Решение тригонометрических неравенств

Решение тригонометрических неравенств графическим способом

Составим алгоритм решения.

1. Если аргумент — сложный (отличен от **x**), то заменяем его на **t**.

2. Строим в одной координатной плоскости **tOy** графики функций **y=sint** и **y=a**.

3. Находим такие **две соседние точки пересечения графиков** (поближе к оси Oy), между которыми **синусоида** располагается **ниже прямой y=a**. Находим абсциссы этих точек.

4. Записываем двойное неравенство для аргумента **t**, учитывая период синуса (**t** будет между найденными абсциссами).

5. Делаем обратную замену (возвращаемся к первоначальному аргументу) и выражаем значение **x** из двойного неравенства, записываем ответ в виде числового промежутка.

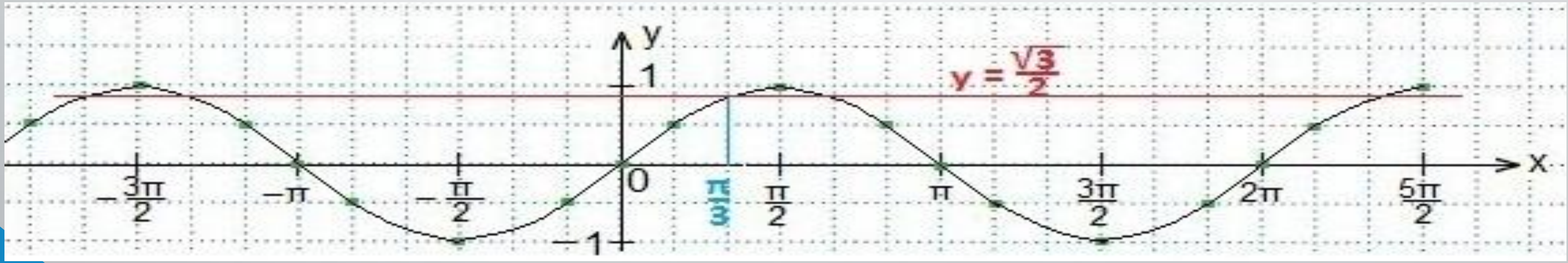
Решить неравенство

$\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

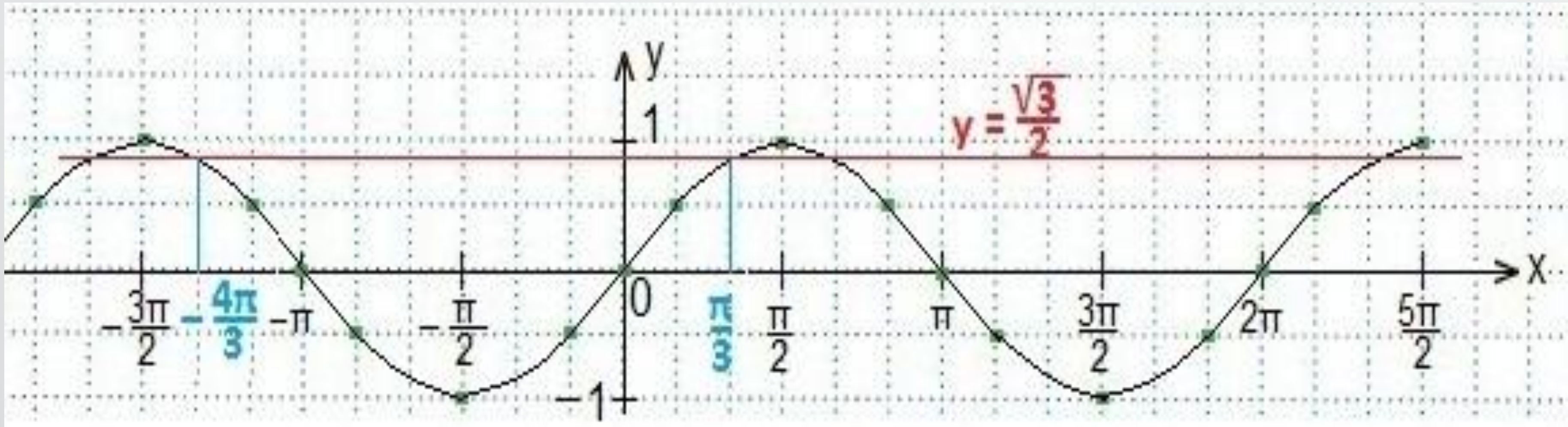
Решение. 1) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Строим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Для построения графика функции **y=sinx** выберем единичный отрезок, равный двум клеткам. Тогда по горизонтальной оси Ох значение **π** (≈3,14) составит **шесть** клеток. Рассчитываем остальные значения аргументов (в клетках

