Решение тригонометрических неравенств

Решение тригонометрических неравенств графическим способом

Составим алгоритм решения.

1. Если аргумент — сложный (отличен от **x**), то заменяем его на **t**.

2. Строим в одной координатной плоскости **tOy** графики функций **y=sint** и **y=a**.

3. Находим такие **две соседние точки пересечения графиков** (поближе к оси Oy), между которыми **синусоида** располагается **ниже прямой y=a**. Находим абсциссы этих точек.

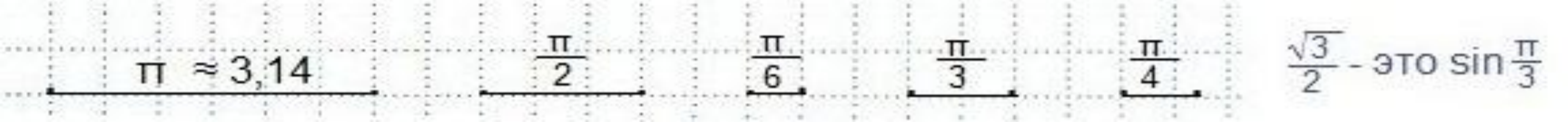
4. Записываем двойное неравенство для аргумента **t**, учитывая период синуса (**t** будет между найденными абсциссами).

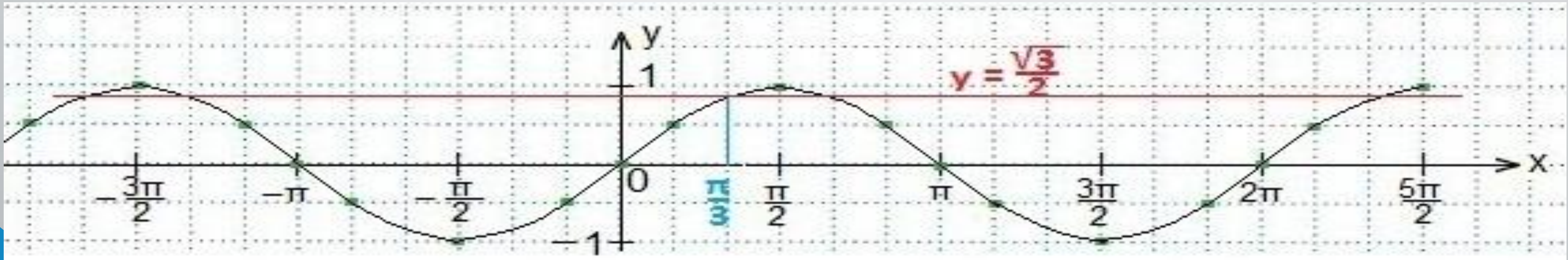
5. Делаем обратную замену (возвращаемся к первоначальному аргументу) и выражаем значение **x** из двойного неравенства, записываем ответ в виде числового промежутка.

