

Решение тригонометрических неравенств

Решение тригонометрических неравенств графическим способом

Составим алгоритм решения.

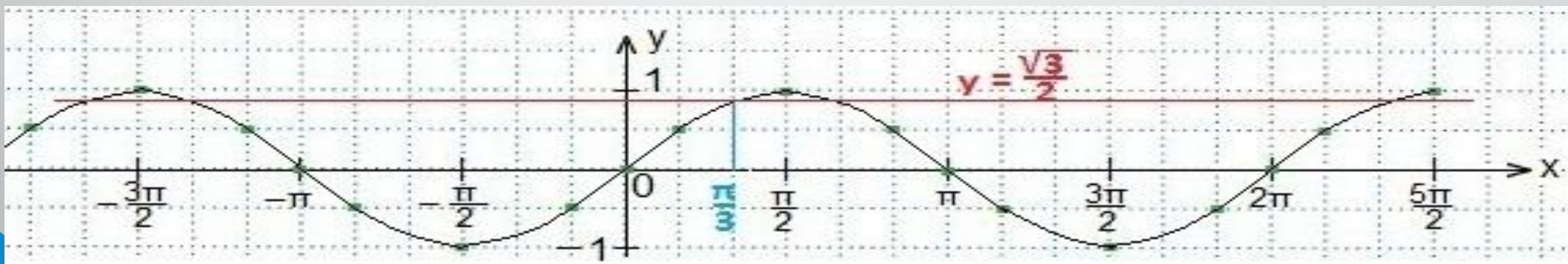
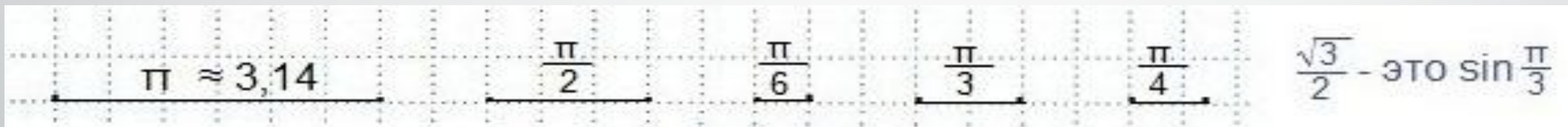
1. Если аргумент — сложный (отличен от x), то заменяем его на t .
2. Строим в одной координатной плоскости tOy графики функций $y=\sin t$ и $y=a$.
3. Находим такие **две соседние точки пересечения графиков** (поближе к оси Oy), между которыми **синусоида** располагается **ниже прямой $y=a$** . Находим абсциссы этих точек.
4. Записываем двойное неравенство для аргумента t , учитывая период синуса (t будет между найденными абсциссами).
5. Делаем обратную замену (возвращаемся к первоначальному аргументу) и выражаем значение x из двойного неравенства, записываем ответ в виде числового промежутка.

Решить неравенство

$$\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2};$$

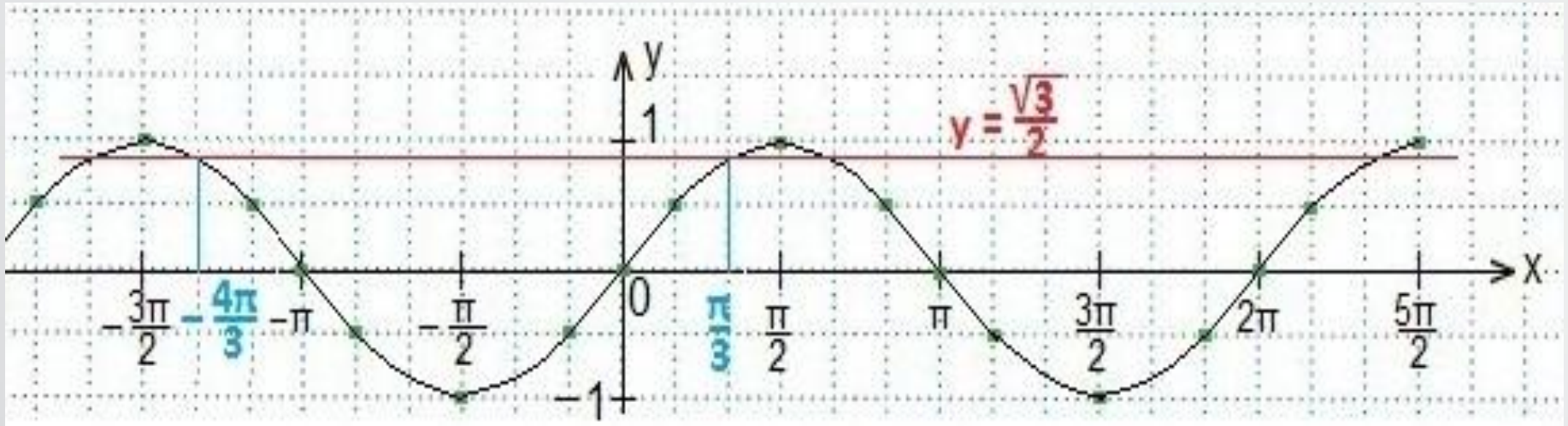
Решение. 1) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Строим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Для построения графика функции $y = \sin x$ выберем единичный отрезок, равный двум клеткам. Тогда по горизонтальной оси Ox значение π ($\approx 3,14$) составит **шесть** клеток. Рассчитываем остальные значения аргументов (в клетках