$\pi \approx 3{,}14$ $\quad \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{\pi}{3}$ $\quad \frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}$ - это $\sin\frac{\pi}{3}$



Решить неравенство $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;



Между этими (выделенными) значениями аргумента и находится та часть синусоиды, которая лежит ниже данной прямой, а значит, промежуток между этими выделенными точками удовлетворяет данному неравенству. Учтем период синуса, запишем результат в виде двойного неравенства, а ответ в виде числового промежутка.

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

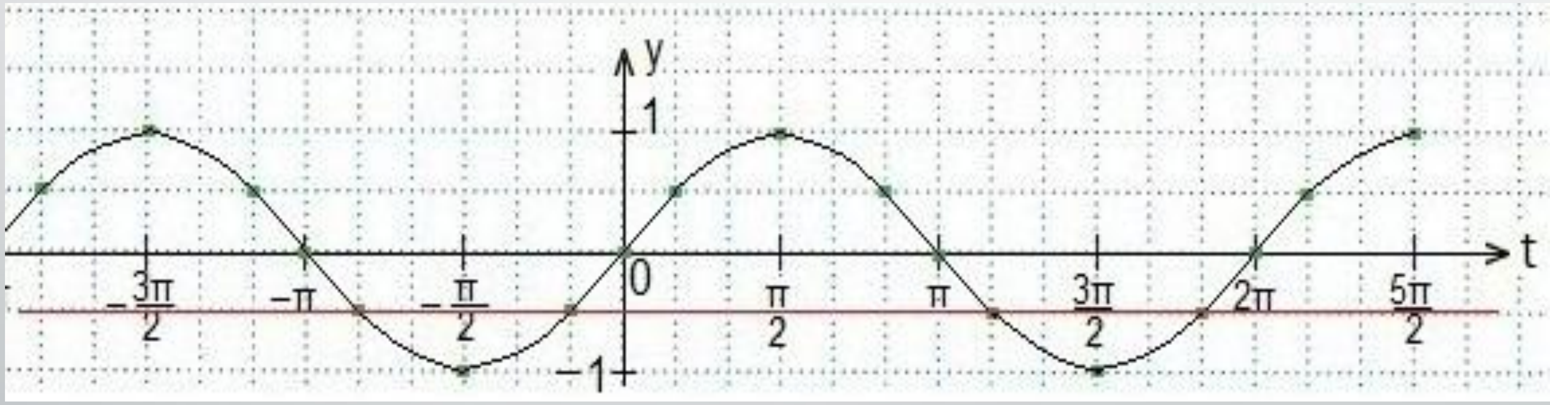
$$\text{Ответ: } \left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$$

Решить неравенство $\sin 2x \le -\frac{1}{2}$;