Решить неравенство $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

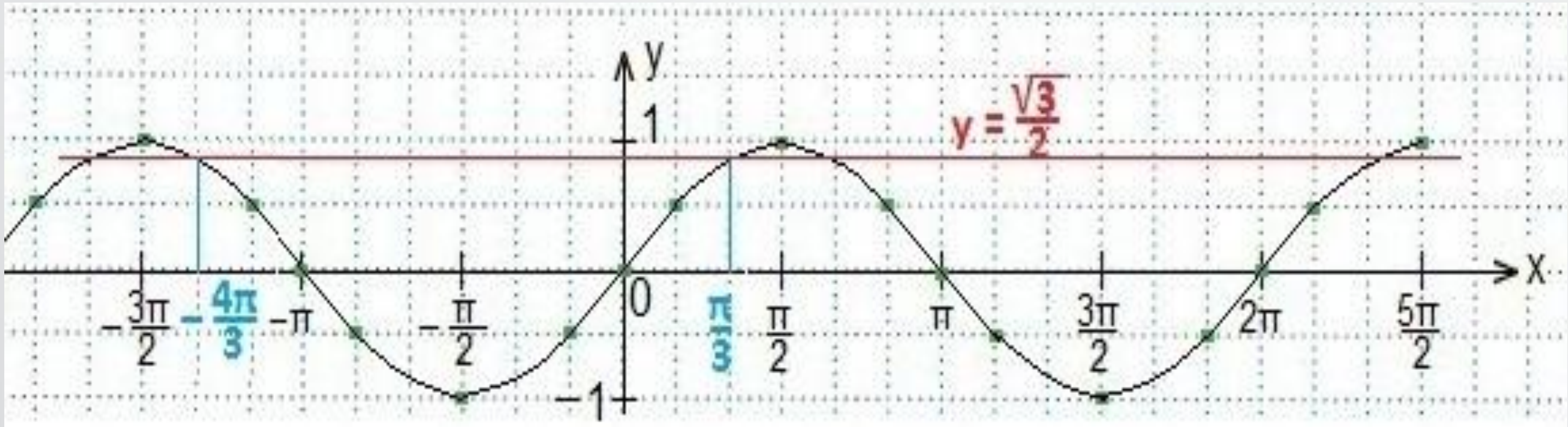
Решение. 1) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Строим графики функций $y=\sin x$ и $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Для построения графика функции **y=sinx** выберем единичный отрезок, равный двум клеткам. Тогда по горизонтальной оси Ох значение **π** (≈3,14) составит **шесть** клеток. Рассчитываем остальные значения аргументов (в клетках





Решить неравенство $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;



Между этими (выделенными) значениями аргумента и находится та часть синусоиды, которая лежит ниже данной прямой, а значит, промежуток между этими выделенными точками удовлетворяет данному неравенству. Учтем период синуса, запишем результат в виде двойного неравенства, а ответ в виде числового промежутка.

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

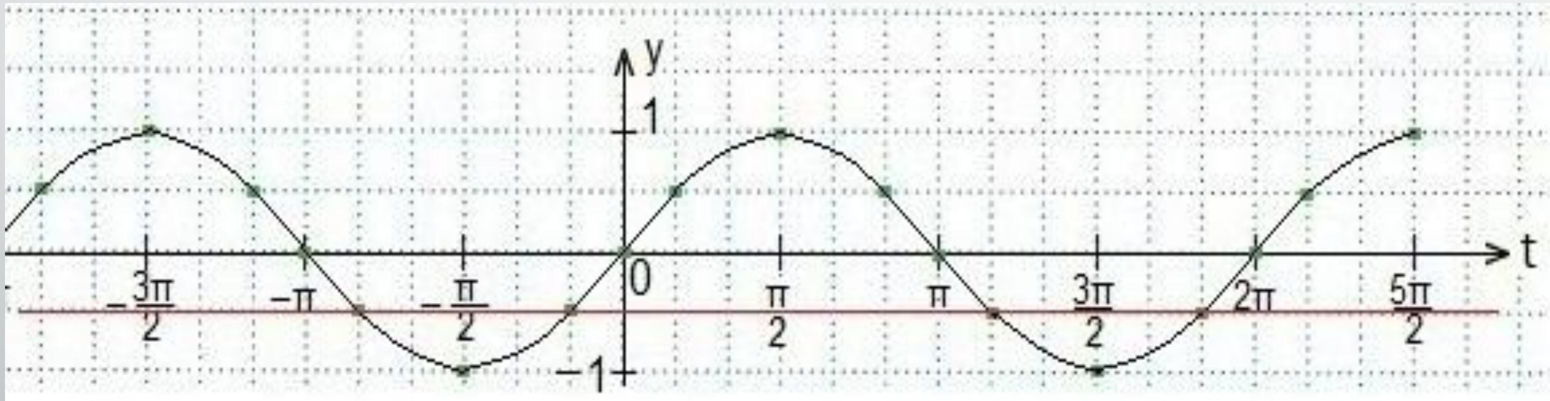
Ответ: $\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$

Решить неравенство $\sin 2x \le -\frac{1}{2}$;

