Вычисление площадей ***фигур*** с помощью интеграла

11 класс

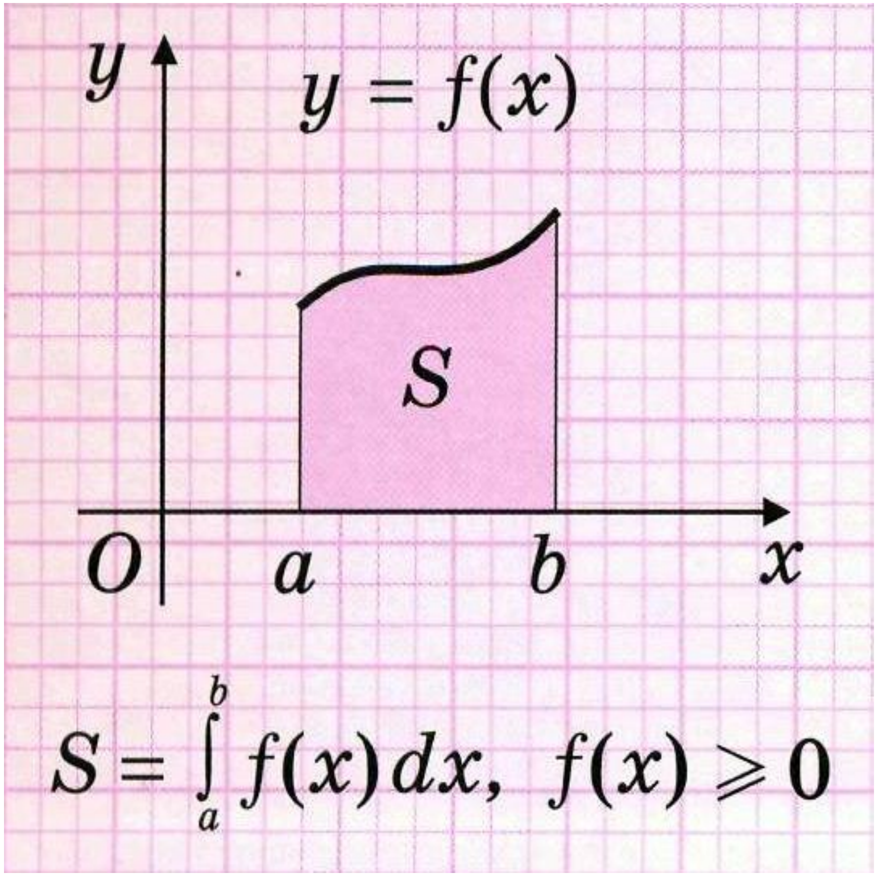
Криволинейной трапецией

называется фигура, ограниченная отрезками прямых $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиком непрерывной функции $y = f(x)$, такой, что $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$ и $f(x) > 0$ при $x \in (a;b)$.

Отрезок $[a;b]$ называется основанием трапеции.

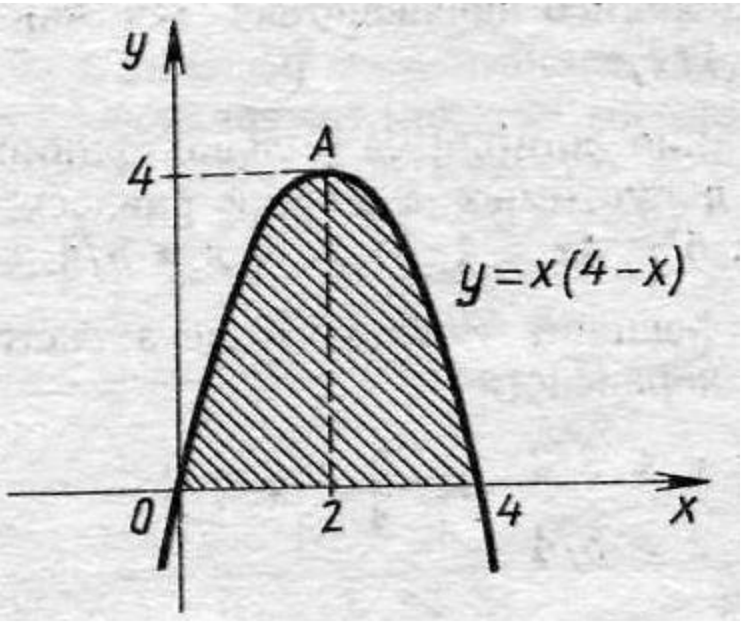
Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



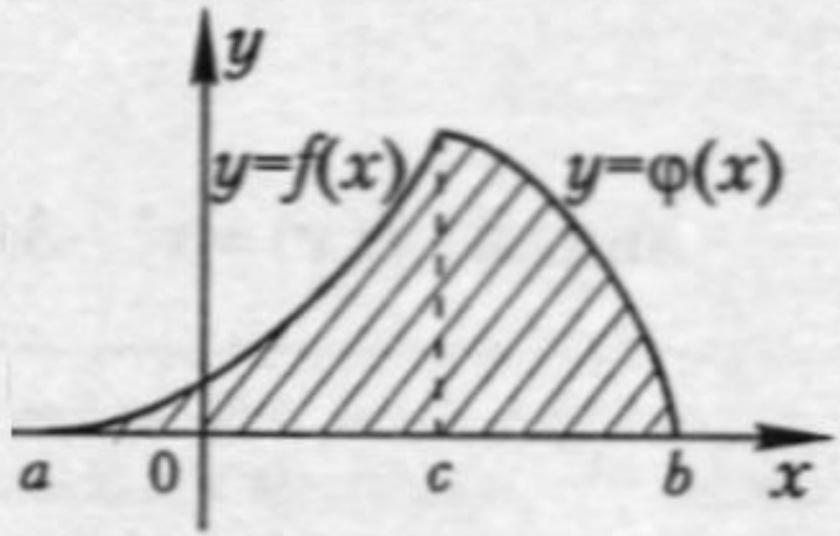
Площадь **криволинейной** трапеции

Вычислить **площадь** криволинейной трапеции



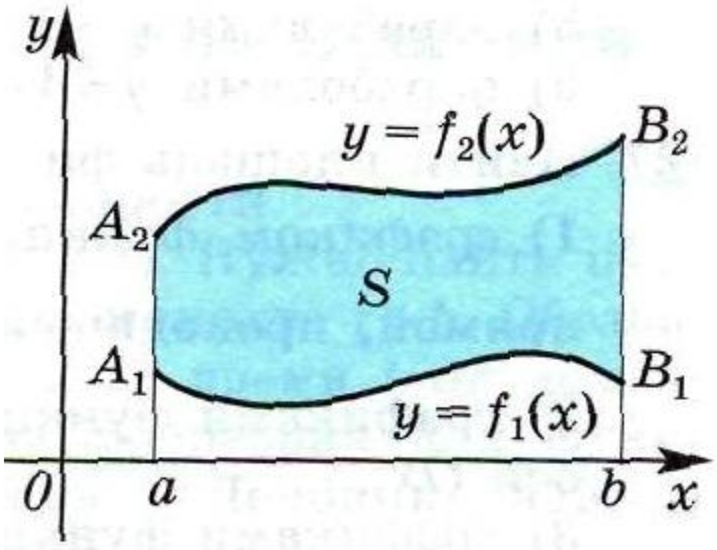
$$S = \int_0^4 (4x - x^2)dx = 10\frac{2}{3}$$