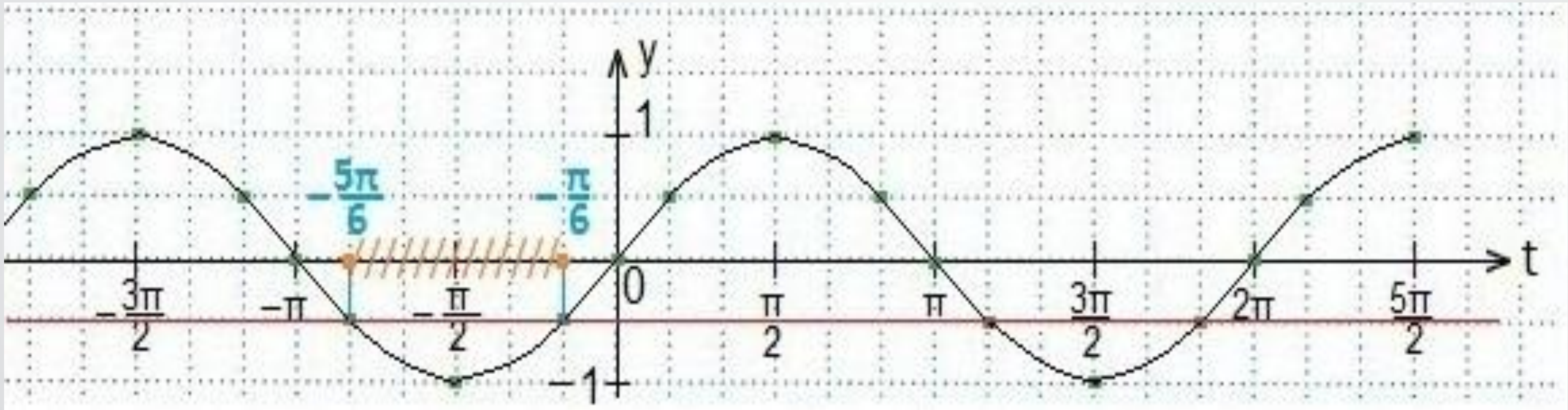
Решение. 2) $\sin 2x \le -\frac{1}{2}$.

Сделаем замену: $2x = t$. Получим неравенство: $\sin t \le -\frac{1}{2}$.

Строим графики функций $y=\sin t$ и $y = -\frac{1}{2}$.



Определяем промежуток, внутри которого точки синусоиды лежат ниже прямой.



$$-\frac{5\pi}{6}+2\pi n \le t \le -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\epsilon Z.$$

$$-\frac{5\pi}{6}+2\pi n \le 2x \le -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\epsilon Z.$$

$$-\frac{5\pi}{12}+\pi n \le x \le -\frac{\pi}{12}+\pi n,\ \ n\epsilon Z.$$

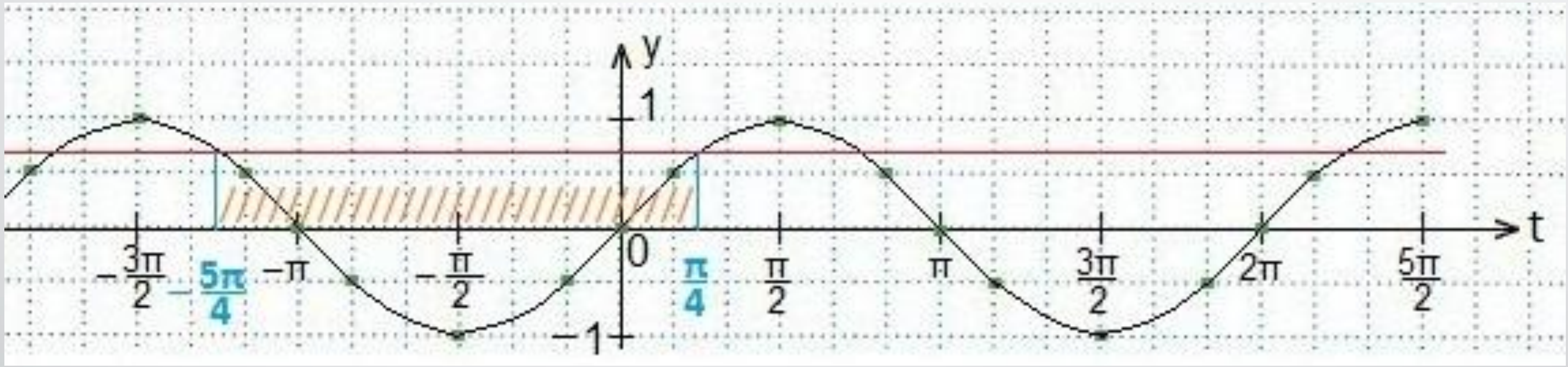
Ответ: $[-\frac{5\pi}{12}+\pi n;\ -\frac{\pi}{12}+\pi n],\ \ n\epsilon Z.$