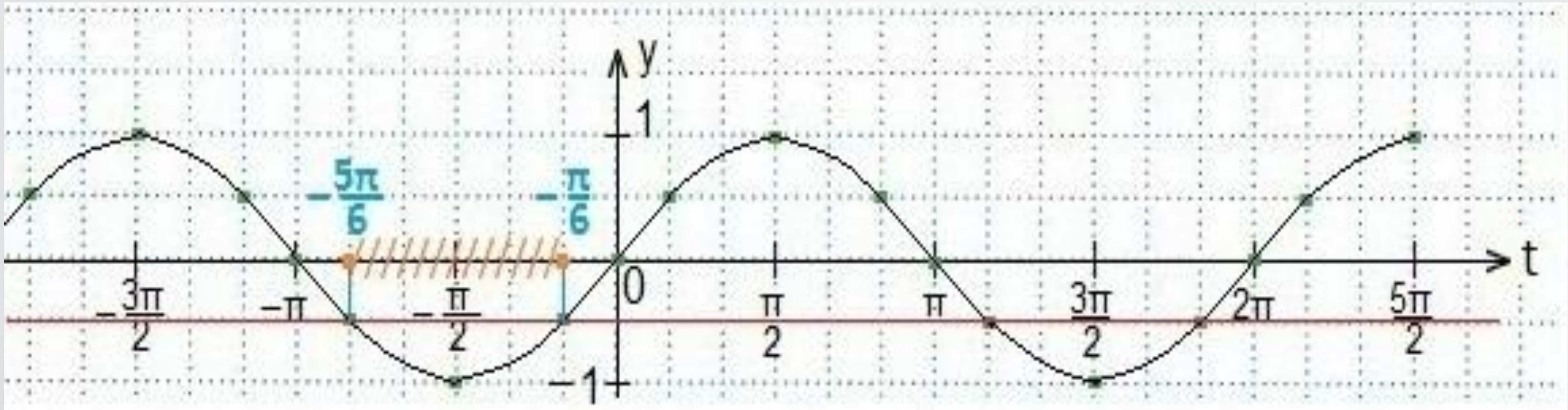
Решение. 2) $\sin 2x \le -\frac{1}{2}$.

Сделаем замену: $2x = t$. Получим неравенство: $\sin t \le -\frac{1}{2}$.

Строим графики функций $y=\sin t$ и $y = -\frac{1}{2}$.



Определяем промежуток, внутри которого точки синусоиды лежат ниже прямой.



$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le t \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le 2x \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

$$-\frac{5\pi}{12} + \pi n \le x \le -\frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z.$$

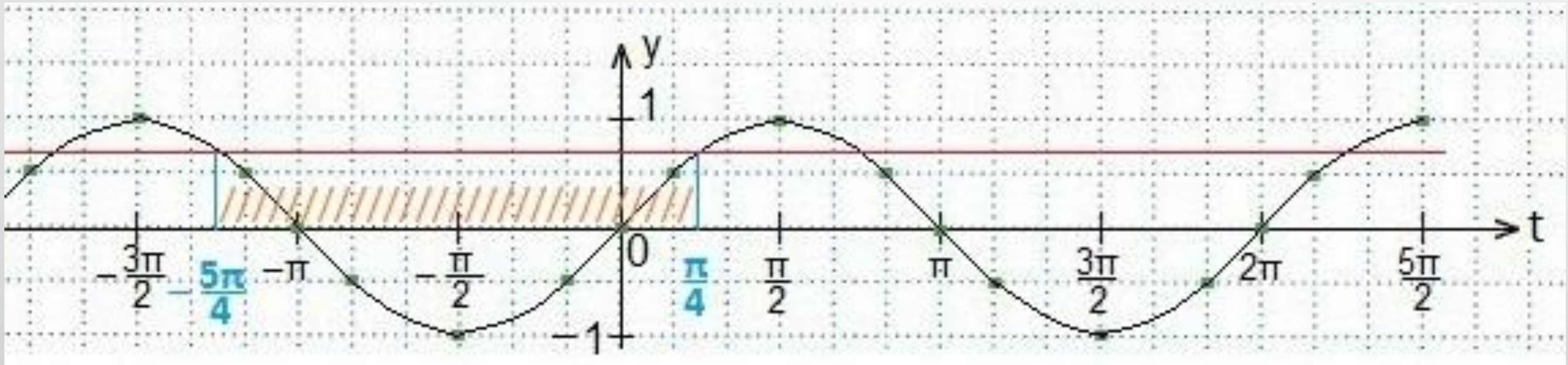
Ответ: $[-\frac{5\pi}{12} + \pi n; -\frac{\pi}{12} + \pi n],\ n \in Z.$

