

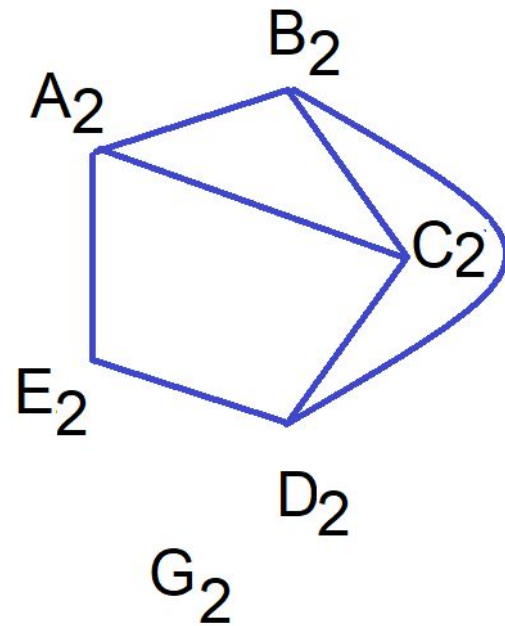
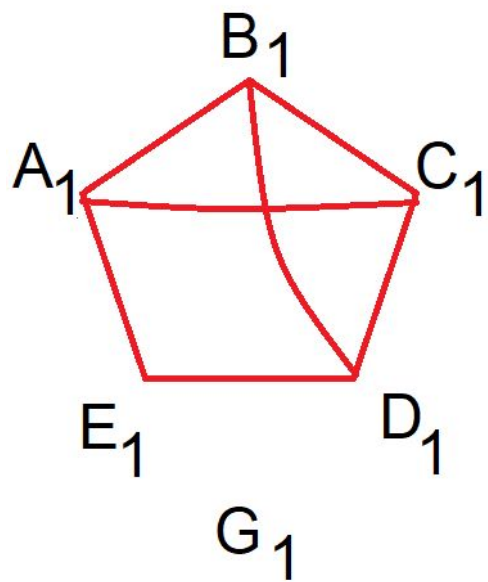
# Задачи укладки графов

1. Планарность графов
2. Укладка графа на плоскости

# Планарность графов

Один и тот же граф возможно изобразить различными способами (с точностью до изоморфизма). При этом большое значение уделяется вопросам планарности.

Примеры: 1) при изготовлении электронных микросхем необходимо выяснить, можно ли схему устройства изобразить на плоскости без пересечений проводников; 2) при проектировании транспортных путей возможно избежать нежелательных перекрестков и т.д.



Граф  $G_1$  называется **планарным**, если существует изоморфный ему граф  $G_2$ , в изображении которого на плоскости ребра пересекаются только в вершинах.

Все планарные графы укладываются на плоскости, т.е. имеют плоскую укладку.

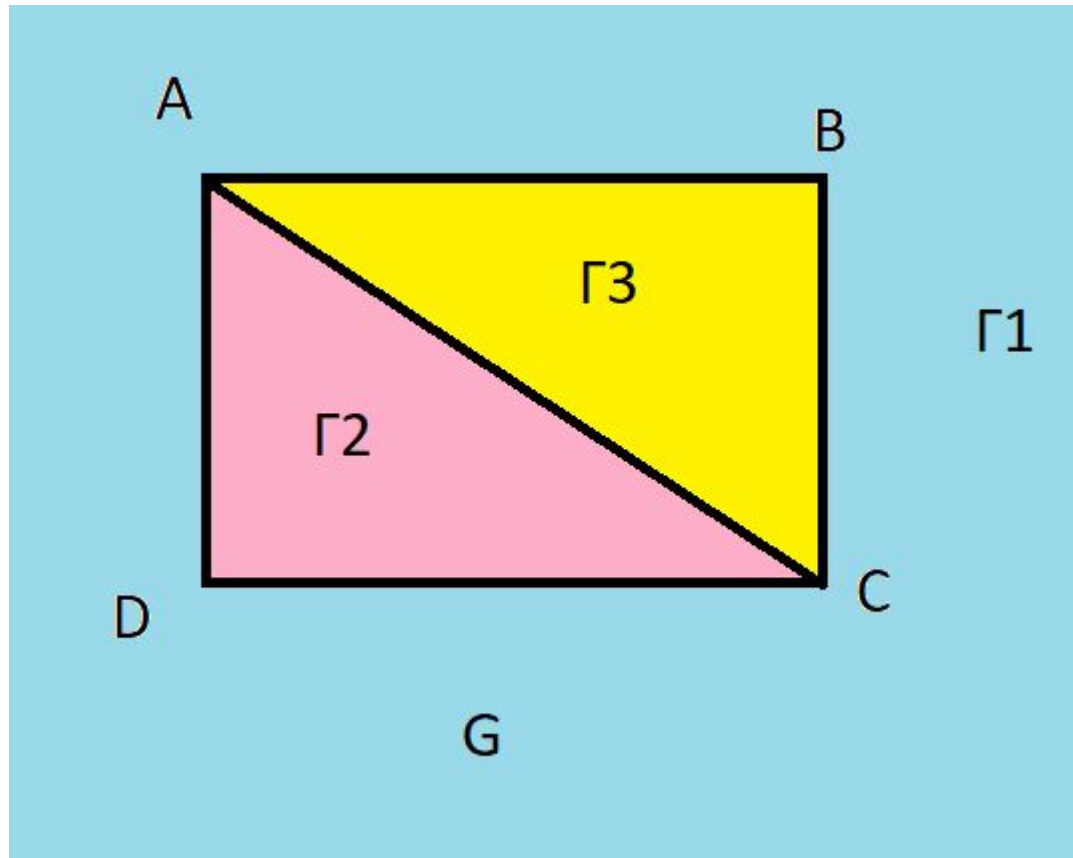
**$G_1$  – планарный граф,  
 $G_2$  – его плоская укладка**