Решить неравенство

$$\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2};$$



Между этими (выделенными) значениями аргумента и находится та часть синусоиды, которая лежит ниже данной прямой, а значит, промежуток между этими выделенными точками удовлетворяет данному неравенству. Учтем период синуса, запишем результат в виде двойного неравенства, а ответ в виде числового промежутка.

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

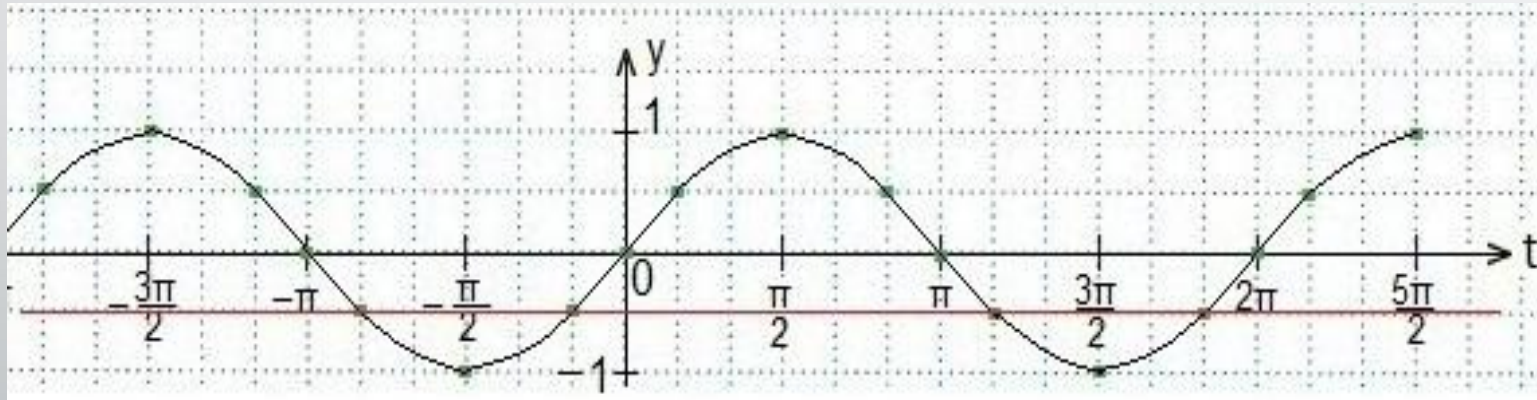
Решить неравенство

$$\sin 2x \leq -\frac{1}{2};$$

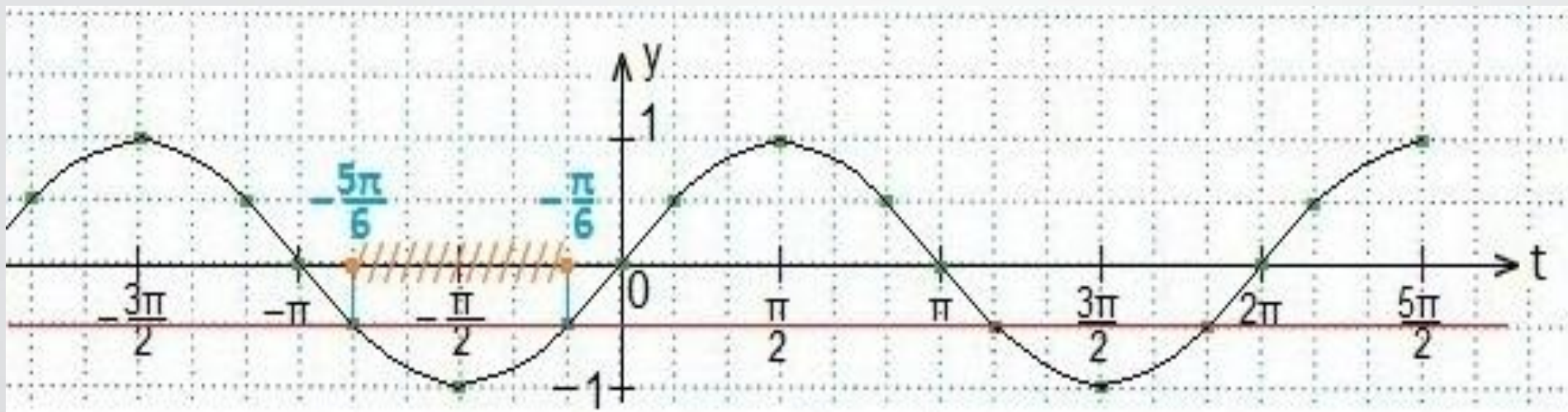
Решение. 2) $\sin 2x \leq -\frac{1}{2}$.

Сделаем замену: $2x = t$. Получим неравенство: $\sin t \leq -\frac{1}{2}$.

Строим графики функций $y = \sin t$ и $y = -\frac{1}{2}$.