Решить неравенство

$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. 3) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\boxed{\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=t.}$ Получим неравенство: $\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Строим графики функций $y=\sin t$ и $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\frac{\pi}{4}$



$$-\frac{5\pi}{4}+2\pi n<t<\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{5\pi}{4}+2\pi n<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}+2\pi n,$$

$$-\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2\pi n<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2\pi n;$$

$$-\overset{\diagdown 3}{\frac{5\pi}{4}}-\overset{\diagdown 4}{\frac{\pi}{3}}+2\pi n<\frac{x}{2}<\overset{\diagdown 3}{\frac{\pi}{4}}-\overset{\diagdown 4}{\frac{\pi}{3}}+2\pi n;$$

$$-\frac{19\pi}{12}+2\pi n<\frac{x}{2}<-\frac{\pi}{12}+2\pi n;$$

$$-\frac{19\pi}{6}+4\pi n<x<-\frac{\pi}{6}+4\pi n.$$

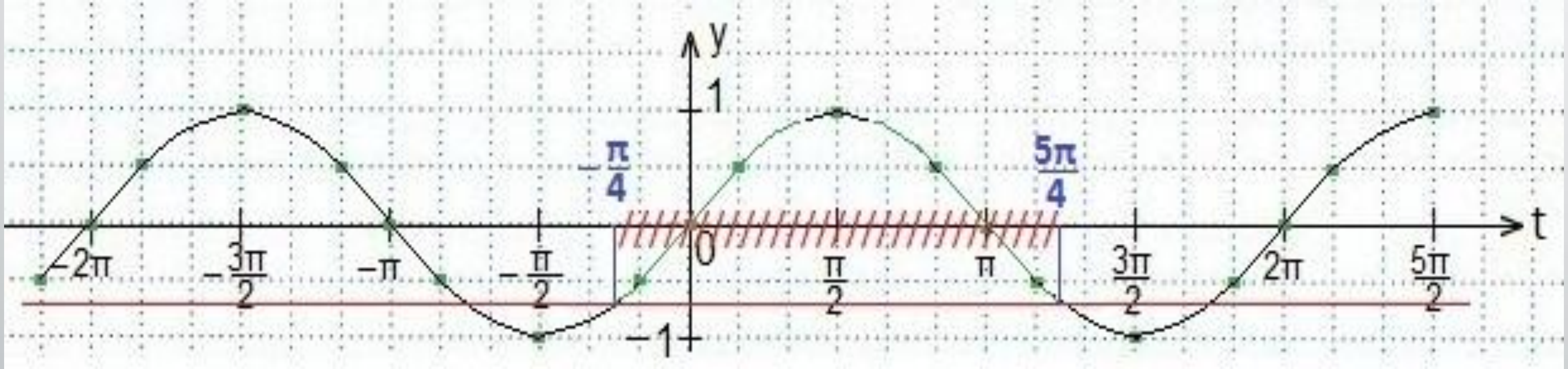
Ответ: $\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+4\pi n\right),\ n\epsilon Z.$

Ответ: $\left(-\frac{19\pi}{6}+4\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+4\pi n\right),\ n\epsilon Z.$

Решить неравенство $\sin\frac{x}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2};$

Решение. 1) $\sin\frac{x}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть $\frac{x}{2} = t$. Тогда $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Построим графики $y=\sin t$ и $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{2} + 4\pi n < x < \frac{5\pi}{2} + 4\pi n, \ \ n\epsilon Z;$$