Площадь фигуры равна ***сумме*** площадей криволинейных трапеций



$$S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b \varphi(x)\,dx\,.$$

Площадь фигуры равна ***разности*** площадей криволинейных трапеций

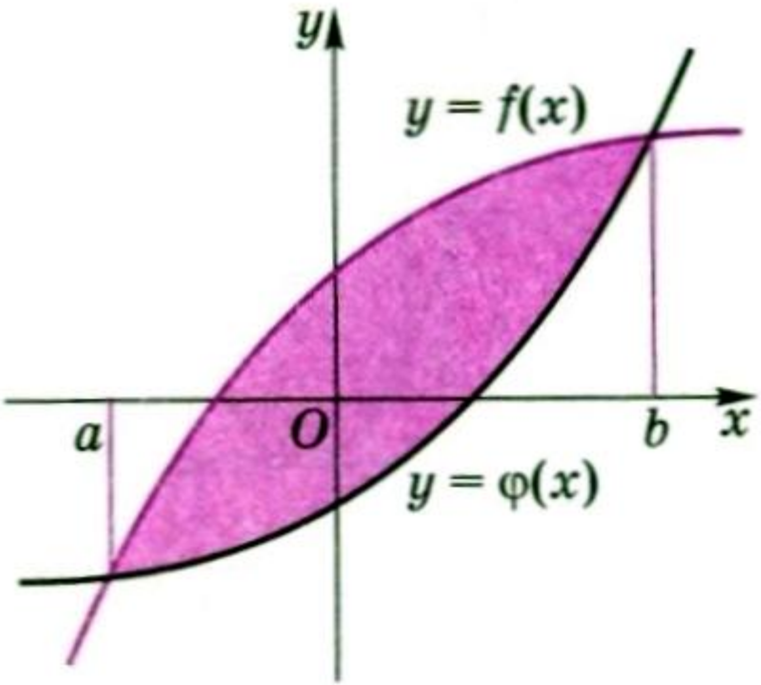


$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

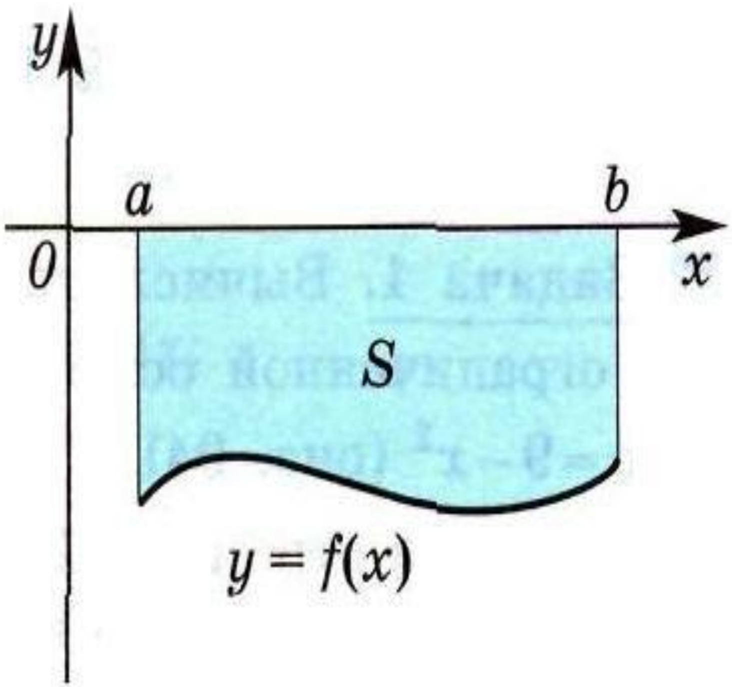
Площадь фигуры вычисляется как ***разность*** площадей криволинейных трапеций на отрезке $[a;b]$

Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a;b]$ и $f(x) > \varphi(x)$ *на* $(a;b)$, *то*

$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$$

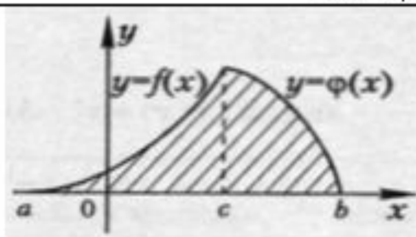


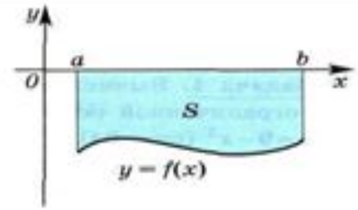
Искомая площадь фигуры равна площади фигуры, ***симметричной*** данной относительно оси Ох

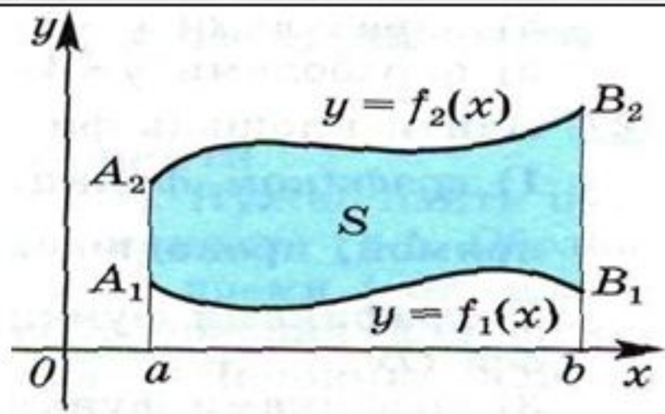
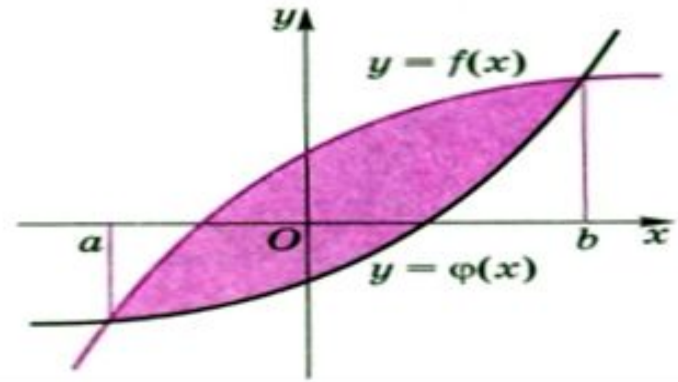