Определяем промежуток, внутри которого точки синусоиды лежат ниже прямой.



$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 2x \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$


$$-\frac{5\pi}{12} + \pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

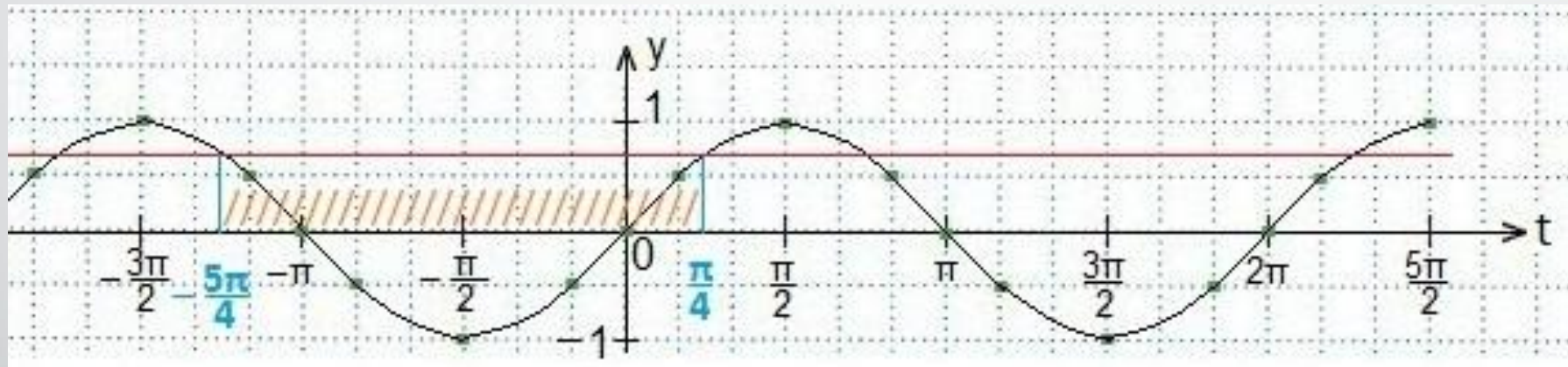
$$\text{Ответ: } \left[-\frac{5\pi}{12} + \pi n; -\frac{\pi}{12} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$$

Решить неравенство

$$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решение. 3) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = t$. Получим неравенство: $\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Строим графики функций $y = \sin t$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 



