

Задание № 18 ЕГЭ

Задача 18

Определите наименьшее натуральное число A ,
такое что выражение

$$(X \& 29 \neq 0) \rightarrow ((X \& 9 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Этапы решения

1. Приведение к стандартному виду
2. Формулировка проблемы
3. Построение шаблона
4. Получение решения

Приведение к стандартному виду

- Стандартным назовем следующий вид логического выражения:

$$Z_N \vee Z_M \vee Z_A$$

- Где $Z_N = P(x, N)$, N, M – известные величины, A – неизвестная
- Например $Z_{25} \vee Z_{47} \vee Z_A$
- Основные формулы
 - $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$
 - $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$
 - $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$
 - $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee x \wedge z$
 - $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Приведение к стандартному виду

Раскрытие импликаций, эквивалентностей и пр. для
записи формулы в базисе И, ИЛИ, НЕ

Формулировка проблемы

- С чем не справляются известные члены формулы?
- Что должен сделать неизвестный член формулы

Построение шаблона

• – любой символ

b – любой символ, но среди нескольких b хотя бы одна 1

0,1 – двоичные цифры

Правила

• $*\wedge* = *$ $*\vee* = *$

• $b \wedge b = b$ $b \vee b = b$ $b \wedge * = b$ $b \vee * = b$

• $0 \wedge 0 = 0$ $0 \vee 0 = 0$ $b \wedge 0 = 0$ $b \vee 0 = b$

$0 \wedge * = 0$ $0 \vee * = *$

Построение шаблона

1. Перевод в двоичную систему счисления
2. Описание шаблона для каждого компонента формулы
3. Описание общего шаблона

Виды уравнений

- $Z_N \vee Z_M \vee Z_A$
- $Z_N \vee Z_M \vee \overline{Z_A}$
- $\overline{Z_N} \vee Z_M \vee Z_A$
- $\overline{Z_N} \vee Z_M \vee \overline{Z_A}$
- $\overline{Z_N} \vee \overline{Z_M} \vee Z_A$
- $\overline{Z_N} \vee \overline{Z_M} \vee \overline{Z_A}$

$$Z_N \vee Z_M \vee Z_A$$

- Проблема
 - Z_N - не справился (не обнулil число)
 - Z_M - не справился (не обнулil число)
- Решение проблемы
 - Z_A - справился (обнулil число)

$$Z_N \vee Z_M \vee \overline{Z_A}$$

- Проблема
 - Z_N - не справился (не обнулil число)
 - Z_M - не справился (не обнулil число)
- Решение проблемы
 - Z_A - не справился (не обнулil число)

$$\overline{Z_N} \vee Z_M \vee Z_A$$

- Проблема
 - Z_N - справился (обнулil число)
 - Z_M - не справился (не обнулil число)
- Решение проблемы
 - Z_A - справился (обнулil число)

$$\overline{Z_N} \vee Z_M \vee \overline{Z_A}$$

- Проблема
 - Z_N - справился (обнулil число)
 - Z_M - не справился (не обнулil число)
- Решение проблемы
 - Z_A - не справился (не обнулil число)

$$\overline{Z_N} \vee \overline{Z_M} \vee Z_A$$

- Проблема
 - Z_N - справился (обнулil число)
 - Z_M - справился (обнулil число)
- Решение проблемы
 - Z_A - справился (обнулil число)

$$\overline{Z_N} \vee \overline{Z_M} \vee \overline{Z_A}$$

- Проблема
 - Z_N - справился (обнулil число)
 - Z_M - справился (обнулil число)
- Решение проблемы
 - Z_A - не справился (не обнулil число)

$$(X \& 29 \neq 0) \rightarrow ((X \& 9 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

1. $\overline{Z_{29}} \rightarrow (Z_9 \rightarrow \overline{Z_A})$
2. $\overline{Z_{29}} \rightarrow (\overline{Z_9} \vee \overline{Z_A}) \quad Z_{29} \vee \overline{Z_9} \vee \overline{Z_A}$
3. $29=11101 \quad 9=1001$
4. Z_{29} – не справился Z_9 – справился
5. С какими числами не справляется Z_{29} ? **bbb*b**
6. С какими числами справляется Z_9 ? **0**0**
7. Одновременно (связка И)

bbb*b

*0**0

b0b*0

$b0b^*0$

$$Z_{29} \vee \overline{Z_9} \vee \overline{Z_A}$$

- Этот шаблон описывает общий вид «плохого» числа.
- Решение проблемы – A должно НЕ справиться
- Наименьшее A – $10100 = 20$

- . Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение
- $(x \& 125 \neq 0) \vee ((x \& 34 = 0) \rightarrow (x \& A = 0))$
- тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

$$(x \& 125 \neq 0) \vee (x \& 34 = 0) \rightarrow (x \& A = 0)$$

1. $\overline{Z_{125}} \vee (Z_{34} \rightarrow Z_A)$

2. $\overline{Z_{125}} \vee \overline{Z_{34}} \vee Z_A$

3. $29=1111100 \quad 34=100010$

4. Z_{125} – справился Z_{34} – справился

5. С какими числами справляется Z_{125} ? **00000****

6. С какими числами справляется Z_{34} ? **0***0***

7. Одновременно (связка И)

00000**

*0***0*

000000*

$$000000* \quad \overline{Z_{125}} \vee \overline{Z_{34}} \vee Z_A$$

- Этот шаблон описывает общий вид «плохого» числа.
- Решение проблемы – A должно справиться
- Наименьшее A = 1

Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи).

Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение

$$\left((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0) \right) \rightarrow \left((x \& 48 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0) \right)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

$((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 48 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$

1. $\overline{(Z_{28} \vee Z_{45})} \rightarrow (Z_{48} \rightarrow \overline{Z_A})$
2. $(Z_{28} \wedge Z_{45}) \vee (\overline{Z_{48}} \vee \overline{Z_A})$
3. $28 = 011100 \quad 45 = 101101 \quad 48 = 110000$
4. $Z_{28} \wedge Z_{45} = Z_{28}$ – не справился или Z_{45} – не справился
5. С какими числами не справляется Z_{28} ? *bbb**
6. С какими числами не справляется Z_{45} ? b*bb*b
7. Хотя бы один (связка ИЛИ)
*bbb**
b*bb*b
bbb*b

$$(Z_{28} \wedge Z_{45}) \vee (\overline{Z_{48}} \vee \overline{Z_A})$$

- 1. С какими числами справляется Z_{48} ? 00****
- 2. $Z_{28} \wedge Z_{45}$ не справился
- 3. Z_{48} справился
- 4. Одновременно (связка И)

00****

bbbb*b

00bb*b

- Этот шаблон описывает общий вид «плохого» числа.
- Решение проблемы – А должно НЕ справиться
- Наименьшее $A = 1101 = 13$