Приведение матрицы к жордановой форме

Определение 1. Жордановой клеткой называется квадратная матрица порядка k вида

$$J_k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix},$$

в которой на главной диагонали стоит одно и то же число λ_i (собственное значение), над главной диагональю число 1, а все остальные элементы матрицы равны нулю, k – значение кратности *i*-го собственного значения.

Определение 2. Жордановой матрицей называется квадратная матрица вида

$$J = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

где $J_{k_i}(\lambda_i), i = 1, \dots s$ – жордановы клетки (разных порядков), а остальные элементы – нулевые.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_s$ – собственные числа матрицы J.

Пример 1. Матрица A вида

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

является Жордановой матрицей 5-го порядка, состоит из двух жордановых клеток 3-го и 2-го порядка.

Числа α и β – собственные значения матрицы, характеристический полином $\Delta(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3(\lambda - \beta)^2$.

Алгоритм приведения матрицы к Жордановой форме:

Рассматривается матрица A $(n \times n)$

1) Записать характеристический полином матрицы A

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

2) Вычислить собственные значения матрицы A

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

3) Определить количество жордановых блоков

$$m = \sum_{i=1}^{s} (n - rank(\lambda_i I - A))$$

4) Записать матрицу J

5) При необходимости найти матрицу преобразования подобия и проверить результат

Каноническая жорданова форма

Пример 2. Преобразовать матрицу $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ в жорданову каноническую форму и найти матрицу T: $TJ = AT$

1) Записываем характеристический полином матрицы A:

$$\Delta(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\right) = (\lambda + 1)^3$$

2) Вычисляем собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$

3) Определяем количество жордановых блоков по формуле $m = \sum_{i=1}^{k}(n - rank(\lambda_i I - A))$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$rank(\lambda I - A) = 2$. Количество жордановых блоков $m = n - 2 = 1$

.

4) Записываем матрицу J

$$J=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

5) Вычисляем матрицу преобразования $TJ = AT$:

$$[T_1 \quad T_2 \quad T_3]\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}=A[T_1 \quad T_2 \quad T_3]$$

$$\lambda T_1 = AT_1;\ T_1+\lambda T_2 = AT_2;\ T_2+\lambda T_3 = AT_3.$$

$$T=[T_1 \quad T_2 \quad T_3]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},$$

Пример 3. Преобразовать матрицу $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ в жорданову каноническую форму

1) Записываем характеристический полином матрицы A:

$$\Delta(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \left[\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right]\right) = (\lambda - 2)^3$$

2) Вычисляем собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

3) Определяем количество жордановых блоков по формуле $m = \sum_{i=1}^{k}(n - rank(\lambda_i I - A))$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$rank(\lambda I - A) = 1$. Количество жордановых блоков $m = n - 1 = 3 - 1 = 2$

Тогда с точностью до расположения жордановых клеток матрица J имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Пример 4. Преобразовать матрицу $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ в жорданову каноническую форму

Пример 5. Преобразовать матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ в жорданову каноническую форму

1) Записываем характеристический полином матрицы A:

$$\Delta(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 1)^4$$

2) Вычисляем собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$

3) Определяем количество жордановых блоков по формуле $m = \sum_{i=1}^{k}(n - rank(\lambda_i I - A))$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & -13 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$rank(\lambda I - A) = 2$. Количество жордановых блоков $m = n - 2 = 4 - 2 = 2$

Следовательно, матрица состоит из двух жордановых клеток. Возможны два варианта:

1) Две жордановы клетки 2×2
2) Две жордановы клетки: 1×1 и 3×3

Определяем количество клеток 2-го порядка по формуле

$$g_h(\lambda_i) = rank(\lambda_i I - A)^{h-1} - 2rank(\lambda_i I - A)^h + rank(\lambda_i I - A)^{h+1}$$

где h – порядок жордановой клетки,

$$g_2(1) = rank(1 \cdot I - A)^{2-1} - 2rank(1 \cdot I - A)^2 + rank(1 \cdot I - A)^{2+1}$$

$$(I - A)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}, rank(I - A)^2 = 1$$

$$(I - A)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, rank(I - A)^3 = 0$$

$$g_2(1) = 2 - 2 \cdot 1 - 0 = 0$$

Следовательно, клеток размера 2×2 нет, и матрица J имеет вид (с точностью до расположения блоков)

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверяем в Matlab:

```
>> A=[1 -3 0 3; -2 -6 0 13; 0 -3 1 3; -1 -4 0 8]

A =

     1    -3     0     3
    -2    -6     0    13
     0    -3     1     3
    -1    -4     0     8

>> jordan(A)

ans =

     1     1     0     0
     0     1     1     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```