Решить неравенство

$$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. 3) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\boxed{\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=t.}$ Получим неравенство: $\sin t<\frac{\sqrt{2}}{2}$

Строим графики функций $y=\sin t$ и $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\frac{\pi}{4}$



$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in Z;$$

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$-\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2\pi n < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$-\frac{5\pi}{4}^{\backslash 3} - \frac{\pi}{3}^{\backslash 4} + 2\pi n < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}^{\backslash 3} - \frac{\pi}{3}^{\backslash 4} + 2\pi n;$$

$$-\frac{19\pi}{12} + 2\pi n < \frac{x}{2} < -\frac{\pi}{12} + 2\pi n;$$

$$-\frac{19\pi}{6} + 4\pi n < x < -\frac{\pi}{6} + 4\pi n.$$

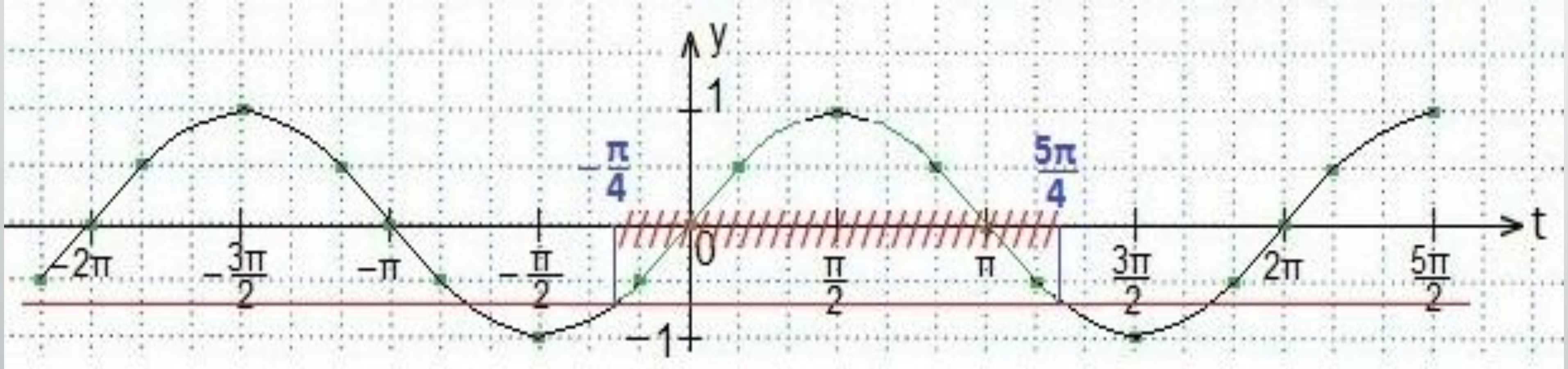
Ответ: $\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi n;\ -\frac{\pi}{6} + 4\pi n\right),\ n \in Z.$

Ответ: $\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi n;\ -\frac{\pi}{6} + 4\pi n\right),\ n \in Z.$

Решить неравенство $\sin\frac{x}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

Решение. 1) $\sin\frac{x}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть $\frac{x}{2} = t$. Тогда $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Построим графики $y=\sin t$ и $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$-\frac{\pi}{4}+2\pi n<t<\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ \ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{4}+2\pi n<\frac{x}{2}<\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ \ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{2}+4\pi n<\ x\ <\frac{5\pi}{2}+4\pi n,\ \ n\epsilon Z;$$