$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$-\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2\pi n < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$-\overset{\swarrow 3}{\frac{5\pi}{4}} - \overset{\swarrow 4}{\frac{\pi}{3}} + 2\pi n < \frac{x}{2} < \overset{\swarrow 3}{\frac{\pi}{4}} - \overset{\swarrow 4}{\frac{\pi}{3}} + 2\pi n;$$

$$-\frac{19\pi}{12} + 2\pi n < \frac{x}{2} < -\frac{\pi}{12} + 2\pi n;$$

$$-\frac{19\pi}{6} + 4\pi n < x < -\frac{\pi}{6} + 4\pi n.$$

Ответ: $(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi n; -\frac{\pi}{6} + 4\pi n), n \in \mathbb{Z}.$

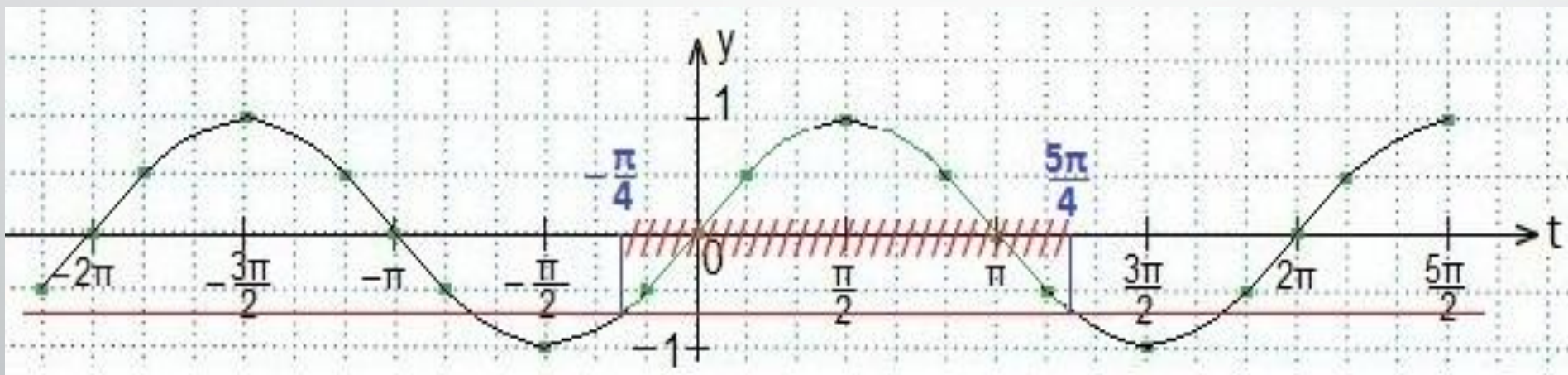
Ответ: $(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi n; -\frac{\pi}{6} + 4\pi n), n \in \mathbb{Z}.$

Решить неравенство

$$\sin \frac{x}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

Решение. 1) $\sin \frac{x}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть $\frac{x}{2} = t$. Тогда $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Построим графики $y = \sin t$ и $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{\pi}{2} + 4\pi n < x < \frac{5\pi}{2} + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi n; \frac{5\pi}{2} + 4\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi n; \frac{5\pi}{2} + 4\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решить неравенство

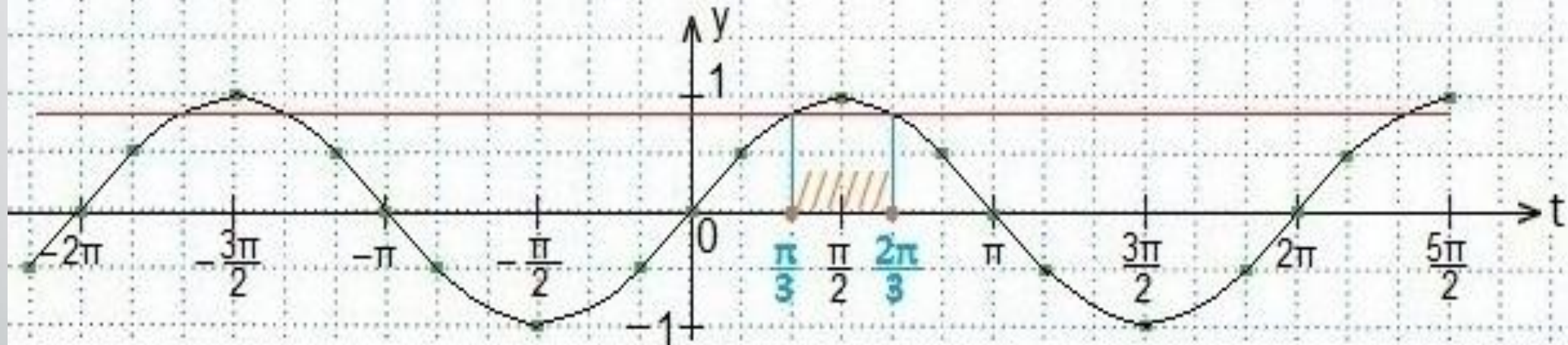
$$2\sin x \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Решение. 2) $2\sin x \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin 2x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Пусть $2x=t$, тогда $\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{и } \frac{\pi}{3}$$