Теорема 1. Любая часть (подграф) планарного графа есть планарный граф.

Теорема 2. Граф планарен тогда и только тогда, когда каждая связная компонента этого графа – планарный граф

**Гранью** планарного графа называется множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена плоской кривой, не пересекающей ребер этого графа.

**Границей грани** называется множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани



Граф  $G$  имеет три грани:  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$

Неограниченная грань  $\Gamma_1$  – внешняя

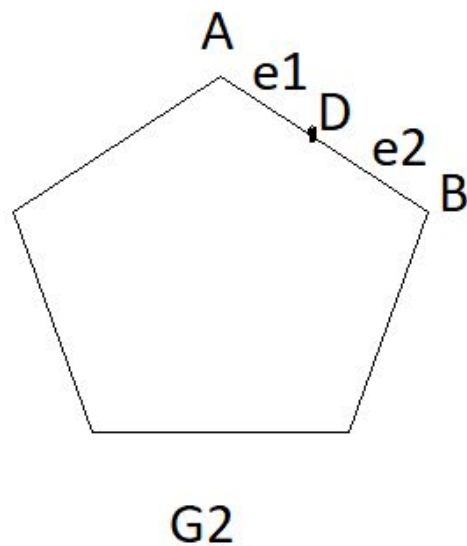
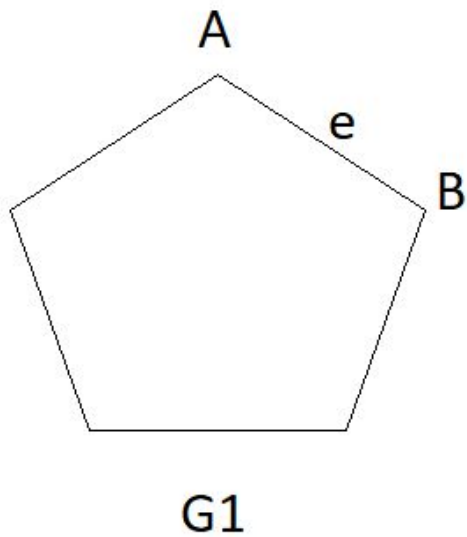
Ограниченные грани  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  – внутренние

Пусть  $n$ ,  $m$ ,  $f$  - число вершин, ребер и граней планарного графа соответственно

## **Теорема Эйлера**

Для всякого связного планарного графа верно равенство:

$$n - m + f = 2$$



Рассмотрим операцию **подразбиения** ребра в графе.

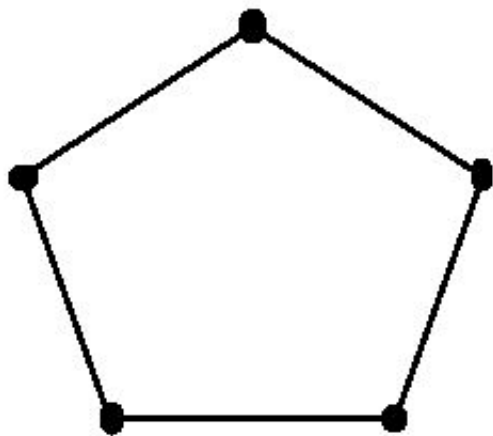
Операция **подразбиения** ребра, образованного парой вершин **A** и **B**, состоит в удалении ребра **e** и добавлении двух новых ребер **e1** и **e2**, отвечающих парам вершин **A, D** и **B, D** соответственно.

Здесь **D** - новая (дополнительная) вершина графа.

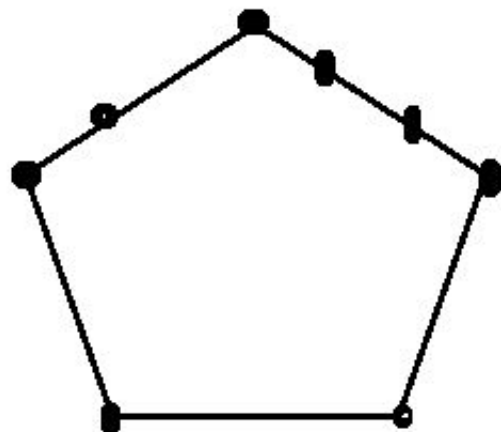
$G_1$  - граф до операции подразбиения ребра **e**,  $G_2$  – граф, получившийся в результате этой операции.

Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер.

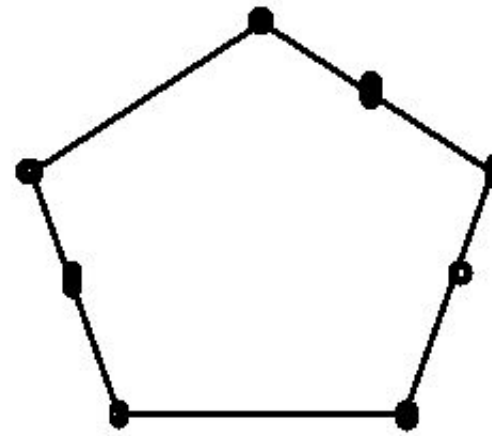




G1



G2

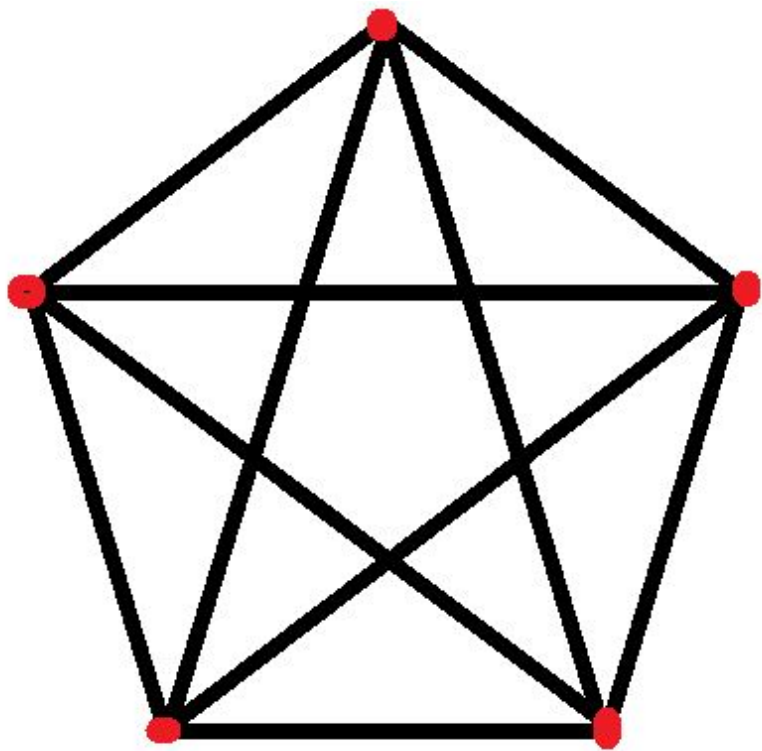


G3

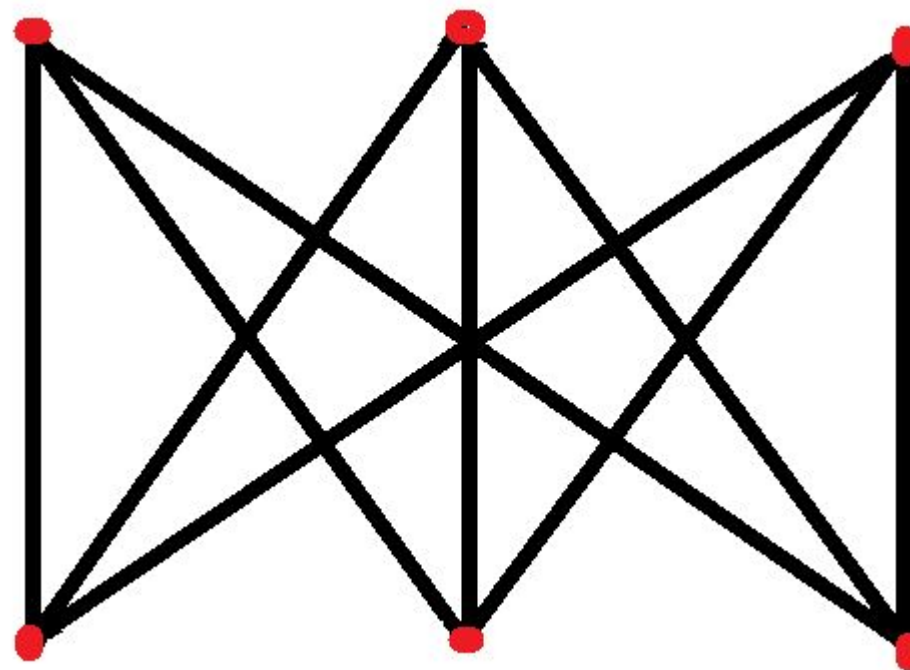
G1 – исходный граф

G2 и G3 гомеоморфные графы, полученные из G1 путем подразделения ребер G1

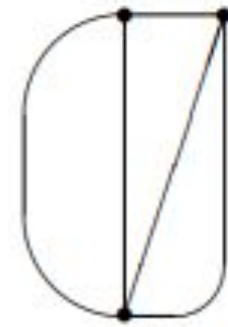
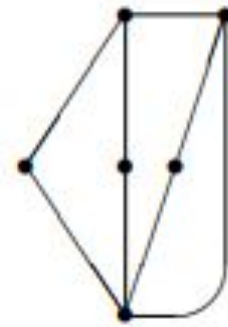
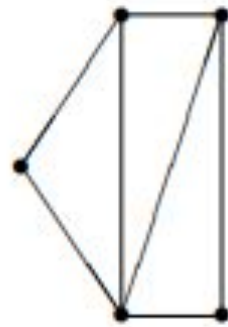
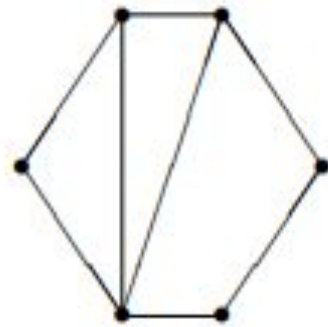
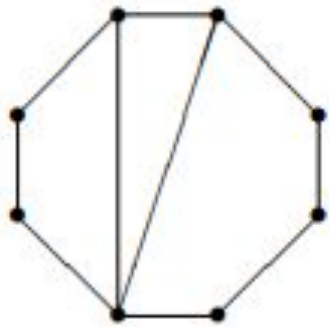
Граф  $K_5$  – полный граф с 5  
вершинами



Граф  $K_{3,3}$  – «домики и колодцы»



# Примеры гомеоморфных графов



Вопрос о распознавании планарности графа являлся в свое время серьезной математической проблемой, которую на сегодняшний день удалось решить.