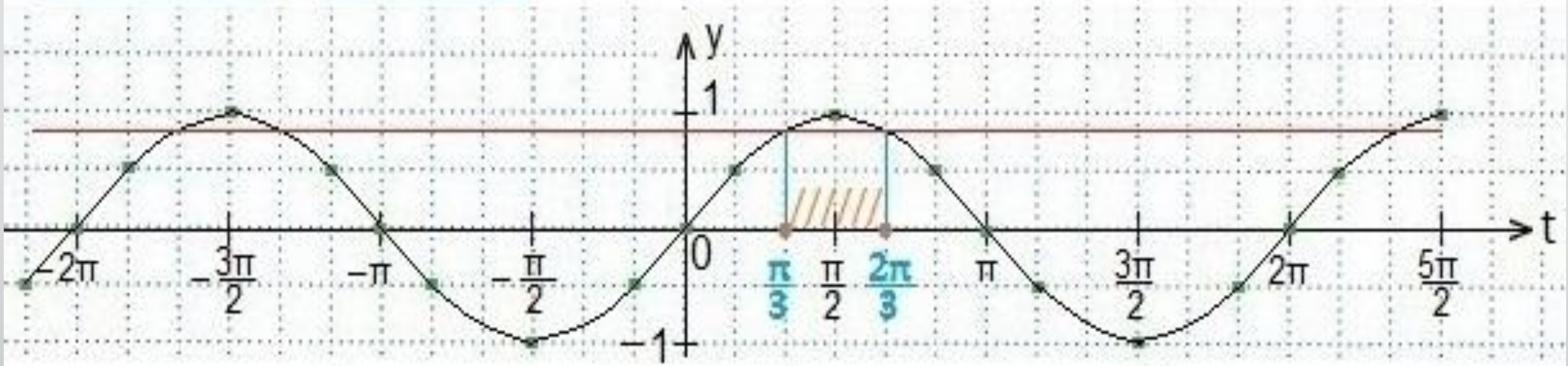
Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi n;\ \frac{5\pi}{2} + 4\pi n\right), \ \ n\epsilon Z.$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi n;\ \frac{5\pi}{2} + 4\pi n\right), \ \ n\epsilon Z.$

Решить неравенство $2\sin x\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение. 2) $2\sin x\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin 2x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Пусть $2x=t$, тогда $\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ и $\boxed{\frac{\pi}{3}}$ Строим $y=\sin t$ и $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



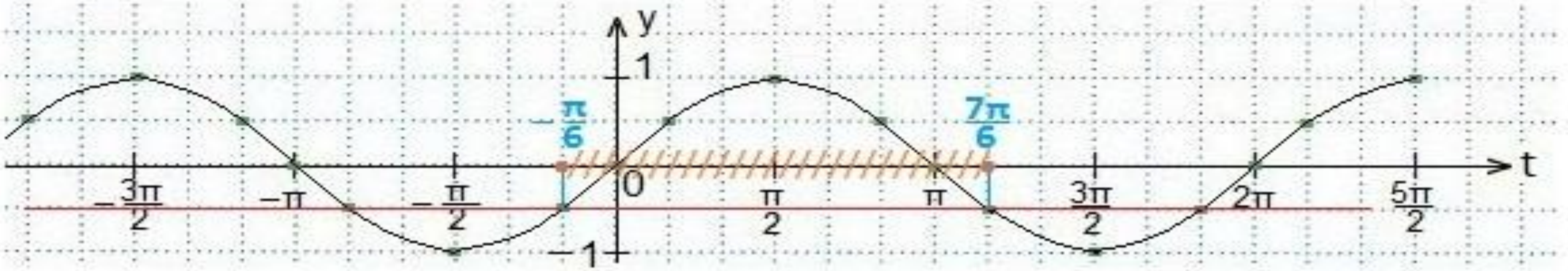
$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\epsilon Z;$ $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\epsilon Z;$

$\frac{\pi}{6} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n\epsilon Z;$ Ответ: $[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n],\ n\epsilon Z.$

Решить неравенство $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) \geq -\frac{1}{2}$.

