Задачи укладки графов

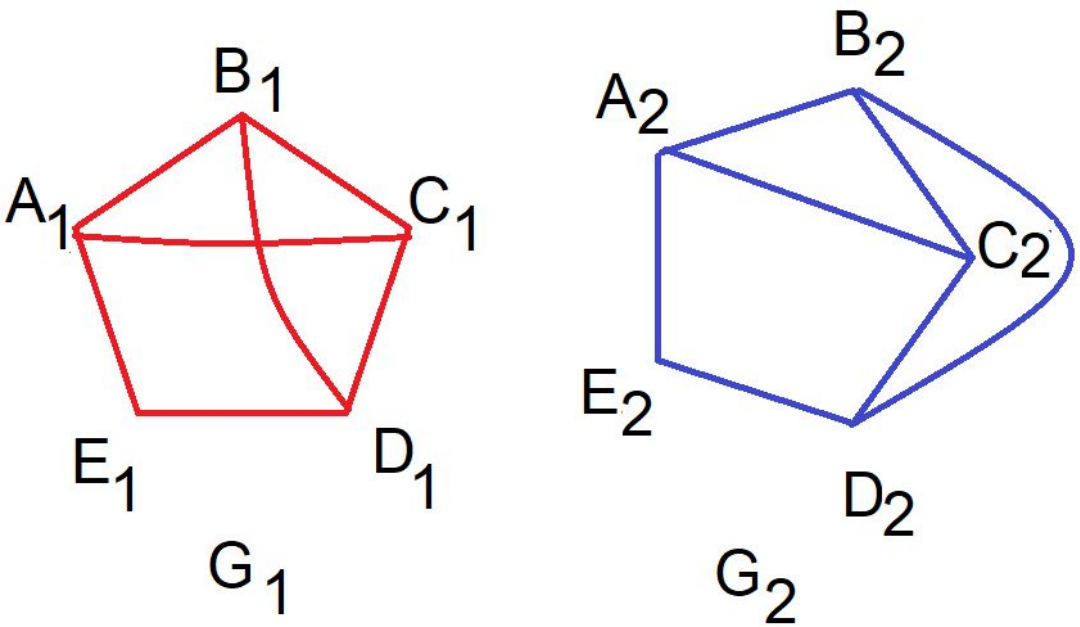
1. Планарность графов

2. Укладка графа на плоскости

Планарность графов

Один и тот же граф возможно изобразить различными способами (с точностью до изоморфизма). При этом большое значение уделяется вопросам планарности.

Примеры: 1) при изготовлении электронных микросхем необходимо выяснить, можно ли схему устройства изобразить на плоскости без пересечений проводников; 2) при проектировании транспортных путей возможно избежать нежелательных перекрестков и т.д.



G1 – планарный граф,

G2 – его плоская укладка

Граф G_1 называется ***планарным***, если существует изоморфный ему граф G_2, в изображении которого на плоскости ребра пересекаются только в вершинах.

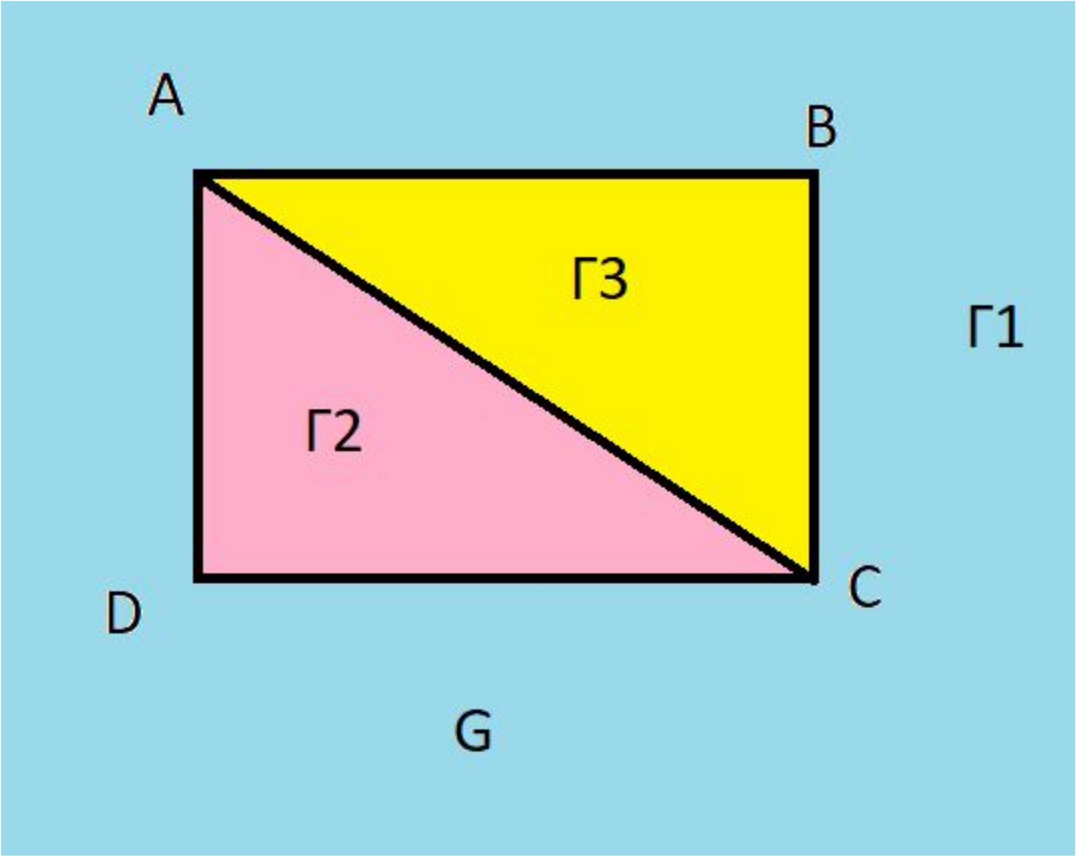
Все планарные графы укладываются на плоскости, т.е. имеют плоскую укладку.