Если $f(x) \leq 0$ на отрезке [a; b], то площадь ***криволинейной трапеции*** равна

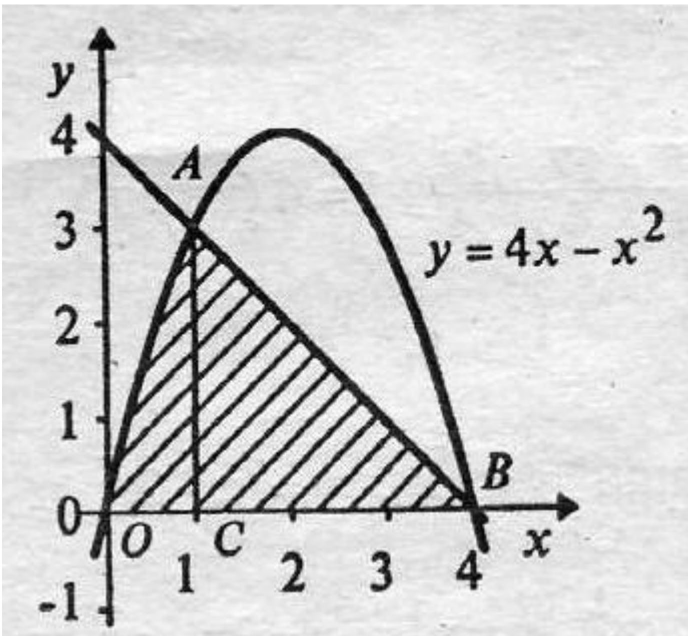
$$S = \int_a^b (-f(x))dx$$

<table>
<tr><th colspan="2">Нахождение площади фигуры, через площадь криволинейной трапеции</th></tr>
<tr><td>

$S = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx.$</td>
<td>

$S = \int_a^b (-f(x))dx$</td></tr>
<tr><td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$</td>
<td>$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$</td></tr>
</table>

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$, осью Оx и прямой, проходящей через точки (4;0) и (1;3).



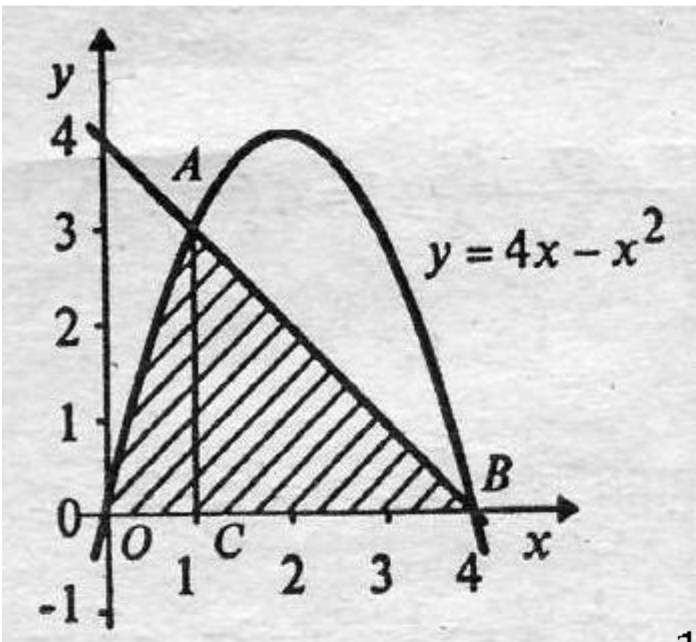
Решение.

Фигура состоит из криволинейной трапеции и прямоугольного треугольника.

$$S_{\mathrm{OAB}} = S_{\mathrm{OAC}} + S_{\Delta\mathrm{ACB}}$$

$$S_{OAB} = \int_0^1 (4x - x^2)dx + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 6\frac{1}{6}$$

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$, осью Оx и прямой, проходящей через точки (4;0) и (1;3).



Решение. Подставив в уравнение прямой y = kx + b координаты заданных точек, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 4 + b, \\ 3 = k \cdot 1 + b. \end{cases}$$

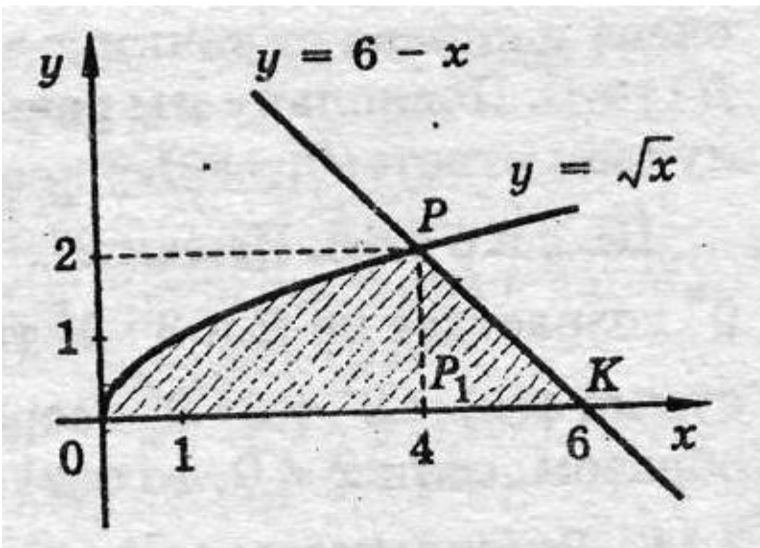
откуда найдём **k = - 1, b = 4.**

Уравнение прямой AB: y = 4 - x.

$$S_{\text{OAB}} = S_{\text{OAC}} + S_{\Delta\text{ACB}}$$

$$S_{фигуры} = \int_0^1 (4x - x^2)dx + \int_1^4 (4 - x)dx = 6\frac{1}{6}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$, $y = 0$