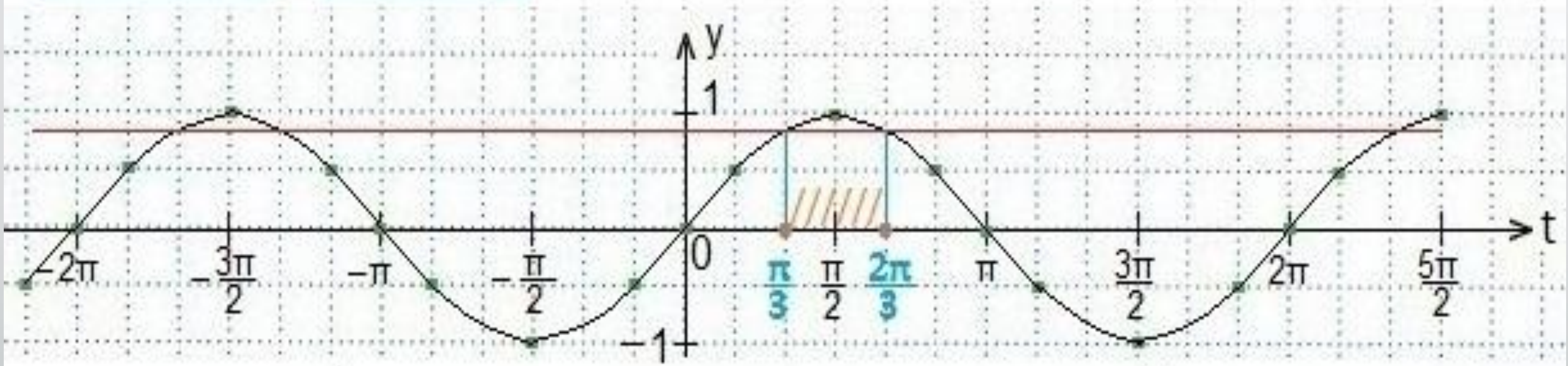
Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2}+4\pi n;\ \frac{5\pi}{2}+4\pi n\right),\ \ n\epsilon Z.$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2}+4\pi n;\ \frac{5\pi}{2}+4\pi n\right),\ \ n\epsilon Z,$

Решить неравенство $2\sin x\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение. 2) $2\sin x\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin 2x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Пусть $2x=t$, тогда $\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ и $\boxed{\frac{\pi}{3}}$ Строим $y=\sin t$ и $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



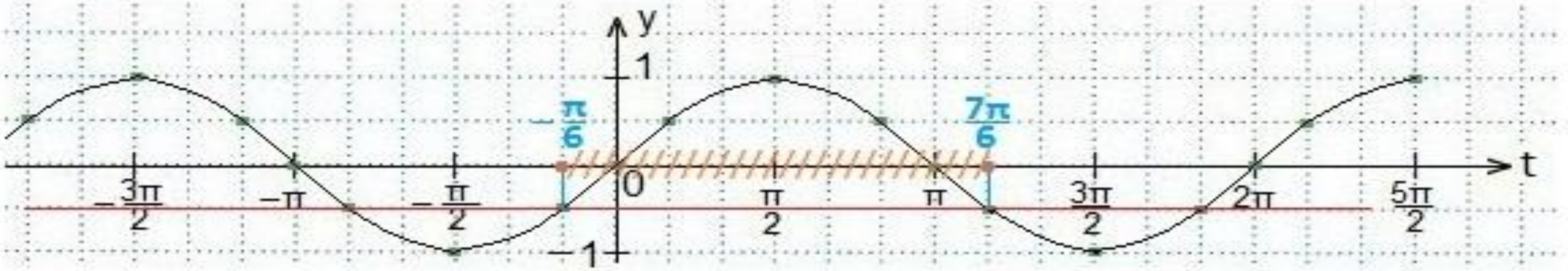
$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$ $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\frac{\pi}{6} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;$ Ответ: $[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n],\ n \in Z.$

Решить неравенство $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) \geq -\frac{1}{2}.$

Решение. 3) $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) \geq -\frac{1}{2}$. Пусть $3x - \frac{\pi}{4} = t$, тогда $\sin t \geq -\frac{1}{2}$.