Строим $y=\sin t$ и $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

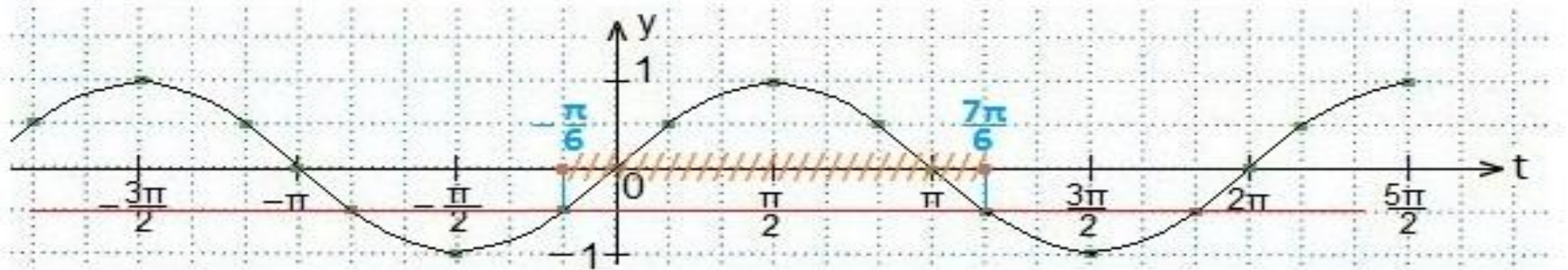
Ответ: $[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$.

Решить неравенство

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{1}{2}.$$

Решение. 3) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{1}{2}$. Пусть $3x - \frac{\pi}{4} = t$, тогда $\sin t \geq -\frac{1}{2}$.

Строим $y = \sin t$ и $y = -\frac{1}{2}$.



$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{12} + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{17\pi}{12} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n \leq x \leq \frac{17\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \text{Ответ: } \left[\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{17\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

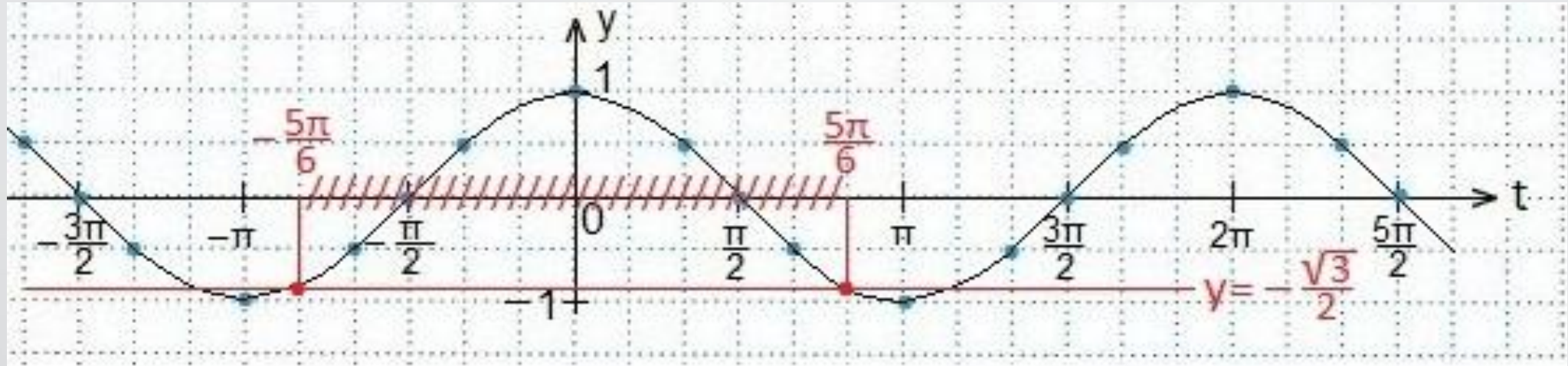
Решить неравенство

$$\cos 3x > -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

Решение. 1) $\cos 3x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Пусть $3x=t$. Имеем: $\cos t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Строим графики функций: $y=\cos t$ и $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

учитывая, что: $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{5\pi}{6}$.