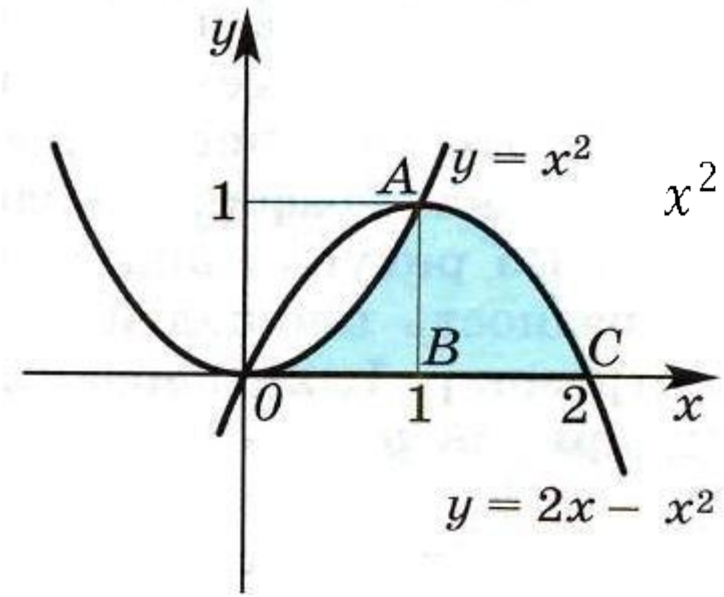
Решение. *Точки пересечения заданных линий*: O(0;0), K(6;0), P(4;2)

Фигура состоит из криволинейной трапеции и прямоугольного треугольника.

$$S_{\text{фигуры}} = S_{OPP_1} + S_{\Delta PP_1K}$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 7\frac{1}{3}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.



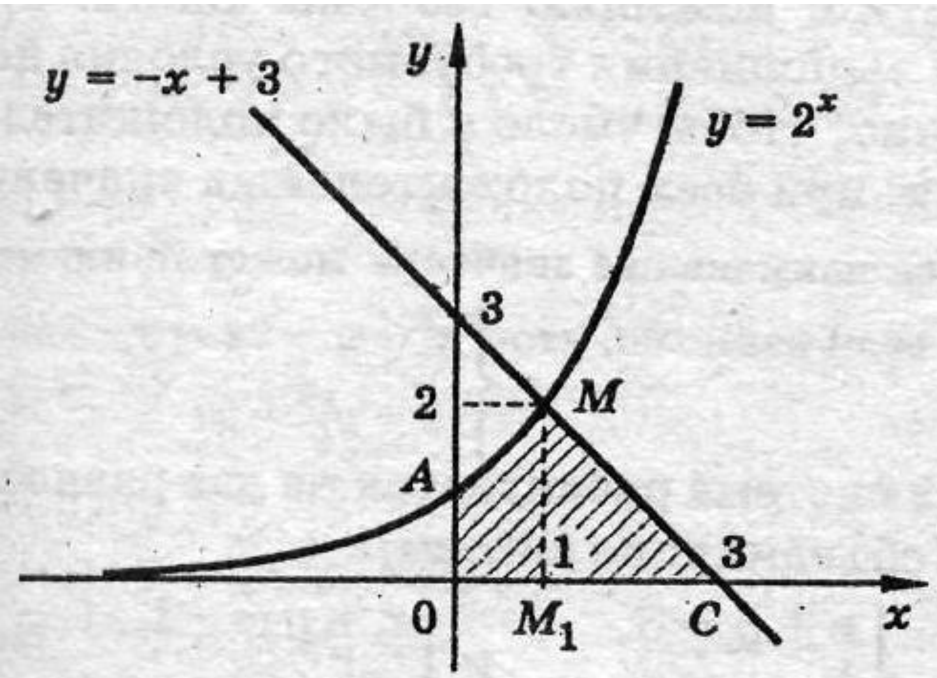
Решение. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения

$x^2 = 2x - x^2$ корни которого $x_1 = 0,\ x_2 = 1$

Искомая площадь равна сумме площадей криволинейных трапеций

$$S = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx = 1$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций , $y = 2^x$; $y = -x + 3$ осями абсцисс и ординат.

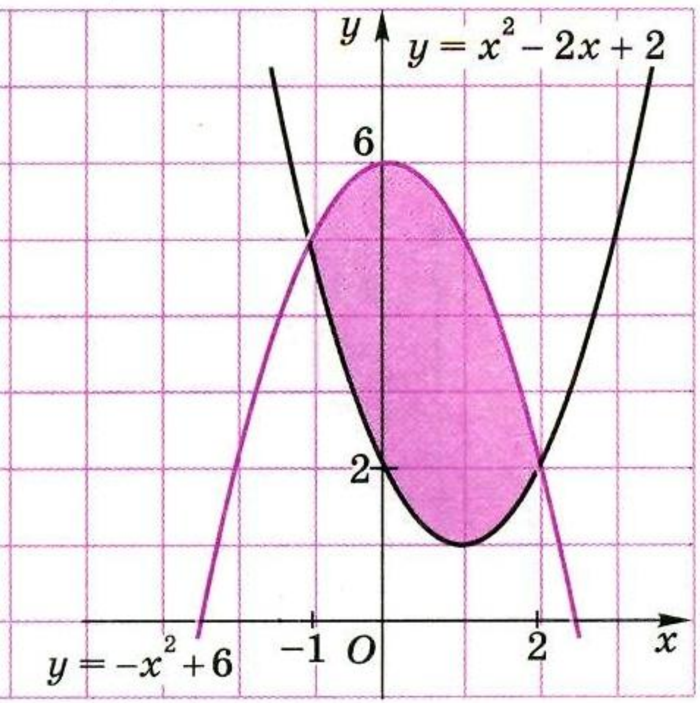


Решение. *Функция* $y = 2^x$ *возрастает, а y = - x+3 убывает на* ***R****, поэтому их графики имеют только одну* ***общую*** *точку.*
Это точка M(1;2)

$$S_{\text{фигуры}} = S_{OAMM_1} + S_{\Delta MM_1C}$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^1 2^x\,dx + \frac{1}{2}MM_1 \cdot M_1C = \log_2 e + 2$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 2x + 2$ и $y = -x^2 + 6$