Строим $y=\sin t$ и $y = -\frac{1}{2}$.



$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$ $\quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\overset{3}{\frac{\pi}{4}} - \overset{2}{\frac{\pi}{6}} + 2\pi n \leq 3x \leq \overset{3}{\frac{\pi}{4}} + \overset{2}{\frac{7\pi}{6}} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\frac{\pi}{12} + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{17\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in Z;$

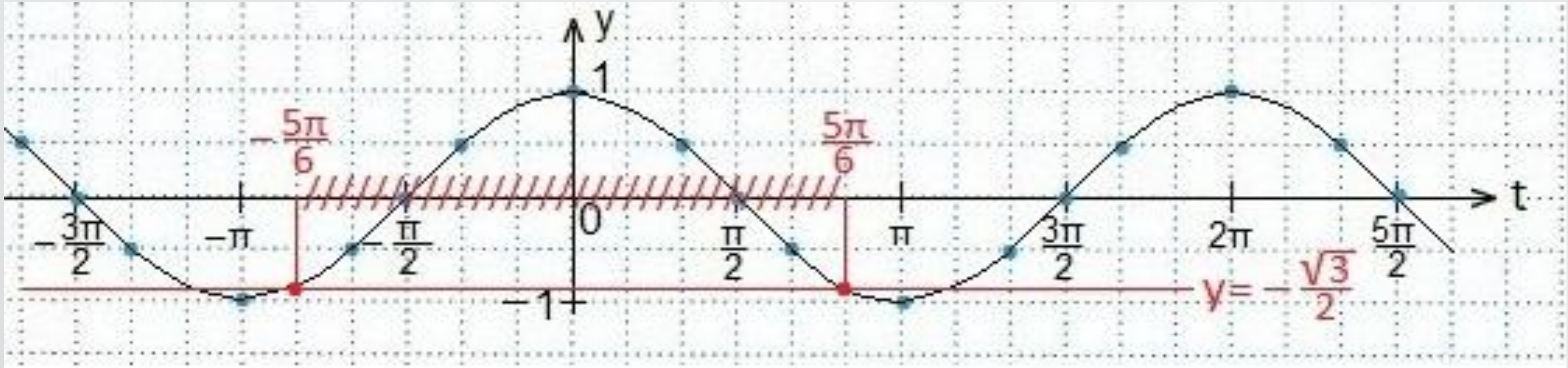
$\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n \leq x \leq \frac{17\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z;$ Ответ: $[\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{17\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n],\ n \in Z.$

Решить неравенство $\cos 3x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

Решение. 1) $\cos 3x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Пусть $3x=t$. Имеем: $\cos t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Строим графики функций: $y=\cos t$ и $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

учитывая, что: $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6}$.



$-\frac{5\pi}{6}+2\pi n<t<\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z;\qquad -\frac{5\pi}{6}+2\pi n<3x<\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z;$

$$-\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n<x<\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n,\ n\in Z;$$

Ответ: $\left(-\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n;\ \frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n\right),\ n\in Z.$

Решить неравенство $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение. 2) $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Замена: $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=t$. Тогда $\cos t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Строим: $y=\cos t$ и $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Имеем ввиду, что: $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$

$$-\frac{\pi}{4}+2\pi n\le t\le\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{4}+2\pi n\le\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi n\le\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le\frac{x}{2}\le 2\pi n,\ n\epsilon Z;$$