# Некоторые критерии планарности графов

**Теорема Понтрягина-Куратовского.** Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

## Теорема

Граф планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, стягиваемых (т.е. получаемых последовательностью отождествлений вершин, связанных ребрами) к графам  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

Для непланарных графов вводятся характеристики, представляющие ту или иную меру непланарности.

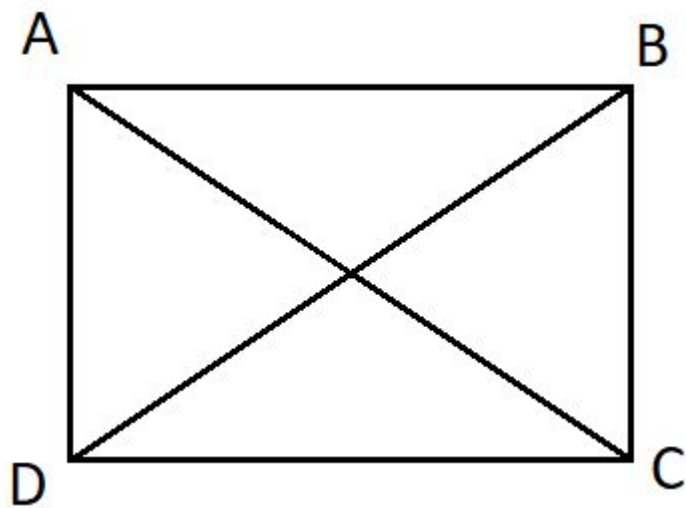
Если граф непланарен, то для его геометрической реализации удаляют отдельные ребра – переносят их на другую плоскость.

Наименьшее число ребер, удаление которых приводит к планарному графу, называется **числом планарности** или **искаженностью** графа  $G$  и обозначается  $sk(G)$

Для числа планарности полного графа справедлива следующая формула:

$$sk(G) = C_n^2 - 3n + 6$$

$$n \geq 3$$

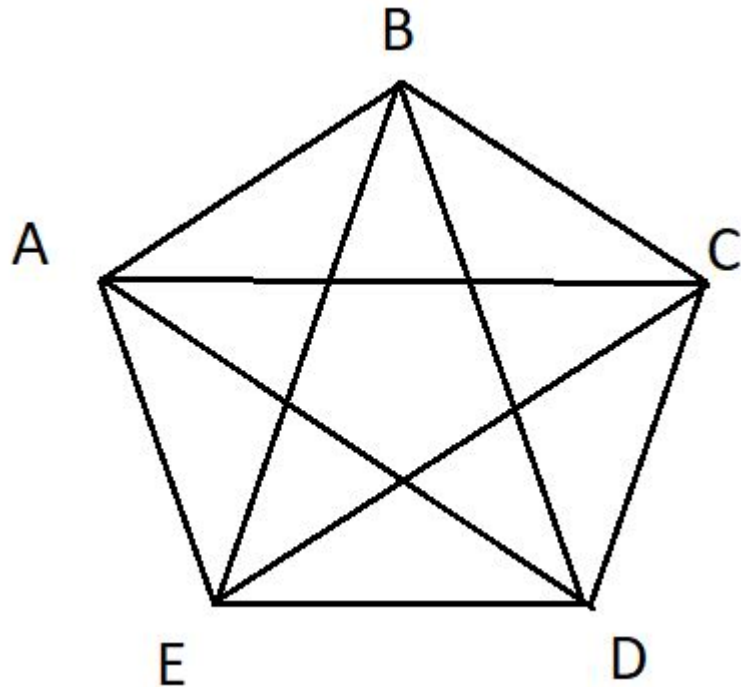


$n=4$

$G$  – полный граф, является  
планарным

$$sk(G) = C_4^2 - 3 \cdot 4 + 6 = 0$$





$N=5$

$G$  – полный граф, не является  
планарным

$$sk(G) = C_5^2 - 3 \cdot 5 + 6 = 10 - 15 + 6 = 1$$

**Примеры из практики.** В электротехнике части цепей наносятся на одну сторону непроводящей пластины (печатная плата). Поскольку проводники не изолированы, они не могут пересекаться, и соответствующие графы должны быть планарными.

Требуется знать, сколько печатных плат понадобится для формирования всей сети.

С этой целью вводится понятие толщины графа.

**Толщина графа**  $t(G)$  – наименьшее число планарных графов, наложение которых дает  $G$ .

Толщина графа является мерой его «непланарности».  
Например, толщина планарного графа равна единице,  
поскольку его можно разместить на одной плоскости.

$$t(K_5)=2 \text{ и } t(K_{3,3})=2$$

Оценку снизу для толщины графа можно получить по теореме Эйлера.

Это довольно грубая оценка.

Однако часто оказывается истинным значением толщины графа.

Обозначения:

$[x]$  – наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ,

$\{x\}$  – наименьшее целое число, не превосходящее  $x$

# Теорема о нижней границе толщины графа

Толщина  $t(G)$  графа  $G$  удовлетворяет следующим неравенствам:

$$t(G) \geq \left\{ \frac{m}{3n-6} \right\} \quad t(G) \geq \left[ \frac{m+3n-7}{3n-6} \right]$$

$n$  – количество вершин,  $m$  – количество ребер графа  $G$

## 2. Укладка графа на плоскости

Критерии планарности не всегда просты в практическом применении. Также они не дают информации о том, как выполнить укладку планарного графа на плоскости.

Рассмотрим некоторые алгоритмы проверки планарности графа и построения его плоской укладки.

Алгоритм представляет собой процесс последовательного присоединения к некоторому уложенному подграфу  $G'$  графа  $G$  новой цепи  $L$ , оба конца которой принадлежат  $G$ .

Затем в качестве подграфа  $G'$  выбирается любой простой цикл графа  $G$ , и процесс присоединения новых цепей продолжается до тех пор, пока не будет построен плоский граф, изоморфный  $G$ .

Либо присоединение новой простой цепи на некотором этапе окажется невозможным. Что будет свидетельствовать о непланарности исходного графа  $G$ .

Пусть имеется некоторая плоская укладка подграфа  $G' = (V', E')$  графа  $G = (V, E)$ .

**Сегментом**  $G_i$  относительно  $G'$  называется подграф графа  $G$  следующих двух видов:

- 1) ребро  $e = (u, v)$  такое, что  $e \notin E'$ ,  $u, v \in V'$ ;
- 2) Связная компонента графа  $G \setminus G'$ , дополненная всеми ребрами графа  $G$ , соединяющими эту компоненту с подграфом  $G'$ , и концами этих ребер.



Вершина  $u$  сегмента  $G_i$  называется **контактной**, если  $u \in V'$

Граф  $G'$  – плоский, значит, он разбивает плоскость на грани. **Допустимой гранью для сегмента  $G_i$  относительно  $G'$**  называется грань  $\Gamma$  графа  $G'$ , содержащая все контактные вершины сегмента  $G_i$ .

Обозначим через  $\Gamma(G_i)$  множество допустимых граней для  $G_i$ .

Для непланарных графов может быть  $\Gamma(G_i) = \emptyset$ .

Рассмотрим простую цепь  $L$  сегмента  $G_i$ , соединяющую две контактные вершины этого сегмента и не содержащую других контактных вершин.

Такие цепи называются  **$\alpha$ -цепями**.

Всякая  $\alpha$ -цепь может быть уложена в любую грань, допустимую для данного сегмента.

Два сегмента  $G_i$  и  $G_j$  называются **конфликтующими**, если:

- 1)  $\theta = \Gamma(G_i) \cap \Gamma(G_j) \neq \emptyset$ ;
- 2) существуют две  $\alpha$ -цепи  $L_i \in G_i$  и  $L_j \in G_j$ , которые нельзя уложить без пересечений одновременно ни в какую грань  $\Gamma \in \theta$ .

Пусть  $G'$  – плоская укладка некоторого подграфа графа  $G$ .

Для каждого сегмента  $G_i$  относительно  $G'$  находим множество допустимых граней.