$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < 3x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

Ответ: $(-\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Решить неравенство

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решение. 2) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Замена: $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = t$. Тогда $\cos t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Строим: $y = \cos t$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Имеем ввиду, что: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$



$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq t \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \frac{x}{2} \leq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-\pi + 4\pi n \leq x \leq 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

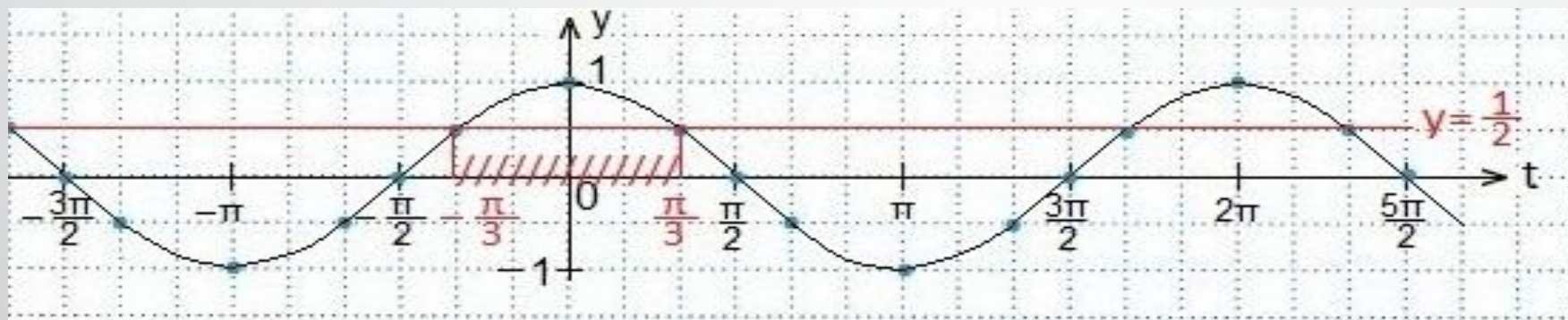
Ответ: $[-\pi + 4\pi n; 4\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}.$

Решить неравенство

$$2\sin^2 x < \frac{1}{2}.$$

Решение. 3) $2\sin^2 x < \frac{1}{2}$. Преобразуем: $1 - \cos 2x < \frac{1}{2} \rightarrow \cos 2x > \frac{1}{2}$.

Делаем замену: $2x = t$. Получаем: $\cos t > \frac{1}{2}$. Строим: $y = \cos t$ и $y = \frac{1}{2}$.



$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \text{Ответ: } \left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решить неравенство

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Решение. 1) $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Преобразуем левую часть неравенства по формуле косинуса двойного аргумента

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \text{ Получим: } \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Определяем промежуток значений x , при которых точки синусоиды лежат ниже точек прямой.