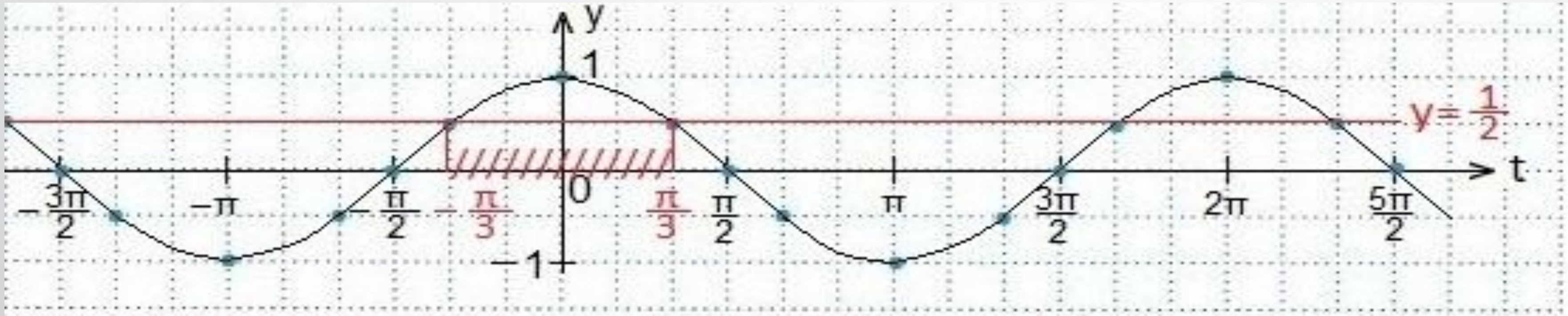
$$-\pi+4\pi n\le x\le 4\pi n,\ n\epsilon Z;$$

Ответ: $[-\pi+4\pi n;\ 4\pi n],\ n\epsilon Z.$

Решить неравенство $2\sin^2 x < \frac{1}{2}.$

Решение. 3) $2\sin^2 x < \frac{1}{2}$. Преобразуем: $1 - \cos 2x < \frac{1}{2} \to \cos 2x > \frac{1}{2}$.

Делаем замену: $2x = t$. Получаем: $\cos t > \frac{1}{2}$. Строим: $y = \cos t$ и $y = \frac{1}{2}$.



$$-\frac{\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\epsilon Z;\qquad -\frac{\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\epsilon Z;\qquad \text{Ответ: }\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right),\quad n\epsilon Z.$$

Решить неравенство

$$\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

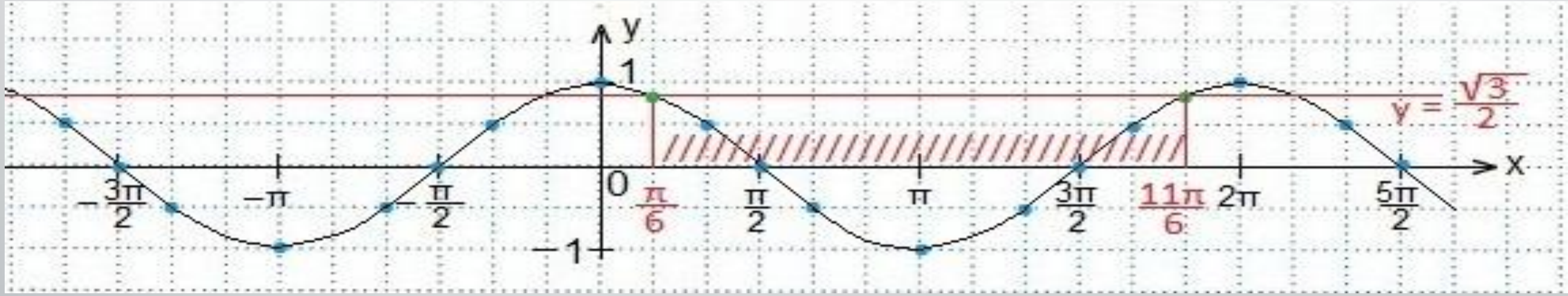
<u>Решение.</u> 1) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Преобразуем левую часть неравенства по формуле косинуса двойного аргумента

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Получим: $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Построим графики функций $y=\cos x$ и $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Определяем промежуток значений **х**, при которых точки синусоиды лежат ниже точек прямой.