Тогда возможны следующие случаи:

А) существует сегмент  $G_i$ , для которого  $\Gamma(G_i) = \emptyset$ , тогда исходный граф  $G$  непланарен;

Б) для некоторого сегмента  $G_i$  существует единственная допустимая грань  $\Gamma$ , тогда располагаем любую  $\alpha$ -цепь сегмента  $G_i$  в грани  $\Gamma$ , при этом грань  $\Gamma$  разобьется на две грани;

В)  $\Gamma(G_i) \geq 2$  для всех  $G_i$ , тогда располагаем любую  $\alpha$ -цепь сегмента  $G_i$  в любой допустимой грани.

Если на очередном шаге множество сегментов пусто, то построена укладка графа на плоскости.

# Алгоритм укладки планарного графа на плоскости

**Шаг 1.** Выбираем любой простой цикл  $C$  графа  $G$ . Укладываем этот цикл на плоскости и полагаем  $G' = C$ .

**Шаг 2.** Находим все грани графа  $G'$  и все сегменты  $G_i$  относительно  $G'$ . Если множество сегментов пусто, то укладка графа  $G$  на плоскости построена, конец алгоритма.

**Шаг 3.** Для каждого сегмента  $G_i$  определяем множество допустимых граней  $\Gamma(G_i)$ . Если найдется сегмент  $G_i$ , для которого  $\Gamma(G_i) = \emptyset$ , то исходный граф непланарен, конец алгоритма. Иначе переход на шаг 4.

**Шаг 4.** Если существует сегмент  $G_i$ , для которого имеется единственная допустимая грань  $C$ , то переход на шаг 6. Иначе на шаг 5.

**Шаг 5.** Для некоторого сегмента  $G_i$ , для которого  $\Gamma(G_i) > 1$ , выбираем произвольную допустимую грань  $\Gamma$ .

**Шаг 6.** Произвольная  $\alpha$ -цепь  $L$  сегмента  $G_i$  помещаем в грань  $\Gamma$ . Полагаем  $G' = G' \cup L$  и переход на шаг 1.

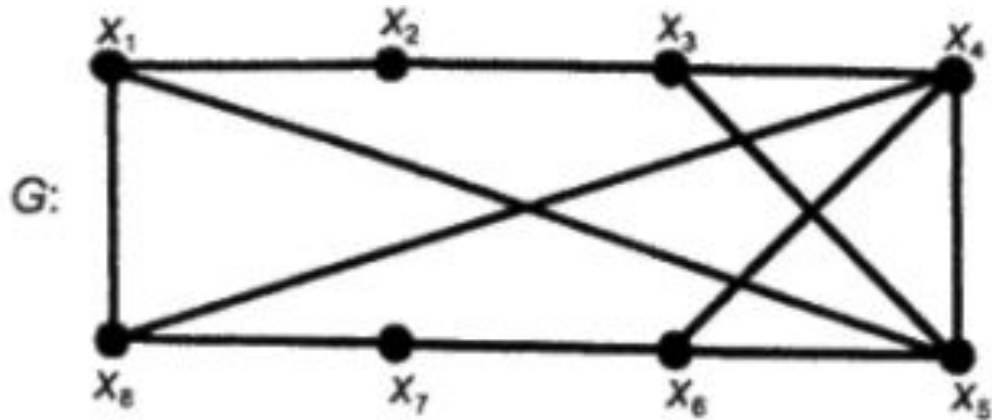
**Шаг 7.** Построена укладка  $G'$  графа  $G$ . Конец алгоритма.

# Замечание

Любой планарный граф можно уложить на сфере, и обратно.

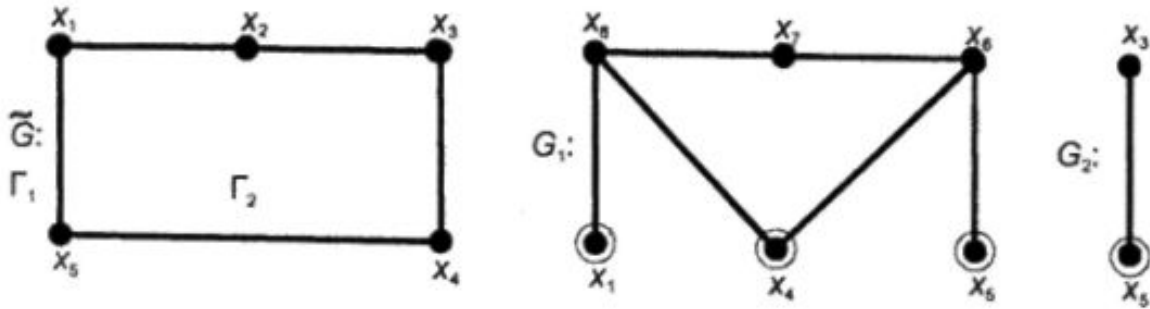
⇒ планарный граф можно уложить на плоскости несколькими способами.

# Пример. Выполнить укладку графа на плоскости



**Шаг 1.** Выберем простой цикл  $C = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , который разбивает плоскость на две грани  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Пусть  $G' = C$ .