Решение. 3) $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) \geq -\frac{1}{2}$. Пусть $3x - \frac{\pi}{4} = t$, тогда $\sin t \geq -\frac{1}{2}$.

Строим y=sint и $y = -\frac{1}{2}$.



$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$ $\quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\frac{\pi}{4}^{\backslash 3} - \frac{\pi}{6}^{\backslash 2} + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{\pi}{4}^{\backslash 3} + \frac{7\pi}{6}^{\backslash 2} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\frac{\pi}{12} + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{17\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in Z;$

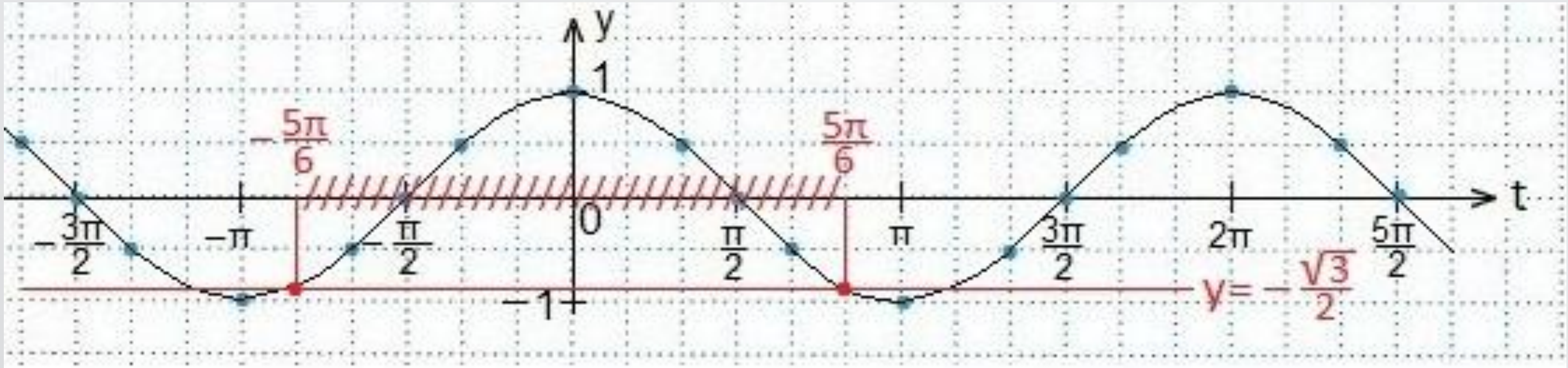
$\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n \leq x \leq \frac{17\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z;$ Ответ: $[\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n;\ \frac{17\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n],\ n \in Z.$

Решить неравенство $\cos 3x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

Решение. 1) $\cos 3x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Пусть 3x=t. Имеем: $\cos t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Строим графики функций: $y=\cos t$ и $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

учитывая, что: $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6}$.



$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z; \qquad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < 3x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$-\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z;$$

Ответ: $\left(-\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n;\ \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n\right),\ n \in Z.$

Решить неравенство

$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение. 2) $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Замена: $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=t$. Тогда $\cos t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Строим: $y=\cos t$ и $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Имеем ввиду, что: $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$

$$-\frac{\pi}{4}+2\pi n\le t\le\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{4}+2\pi n\le\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi n\le\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le\frac{x}{2}\le 2\pi n,\ n\epsilon Z;$$