Решение. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения

$$-x^2 + 6 = x^2 - 2x + 2$$

корни которого $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

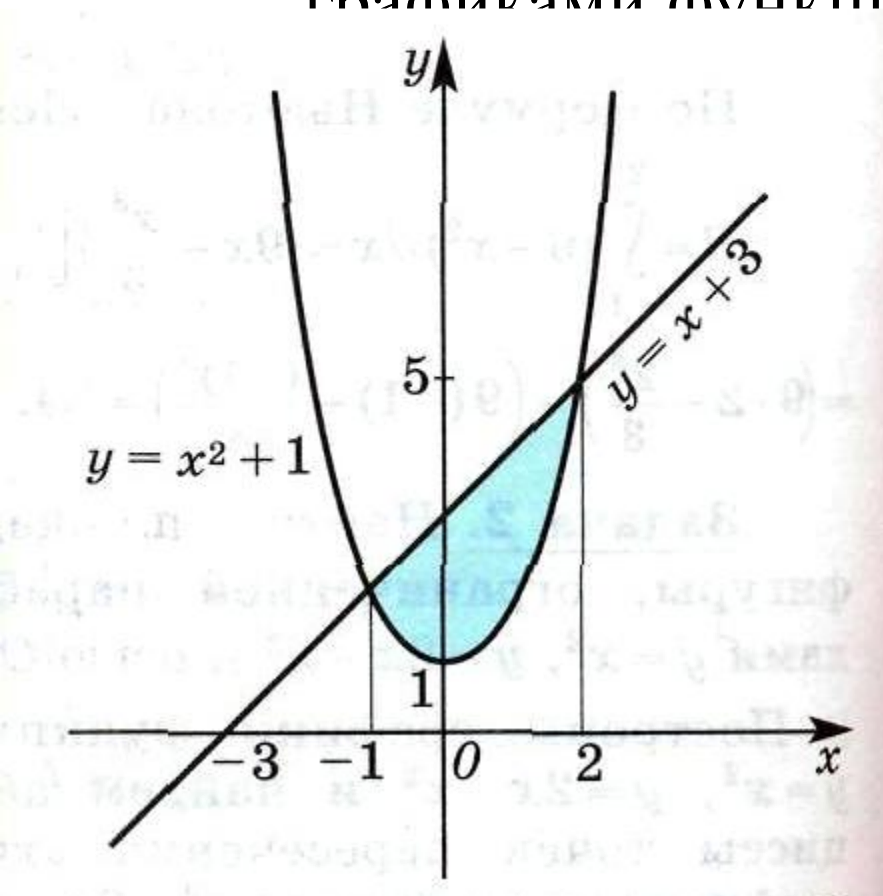
Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^{2} ((-x^2 + 6) - (x^2 - 2x + 2))dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = 15 - 6 = 9(кв.ед).$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций у = x^2 +1 и у = x + 3



Решение. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения

$$x^2 + 1 = x + 3$$

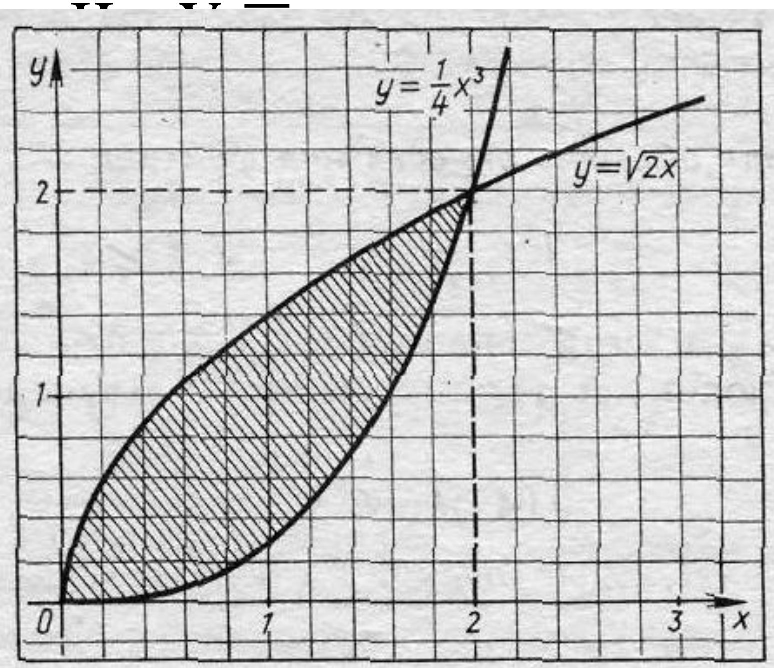
корни которого $x_1 = -1,\ x_2 = 2$

Искомая площадь равна разности площадей двух криволинейных трапеций, опирающихся на отрезок [-1;2].

$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^{2} ((x + 3) - (x^2 + 1))dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2))dx = 4{,}5(\text{кв. ед})$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций у = $\frac{1}{4}x^3$ $\sqrt{2x}$



Решение. *Найдём точки пересечения этих графиков. Их координаты удовлетворяют системе уравнений:*

$$\begin{cases} y = \sqrt{2x}, \\ \frac{1}{4}x^3 = \sqrt{2x} \end{cases}$$

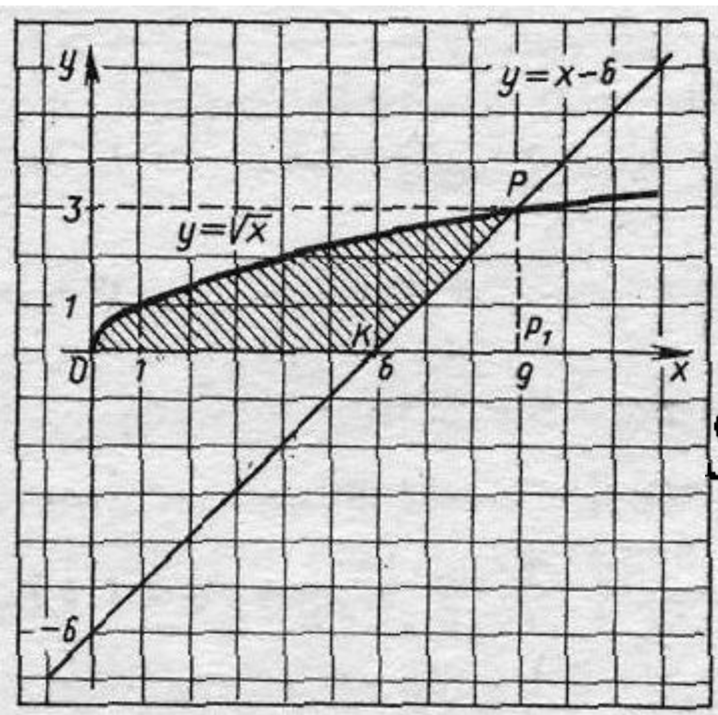
Откуда находим пределы интегрирования, а затем площадь фигуры по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^2 (\sqrt{2x} - \frac{x^3}{4})\, dx = 1\frac{2}{3}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной , линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x - 6$, $y = 0$.