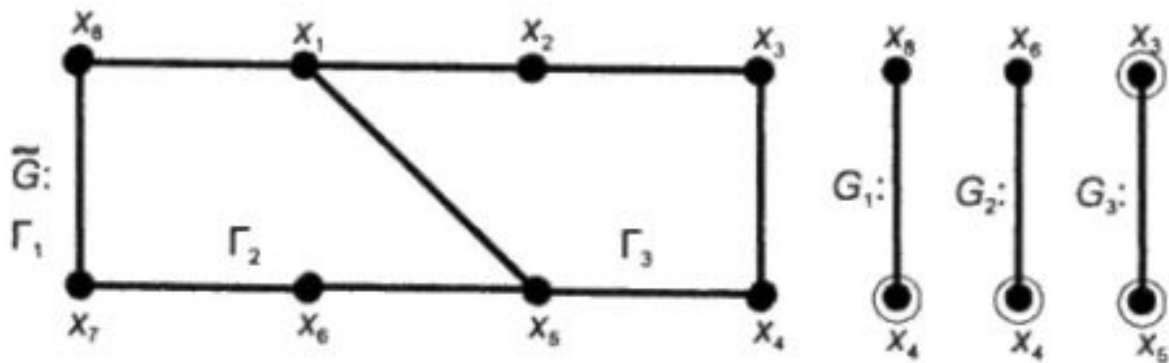
**Шаг 2.** На рисунке показан граф  $G'=C$  и сегменты  $G_1$  и  $G_2$  исходного графа  $G$  относительно  $G'$ . Контактные вершины обведены кружками.

$\Gamma(G_i)=\{\Gamma_1, \Gamma_2\}, i=1, 2.$

**Шаг 3.**  $\Gamma(G_i) \neq \emptyset, i=1, 2.$

**Шаг 4.** Нет сегмента, для которого бы существовала единственная допустимая грань.

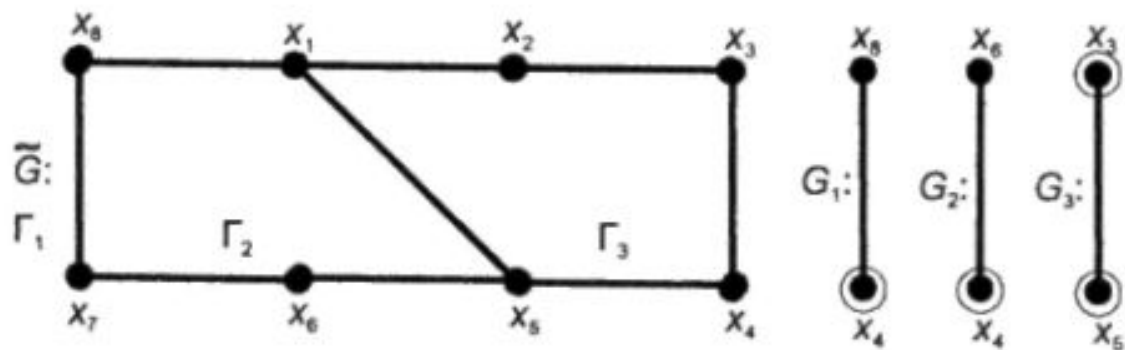
**Шаг 5.** Любую  $\alpha$ -цепь можно уложить в  $\Gamma_1$  или  $\Gamma_2$ . Выберем для укладки грань  $\Gamma_1$ .



**Шаг 6.** Пусть  $L = \{x_1, x_8, x_7, x_6, x_5\}$ .

Поместим эту  $\alpha$ -цепь в  $\Gamma_1$ .  
 Возникает новый граф  $G'$  и его сегменты  $G_1', G_2', G_3'$ .  
 появляется новая грань  $\Gamma_3$ .

