Касательная и нормаль к графику

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, зададим приращение Δx аргументу x так, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ лежала бы в этой окрестности. Обозначим точки графика функции $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Прямая, проходящая через точки M_0 и M_1 называется *секущей* графика функции.

Предельное положение секущей, при $\Delta x \to 0$ называется *касательной* к графику функции в точке M_0.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда значение производной функции в этой точке есть тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке M_0, к положительному направлению оси абсцисс.

Нормалью к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется прямая, перпендикулярная касательной к графику в этой точке.

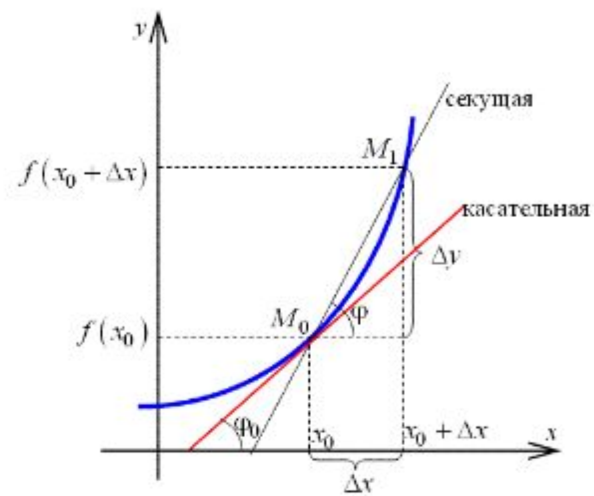
Уравнение касательной к графику $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали при $f'(x_0) \neq 0$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

а при $f'(x_0) = 0$ нормаль перпендикулярна оси Ox, и её уравнение: $x = x_0$.



Пример 1. Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке $x_0 = 1$.

Р е ш е н и е. Для определения углового коэффициента касательной $f'(x_0)$ вычислим значение производной функции y в точке $x_0 = 1$:

$$f'(x) = (x^2 - 4x)' = 2x - 4,$$

$$f'(1) = 2 - 4 = -2.$$

Подставляя в уравнение параболы значение $x_0 = 1$, найдем ординату точки касания y_0:

$$y_0 = f(x_0) = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3.$$

Зная значения y_0, $f'(x_0)$, x_0, запишем уравнения касательной и нормали:

$y + 3 = -2(x - 1)$ или $2x + y + 1 = 0$ – уравнение касательной,

$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$ или $x - 2y - 7 = 0$ – уравнение нормали.

Составить уравнение касательной к кривой $y = \frac{8}{4+x^2}$ в точке $x = 2$.

- $x + 2y + 4 = 0$
- $x + 2y - 4 = 0$
- $x - 2y + 4 = 0$
- $x - 2y - 4 = 0$

Касательная и нормаль к кривой, заданной неявно

Пример 2. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке $M(1, -1)$.

Р е ш е н и е. Из уравнения кривой нельзя явным образом выразить функцию $y = f(x)$, поэтому для нахождения производной $f'(x)$ продифференцируем обе части уравнения, считая y функцией переменной x:

$$2x + 2y^2 + 2x \cdot 2yy' + 12y^3y' = 0.$$

Разрешим полученной равенство относительно y':

$$x + y^2 + y'(2xy + 6y^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}.$$

Вычислим значение $y'(x_0)$ (x_0 – абсцисса точки $M(1, -1)$, т.е. $x_0 = 1$):

$$y'(1) = -\frac{1+(-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 6(-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1)$ или $x - 4y - 5 = 0$ – уравнение касательной,

$y + 1 = -4(x - 1)$ или $4x + y - 3 = 0$ – уравнение нормали.

Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, проведенной в точке $M_0(-9, -8)$.

- ○ $-x + y + 1 = 0$
- ○ $x - y - 1 = 0$
- ◉ $x - y + 1 = 0$
- ○ $-x - y - 1 = 0$

Составить уравнение касательной к окружности

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$$

в точке $M_0(-3, 0)$.

- $2x - y + 6 = 0$
- $x + 2y + 3 = 0$
- $-2x + y - 3 = 0$
- $-x + 2y - 3 = 0$

Касательная и нормаль к кривой, заданной параметрически

Пример 3. Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ в точке, соответствующей значению параметра $t = \frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Найдем координаты точки касания $M(x_0, y_0)$, для этого подставим значение параметра $t = \frac{\pi}{2}$ в уравнения циклоиды:

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$y_0 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1.$$

Найдем производную функции y заданной параметрически:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

Вычислим значение производной в точке , соответствующей значению параметра $t = \frac{\pi}{2}$:

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{1-\cos(\frac{\pi}{2})} = 1.$$

Составим уравнения касательной и нормали:

$y - 1 = x - \frac{\pi}{2} + 1$ или $2y - 2x = 4 - \pi$ – уравнение касательной,

$y - 1 = -\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right)$ или $2x + 2y = \pi$ – уравнение нормали.

Составить уравнение касательной к полукубической параболе

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \end{cases}$$

проведенной в точке, соответствующей значению параметра $t = 2$.

- ○ $3x + y + 4 = 0$
- ○ $3x + y - 4 = 0$
- ○ $-3x + y - 4 = 0$
- ◉ $3x - y - 4 = 0$

Составить уравнение нормали к полукубической параболе

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \end{cases}$$

проведенной в точке, соответствующей значению параметра $t = 2$.

- $x + 3y + 28 = 0$
- $x - 3y - 28 = 0$
- $-x - 3y - 28 = 0$
- $x + 3y - 28 = 0$

Составить уравнение касательной к кривой,

заданной неявно уравнением

$(x - y + 1)(x + y - 1) = 3$ в точке $M(2,\ 2)$

- ○ $y = 2x - 6$
- ○ $y = x - 12$
- ○ $y = x$
- ◉ $y = 2x - 2$

Составить уравнение касательной к кривой,

заданной неявно уравнением

$x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$ в точке $M\,(1,\,1)$

- $y = 2 - x$
- $x = 1$
- $y = x$
- $y = 1$

Составить уравнение касательной к графику функции

$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$

- $2y - x = \frac{\pi}{2} - 1$
- $2y + x = \frac{\pi}{2}$
- $y - x = \frac{\pi}{2}$
- $2y + x = \frac{\pi}{2} + 1$

Составить уравнение касательной к графику функции

$y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$

- $2y + x = \frac{\pi}{2}$
- $2y - x = \frac{\pi}{2} - 1$
- $y - x = \frac{\pi}{2}$
- $2y + x = \frac{\pi}{2} + 1$

Составить уравнение касательной к графику функции

$y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$

- ○ $36y - x = 36$
- ○ $9y + x = 20$
- ○ $9y + x = 10$
- ◉ $36y - x = 20$

Составить уравнение касательной к кривой,

заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$$ в точке $M\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

- ◉ $y + x = 1$
- ○ $2y - 2x = 1$
- ○ $2y + 2x = 3$
- ○ $y - x = 0$

Составить уравнение касательной к кривой заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t(t+1)} \\ y = \frac{t+1}{t} \end{cases}$$ в точке, соответствующей значению параметра $t_0 = 1$.

- $3y - 4x = 4$
- $y + 6x = 8$
- $y + 6x = 5$
- $3y - 4x = 6$