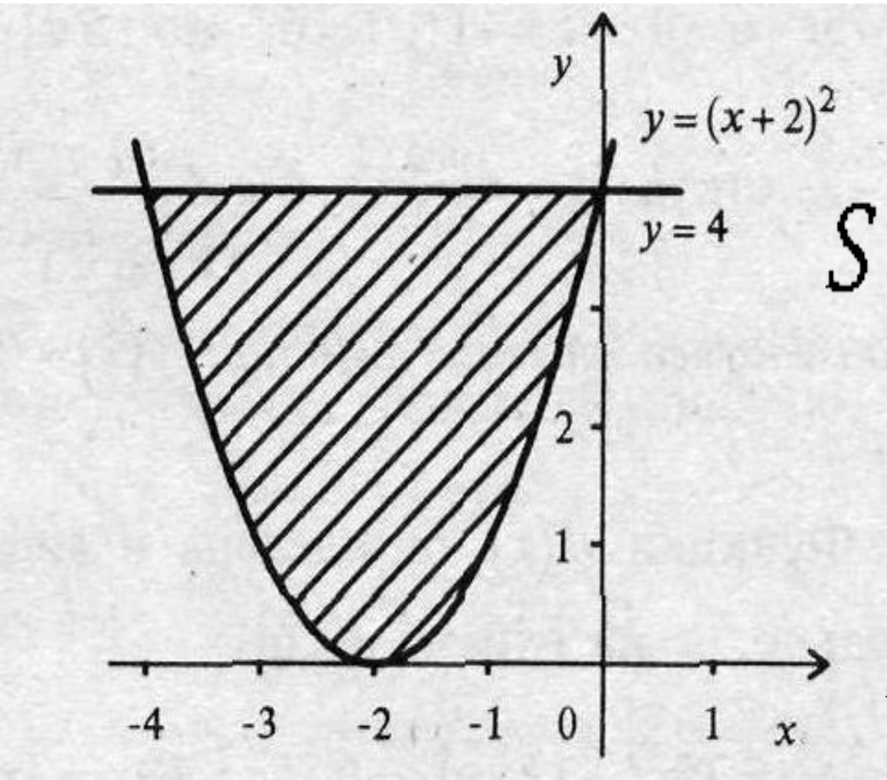
Решение.



$$S_{\text{фигуры}} = S_{OPP_1} - S_{\Delta KPP_1}$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^9 \sqrt{x}\, dx - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 13{,}5$$

Задача. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x+2)^2$ *и* $y = 4$

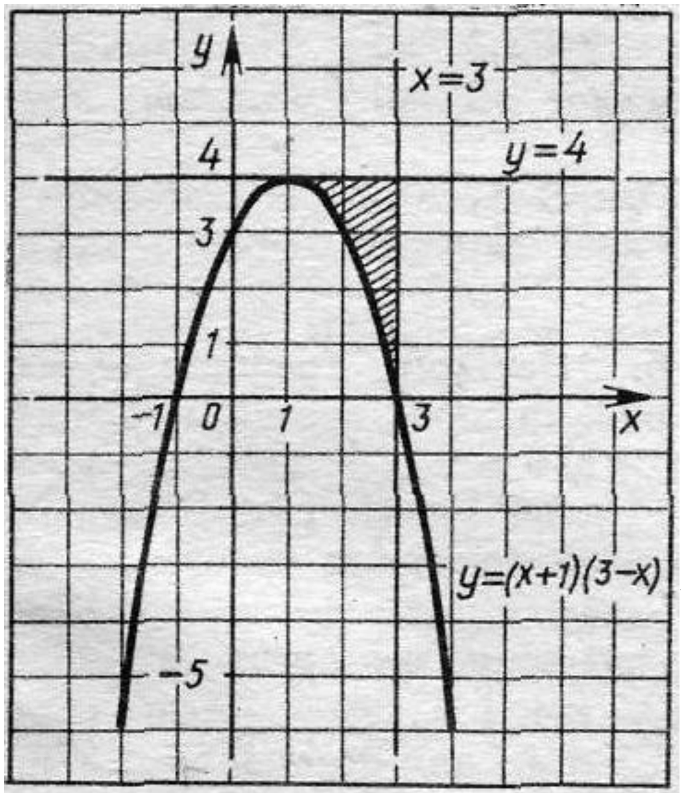


Решение.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

$$S = \int_{-4}^{0} (4 - (x+2)^2)dx = 10\frac{2}{3}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x + 3)(3 - x)$, $y = 4$ и $x = 3$



Решение.

График функции $y = (x + 3)(3 - x)$

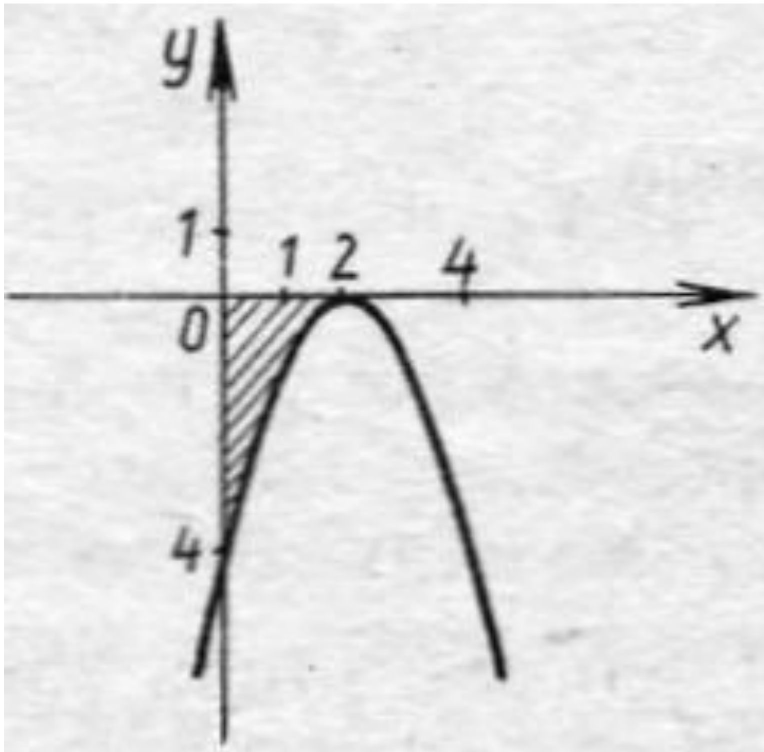
или $y = -x^2 + 2x + 3$

Координаты вершины параболы $B(1;4)$

Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^3 (4 - (-x^2 + 2x + 3))dx = 2\frac{2}{3}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = -x^2 + 4x - 4$ и осями координат