$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

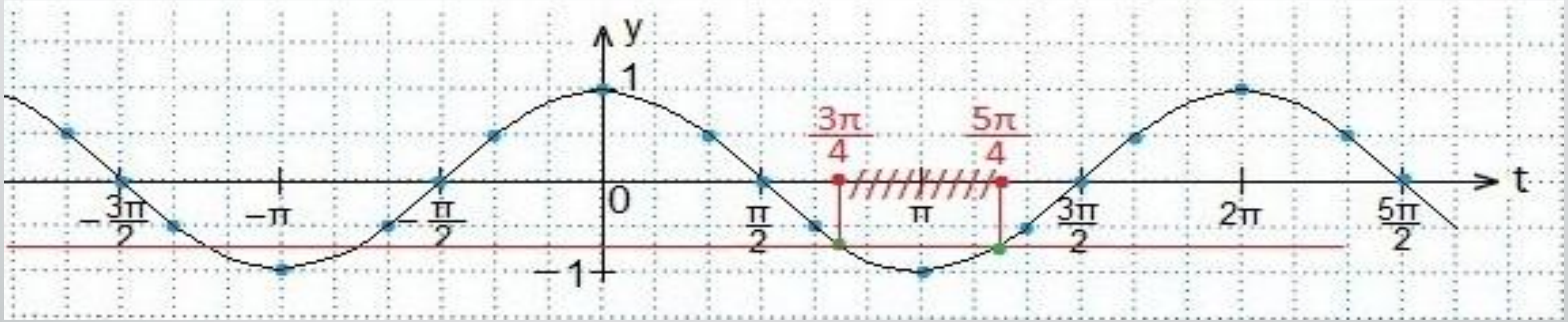
Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$

Решить неравенство $\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение. 2) $\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Сделаем замену: $\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3} = t$.

Тогда неравенство примет вид: $\cos t \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Построим графики функций $y=\cos t$ и $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le t \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le \frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le \frac{x}{4} \le \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$\frac{\pi}{3}^{\backslash 4} + \frac{3\pi}{4}^{\backslash 3} + 2\pi n \le \frac{x}{4} \le \frac{\pi}{3}^{\backslash 4} + \frac{5\pi}{4}^{\backslash 3} + 2\pi n,$$

$$\frac{13\pi}{12} + 2\pi n \le \frac{x}{4} \le \frac{19\pi}{12} + 2\pi n,$$

$$\frac{13\pi}{3} + 8\pi n \le x \le \frac{19\pi}{3} + 8\pi n, \quad n \in Z;$$

Ответ: $\left[\frac{13\pi}{3} + 8\pi n;\ \frac{19\pi}{3} + 8\pi n\right], \ n \in Z.$

Решить неравенство $2\cos^2 x \le \frac{3}{2}$.

Решение. 3) $2\cos^2 x \le \frac{3}{2}$. Преобразуем: $1+\cos 2x \le \frac{3}{2}$;

$\cos 2x \le \frac{3}{2}-1$; $\cos 2x \le \frac{1}{2}$. Сделаем замену: $2x=t$.

Тогда получим неравенство: $\cos t \le \frac{1}{2}$.

Строим: $y=\cos t$ и $y=\frac{1}{2}$.

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le t \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z;$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 2x \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z;$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi n \le x \le \frac{5\pi}{6} + \pi n, \ \ n\epsilon Z;$$

Ответ: $[\frac{\pi}{6} + \pi n; \ \frac{5\pi}{6} + \pi n], \ \ n\epsilon Z.$

ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ ВИДА: **$\sin t<a$** $(-1\le a\le 1)$ справедлива формула:

$$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < t < \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Если **sint>a**, где $-1 \le \mathbf{a} \le 1$, то

$$\mathbf{arcsin\ a + 2\pi n < t < \pi — arcsin\ a + 2\pi n,}\ n \in Z.$$

Если **cost<a**, (-1≤**a**≤1), то

$$\mathbf{arccos\ a + 2\pi n < t < 2\pi — arccos\ a + 2\pi n,\ n \in Z.}$$

Если **$\cos t > a$**, $(-1 \leq$ **a** $\leq 1)$, то

$-\arccos a + 2\pi n < t < \arccos a + 2\pi n, n \in Z.$

.

Спасибо за внимание!