$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}.$

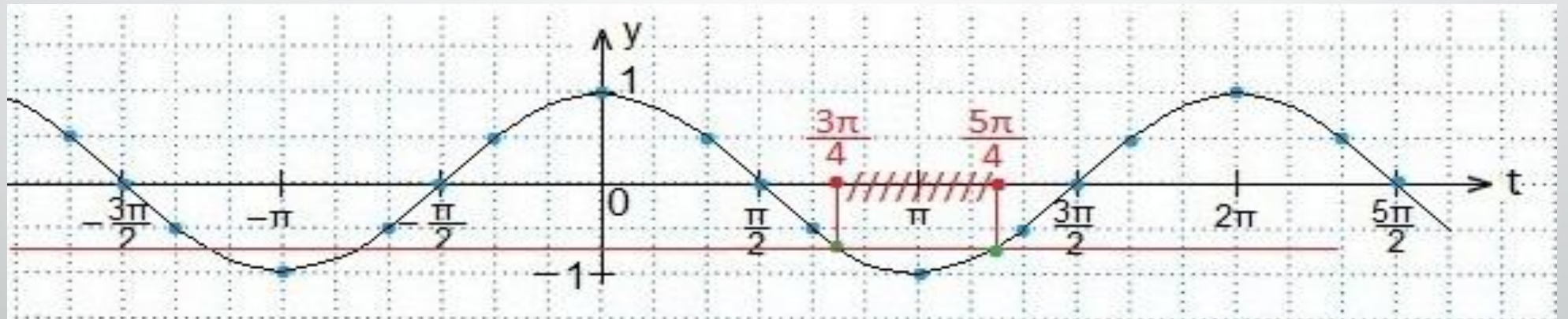
Решить неравенство

$$\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решение. 2) $\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Сделаем замену: $\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} = t$.

Тогда неравенство примет вид: $\cos t \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Построим графики функций $y = \cos t$ и $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq t \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq \frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$\overset{4}{\frac{\pi}{3}} + \overset{3}{\frac{3\pi}{4}} + 2\pi n \leq \frac{x}{4} \leq \overset{4}{\frac{\pi}{3}} + \overset{3}{\frac{5\pi}{4}} + 2\pi n,$$

$$\frac{13\pi}{12} + 2\pi n \leq \frac{x}{4} \leq \frac{19\pi}{12} + 2\pi n,$$

$$\frac{13\pi}{3} + 8\pi n \leq x \leq \frac{19\pi}{3} + 8\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{13\pi}{3} + 8\pi n; \frac{19\pi}{3} + 8\pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решить неравенство

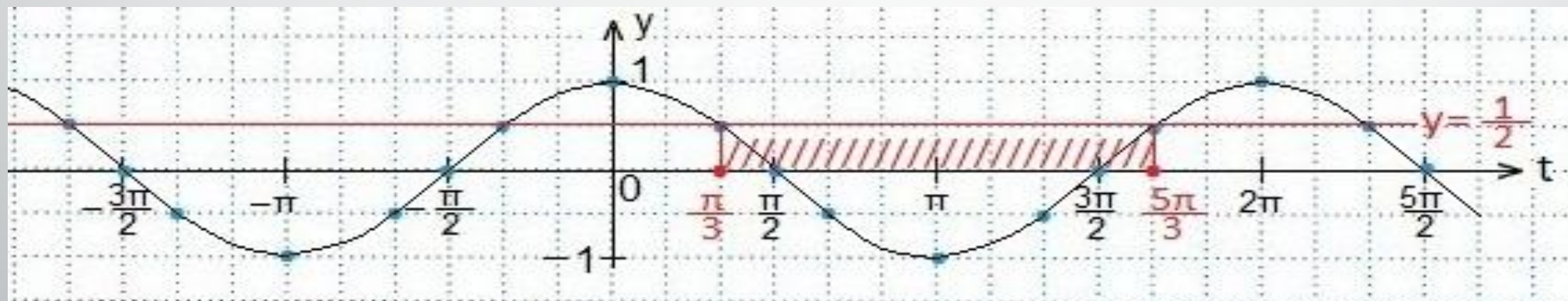
$$2\cos^2 x \leq \frac{3}{2}.$$

Решение. 3) $2\cos^2 x \leq \frac{3}{2}$. Преобразуем: $1 + \cos 2x \leq \frac{3}{2}$;

$\cos 2x \leq \frac{3}{2} - 1$; $\cos 2x \leq \frac{1}{2}$. Сделаем замену: $2x = t$.

Тогда получим неравенство: $\cos t \leq \frac{1}{2}$.

Строим: $y = \cos t$ и $y = \frac{1}{2}$.



$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

Ответ: $[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n], \quad n \in \mathbb{Z}.$

ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ ВИДА: $\sin t < a$ ($-1 \leq a \leq 1$)

справедлива формула:

$$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < t < \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $\sin t > a$, где $-1 \leq a \leq 1$, то

$$\arcsin a + 2\pi n < t < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Если $\cos t < a$, $(-1 \leq a \leq 1)$, то

$\arccos a + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos t > a$, $(-1 \leq a \leq 1)$, то

$$-\arccos a + 2\pi n < t < \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



Спасибо за внимание!