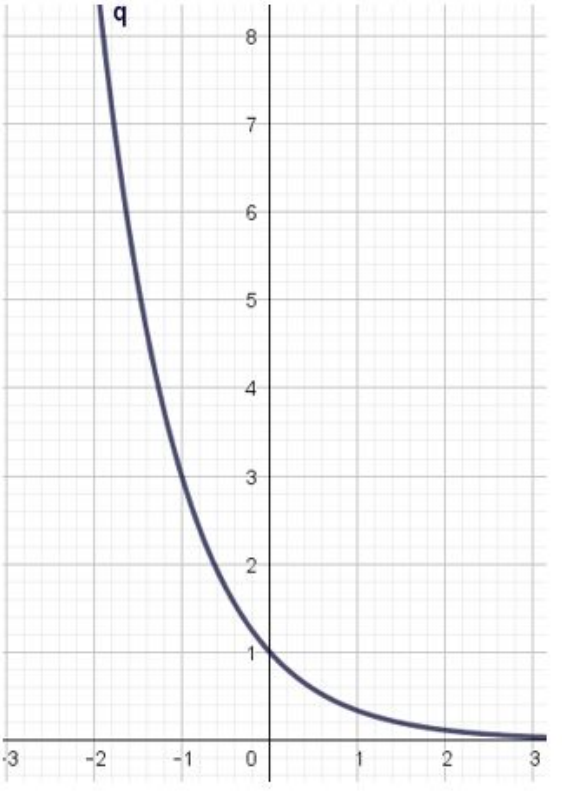
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27



a может быть меньше 1, ***0<a <1***

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$



Показательные уравнения

Рассмотрим несколько примеров показательных уравнений, т. е. уравнений, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x — неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени (см. сл. 2, § 5, гл. I): степени с одинаковым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Решить уравнение $4 \cdot 2^x = 1$.

Запишем уравнение в виде $2^{x+2} = 2^0$, откуда $x + 2 = 0$.

Ответ: x = -2

Решить уравнение $2^{3x} \cdot 3^x = 576$.

Так как $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$, $576 = 24^2$, то уравнение можно записать в виде $8^x \cdot 3^x = 24^2$, или в виде $24^x = 24^2$, откуда $x = 2$.

$x = 2$. ◁

Ответ: x = 2

Решить уравнение

$$5^{2x^2-5x} = 5^{x^2+2x-10}. \qquad (1)$$

Так как $5 > 0$, $5 \neq 1$, то

$$2x^2 - 5x = x^2 + 2x - 10, \qquad (2)$$

откуда $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$

Отметим, что при таком способе решения получается уравнение, равносильное исходному, например уравнение (2) равносильно уравнению (1). Поэтому после решения уравнения (2) проверка не нужна (если есть уверенность в том, что не допущены ошибки в преобразованиях и вычислениях).

Показательные неравенства

Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств

$$a^x > a^b \text{ или } a^x < a^b.$$

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Решить неравенство $3^x < 81$.

Запишем неравенство в виде $3^x < 3^4$. Так как $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ является возрастающей. Поэтому решениями неравенства $3^x < 81$ являются числа $x < 4$.

Ответ $x < 4$.

Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$.

Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{\frac{3}{2}}, \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Так как $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — убывающая функция, то $x < -\frac{3}{2}$.

Ответ $x < -\frac{3}{2}$.

Решить неравенство $3^{x^2 - x} < 9$.

Запишем неравенство в виде $3^{x^2 - x} < 3^2$. Так как $3 > 1$, то $x^2 - x < 2$, откуда $x^2 - x - 2 < 0$, $-1 < x < 2$.

Ответ $-1 < x < 2$.

Практическая часть.

209 1) $27^x = \frac{1}{3}$; 2) $400^x = \frac{1}{20}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$.

210 1) $3 \cdot 9^x = 81$; 2) $2 \cdot 4^x = 64$;

3) $3^{x+\frac{1}{2}} \cdot 3^{x-2} = 1$; 4) $0{,}5^{x+7} \cdot 0{,}5^{1-2x} = 2$;

5) $0{,}6^x \cdot 0{,}6^3 = \frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$; 6) $6^{3x} \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$.

211 1) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$; 2) $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$;

Решить неравенство (228—229).

228 1) $3^x > 9$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$;

4) $4^x < \frac{1}{2}$; 5) $2^{3x} \geqslant \frac{1}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leqslant \frac{1}{9}$.

229 1) $5^{x-1} \leqslant \sqrt{5}$; 2) $3^{\frac{x}{2}} > 9$; 3) $3^{x^2-4} \geqslant 1$; 4) $5^{2x^2-18} < 1$.

231 1) $2^{-x^2+3x} < 4$; 2) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geqslant \frac{9}{7}$