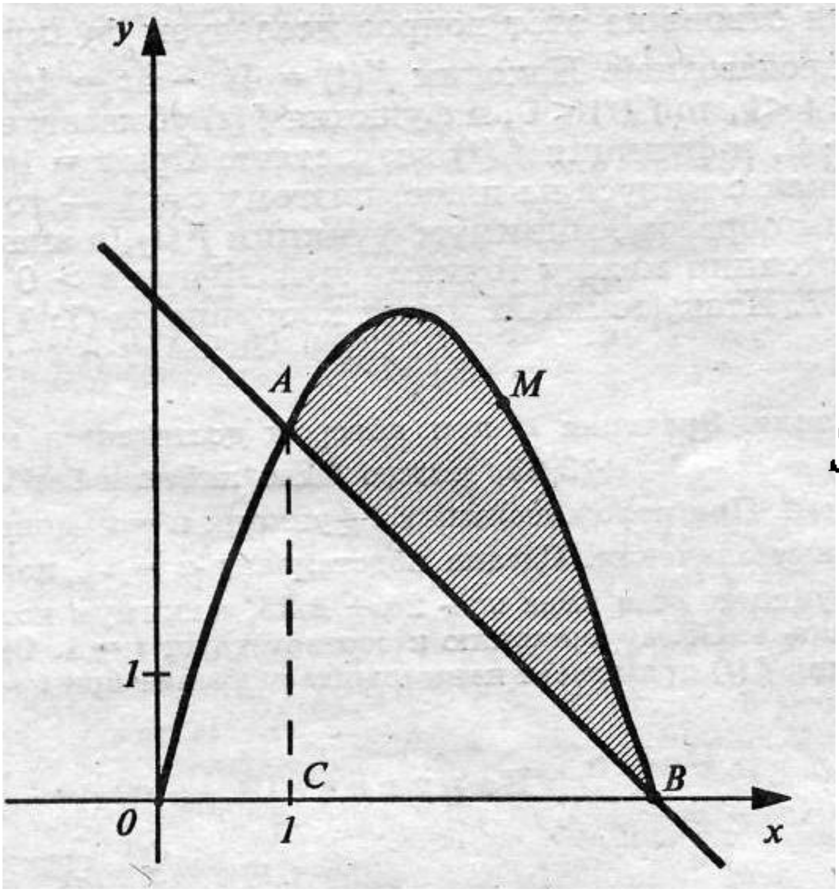
Решение.

Заданная фигура представляет собой криволинейную трапецию, лежащую «ниже» оси O*x*.

$$S = \int_a^b (-f(x))dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^2 (-(-x^2 + 4x - 4))dx = 2\frac{2}{3}$$

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и прямой, проходящей через точки (4;0) и (0;4).



Решение. Первый способ.

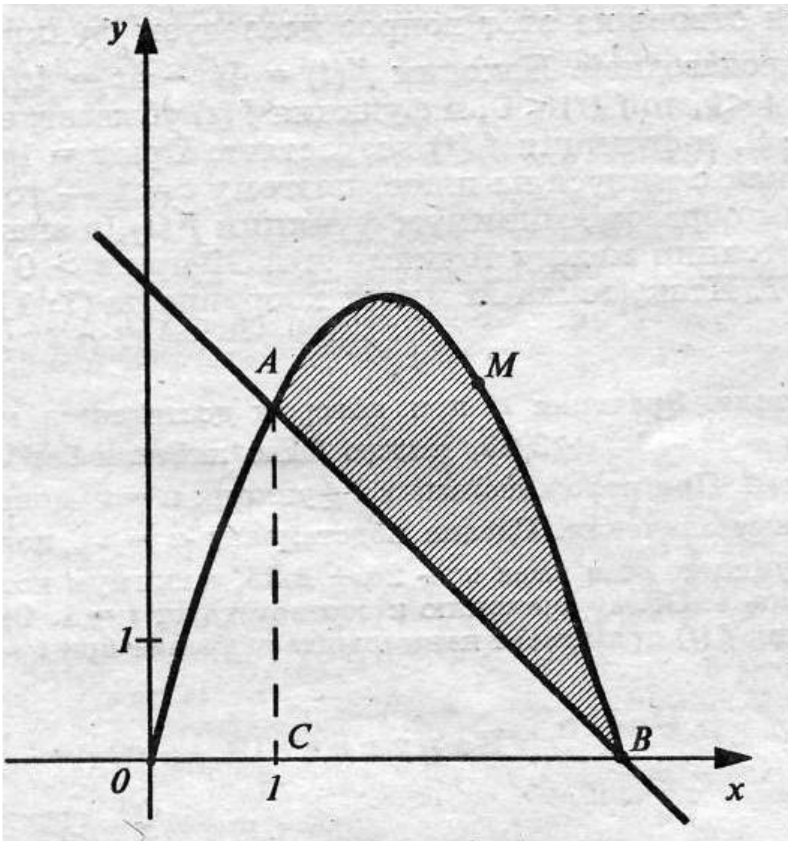
$$S_{\text{фигуры}} = S_{AMBC} - S_{\Delta ABC}$$

$$S_{AMBC} = \int_1^4 (4x - x^2)dx = 9$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 4{,}5$$

$$S_{\text{фигуры}} = 9 - 4{,}5 = 4{,}5$$

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и прямой, проходящей через точки (4;0) и (0;4).



Решение. 2 способ.

Подставив в уравнение прямой y = kx + b координаты заданных точек, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 4 + b, \\ 4 = k \cdot 0 + b \end{cases}$$