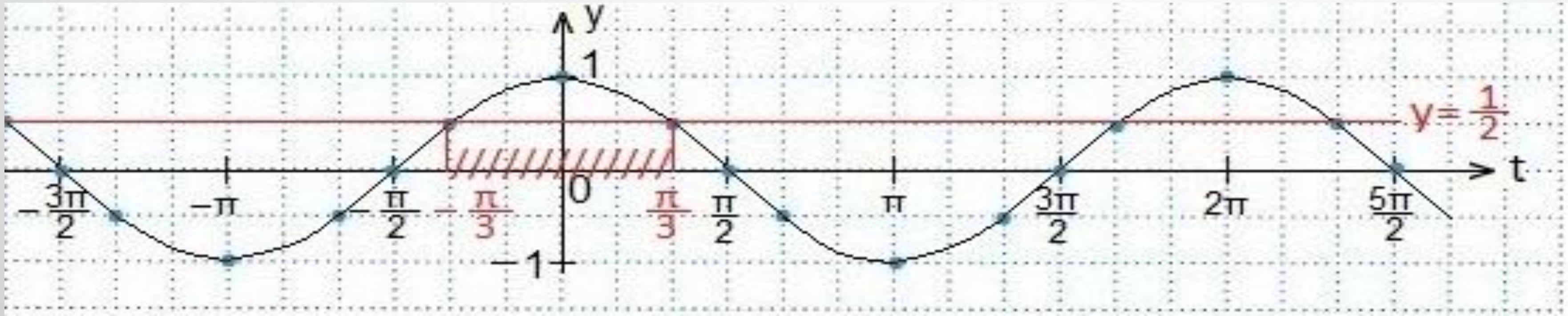
$$-\pi+4\pi n\le x\le 4\pi n,\ n\epsilon Z;$$

Ответ: $[-\pi+4\pi n;\ 4\pi n],\ n\epsilon Z.$

Решить неравенство $2\sin^2 x < \frac{1}{2}.$

Решение. 3) $2\sin^2 x < \frac{1}{2}$. Преобразуем: $1 - \cos 2x < \frac{1}{2} \to \cos 2x > \frac{1}{2}$.

Делаем замену: $2x = t$. Получаем: $\cos t > \frac{1}{2}$. Строим: $y = \cos t$ и $y = \frac{1}{2}$.



$$-\frac{\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{\pi}{3}+2\pi n, \quad n\epsilon Z; \qquad -\frac{\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{\pi}{3}+2\pi n, \quad n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n, \quad n\epsilon Z; \qquad \text{Ответ: } \left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right), \quad n\epsilon Z.$$

Решить неравенство

$$\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

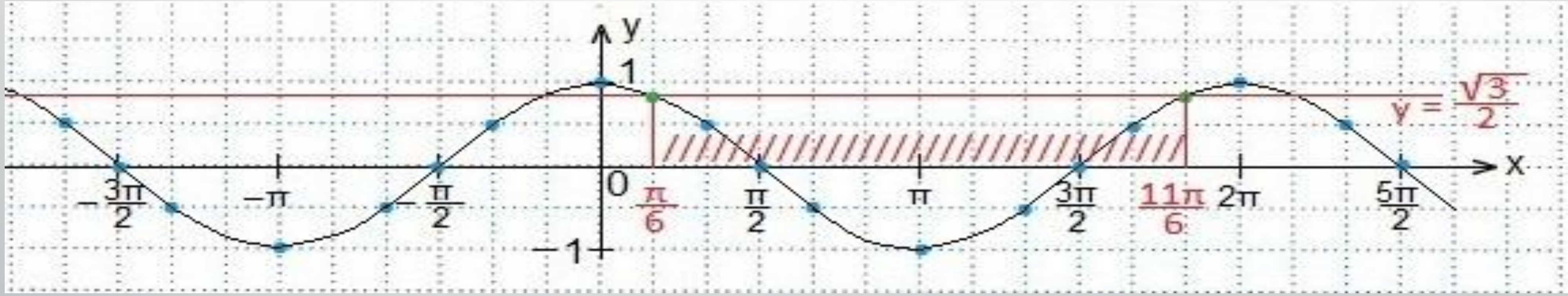
Решение. 1) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Преобразуем левую часть неравенства по формуле косинуса двойного аргумента

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Получим: $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Построим графики функций $y=\cos x$ и $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Определяем промежуток значений **x**, при которых точки синусоиды лежат ниже точек прямой.