Переходим к шагу 1

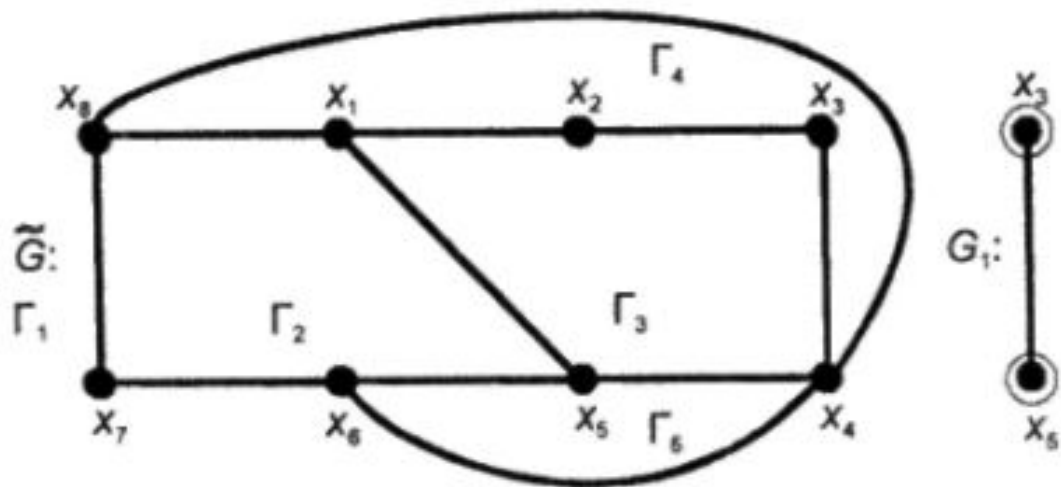


**Шаг 1.** Имеем новые сегменты  $G_1, G_2, G_3$ .

**Шаг 2.**  $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_1\}$ ,  $\Gamma(G_2) = \{\Gamma_1\}$ ,  
 $\Gamma(G_3) = \{\Gamma_1, \Gamma_3\}$

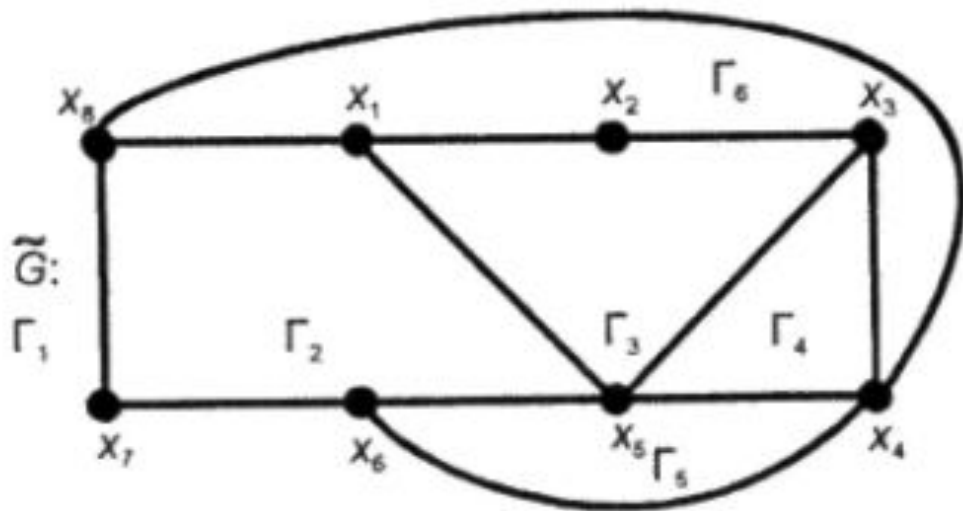
**Шаг 3.**  $\Gamma(G_i) \neq \emptyset$ ,  $i=1, 2, 3$ .

**Шаг 4.**  $\Gamma(G_1) = \Gamma(G_2) = \{\Gamma_1\}$ .  
 Переход на шаг 6.



**Шаг 6.**  $\alpha$ -цепь  $L_1 = \{x_4, x_8\}$   
 поместим в грань  $\Gamma_1$ ,  $\alpha$ -цепь  
 $L_2 = \{x_4, x_6\}$  также поместим в эту  
 грань.

В результате возникает новый  
 граф  $G'$ . Он имеет пять граней  
 и один сегмент.



**Шаг 1.**  $G_1$  – ребро  $(x_3, x_5)$ .

**Шаг 2.**  $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_3\}$

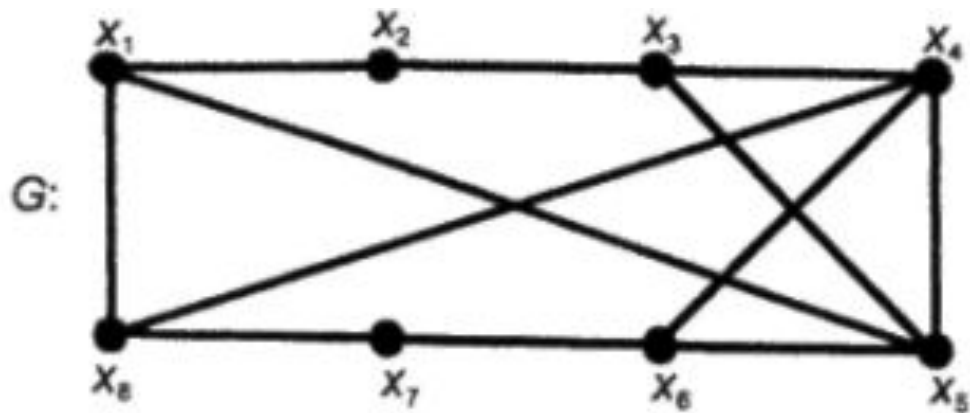
**Шаг 3.**  $\Gamma(G_1) \neq \emptyset$

**Шаг 4.**  $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_3\}$ , переход на шаг 6

**Шаг 6.**  $\alpha$ -цепь  $L_1 = \{x_3, x_5\}$  поместим в грань  $\Gamma_3$ . Новый граф  $G'$  является плоской укладкой исходного планарного графа.

# Сравним

Исходный планарный граф



Уложенный на плоскости граф