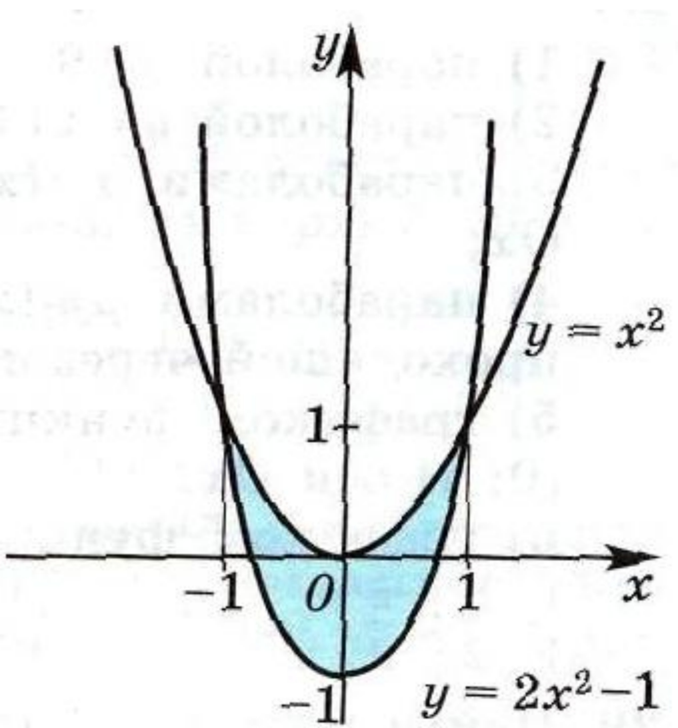
откуда найдём ***k = - 1, b = 4.***

Уравнение прямой AB: $\boldsymbol{y = -x + 4.}$

$$S_{\text{фигуры}} = S_{AMBC} - S_{\Delta ABC}$$

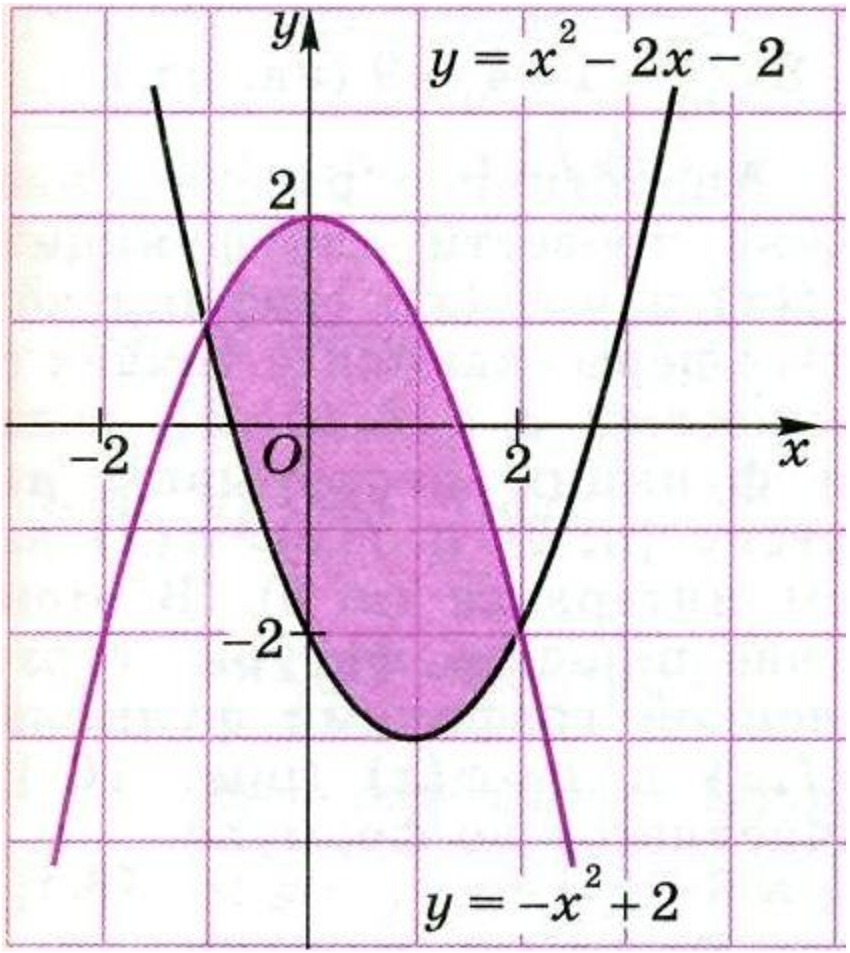
$$S_{\text{фигуры}} = \int_1^4 ((4x - x^2) - (-x + 4))dx = 9 - 4{,}5 = 4{,}5 \text{ (кв. ед).}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2x^2 - 1$



$$S = \int_{-1}^{1} (x^2 - (2x^2 - 1))dx = \frac{4}{3}$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2 + 2$ и $y = x^2 - 2x - 2$



Решение. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения

$$-x^2 + 2 = x^2 - 2x - 2$$

корни которого $x_1 = -1,\ x_2 = 2$

Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций

$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^{2} ((x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2))dx$$

$$S_{\text{фигуры}} = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx = 9 \text{ (кв.ед)}$$

По рисункам 31 – 36 назвать из каких фигур состоит фигура , площадь которой вычисляется, и указать пределы интегрирования.

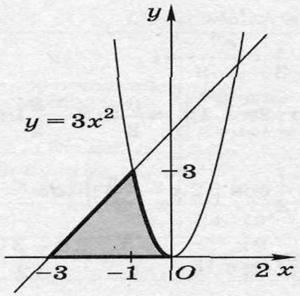


Рис. 31

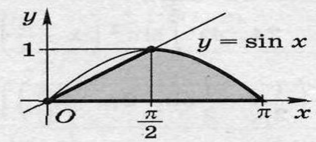


Рис. 32

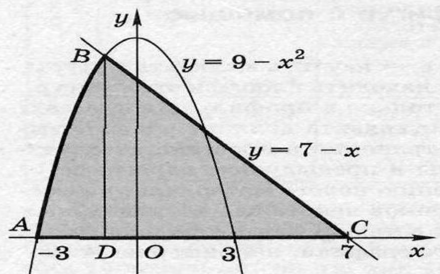


Рис. 33

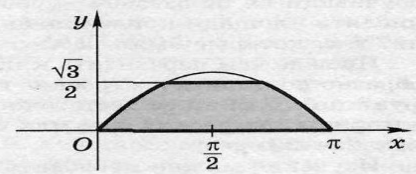


Рис. 34

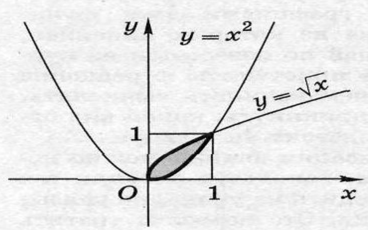


Рис. 35

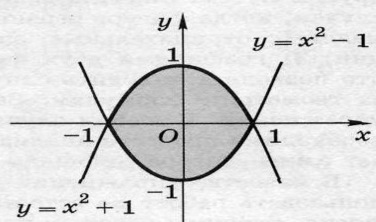


Рис. 36

Литература

- *1. Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, и др. Под редакцией Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа 11 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. Базовый и профильный уровень.*
- *2.Программы по математике для общеобразовательных учреждений 2008 год.*