$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, \; n \in Z.$$

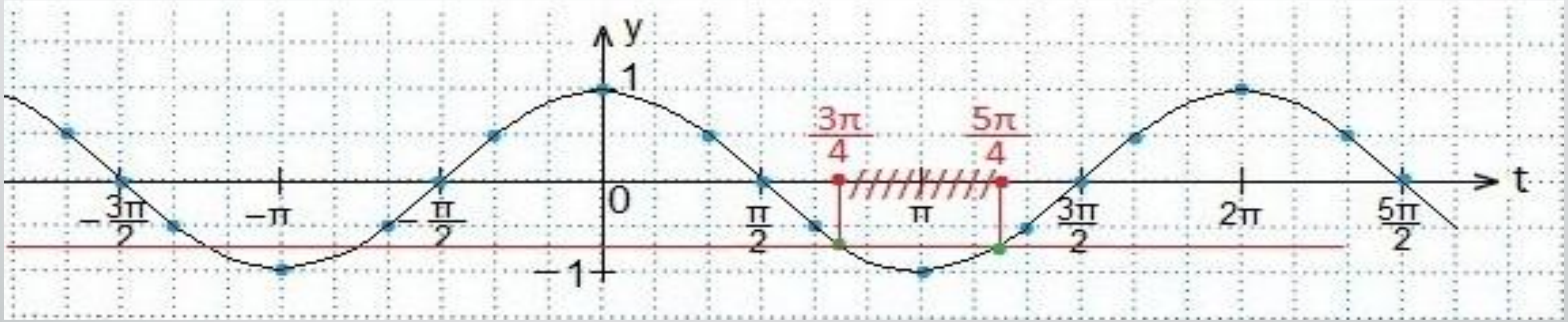
Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right), \; n \in Z.$

Решить неравенство $\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение. 2) $\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Сделаем замену: $\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} = t$.

Тогда неравенство примет вид: $\cos t \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Построим графики функций $y = \cos t$ и $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le t \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z;$$

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le \frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z;$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le \frac{x}{4} \le \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$\overset{4}{\frac{\pi}{3}} + \overset{3}{\frac{3\pi}{4}} + 2\pi n \le \frac{x}{4} \le \overset{4}{\frac{\pi}{3}} + \overset{3}{\frac{5\pi}{4}} + 2\pi n,$$

$$\frac{13\pi}{12} + 2\pi n \le \frac{x}{4} \le \frac{19\pi}{12} + 2\pi n,$$

$$\frac{13\pi}{3} + 8\pi n \le x \le \frac{19\pi}{3} + 8\pi n, \ \ n\epsilon Z;$$

Ответ: $[\frac{13\pi}{3} + 8\pi n; \ \frac{19\pi}{3} + 8\pi n], \ n\epsilon Z.$

Решить неравенство $2\cos^2x \le \frac{3}{2}$.

<u>Решение.</u> 3) $2\cos^2x \le \frac{3}{2}$. Преобразуем: $1 + \cos2x \le \frac{3}{2}$;

$\cos2x \le \frac{3}{2} - 1$; $\cos2x \le \frac{1}{2}$. Сделаем замену: $2x=t$.

Тогда получим неравенство: $\cos t \le \frac{1}{2}$.

Строим: $y=\cos t$ и $y=\frac{1}{2}$.

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le t \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z;$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 2x \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z;$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi n \le x \le \frac{5\pi}{6} + \pi n, \ \ n\epsilon Z;$$

Ответ: $[\frac{\pi}{6} + \pi n; \ \frac{5\pi}{6} + \pi n], \ \ n\epsilon Z.$

ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ ВИДА: **sint<a** (-1≤**a**≤1) справедлива формула:

$$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < t < \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Если **sint>a**, где -1≤**a**≤1, то

arcsin a + 2πn < t < π — arcsin a + 2πn, nєZ.

Если **$\cos t < a$**, ($-1 \le$ **a** ≤ 1), то

$$\arccos a + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Если **cost>a**, (-1≤**a**≤1), то

$$-\arccos a + 2\pi n < t < \arccos a + 2\pi n, \; n \in Z.$$

Спасибо за внимание!