Теорема 1. Любая часть (подграф) планарного графа есть планарный граф.

Теорема 2. Граф планарен тогда и только тогда, когда каждая связная компонента этого графа – планарный граф

Гранью планарного графа называется множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена плоской кривой, не пересекающей ребер этого графа.

Границей грани называется множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани



Граф G имеет три грани: Г1, Г2, Г3

Неограниченная грань Г1 – внешняя

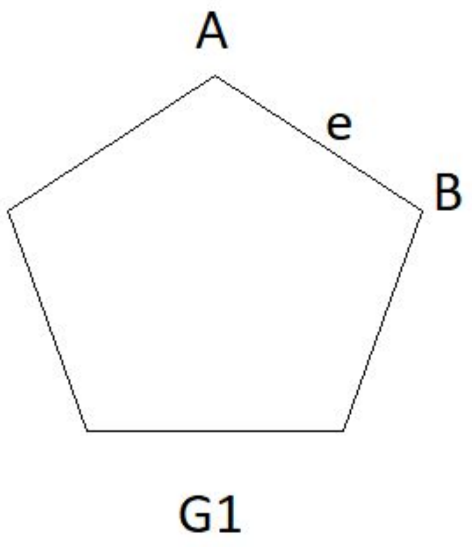
Ограниченные грани Г2 и Г3 – внутренние

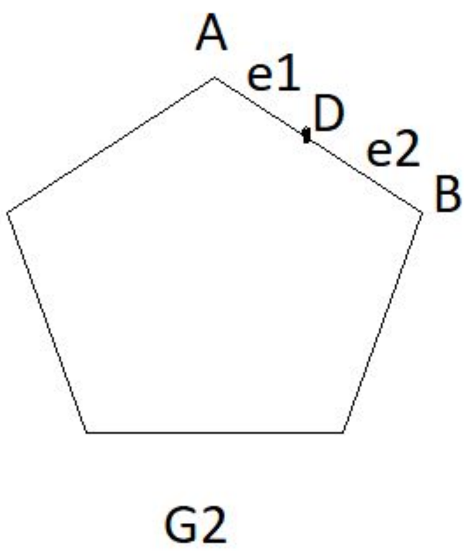
Пусть n, m, f - число вершин, ребер и граней планарного графа соответственно

Теорема Эйлера

Для всякого связного планарного графа верно равенство:

$n – m + f = 2$





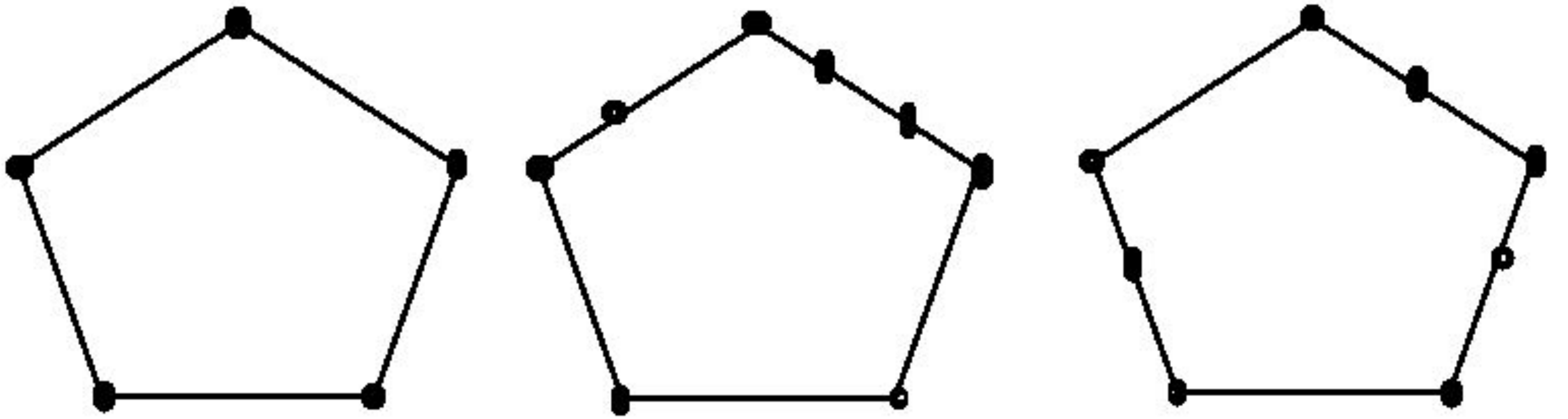
Рассмотрим операцию **подразбиения** ребра в графе.

Операция **подразбиения** ребра , образованного парой вершин **A** и **B**, состоит в удалении ребра **e** и добавлении двух новых ребер **e1** и **e2**, отвечающих парам вершин **A**, **D** и **B**, **D** соответственно.

Здесь **D** - новая (дополнительная) вершина графа.

G1 - граф до операции подразбиения ребра **e**, G2 – граф, получившийся в результате этой операции.

Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер.

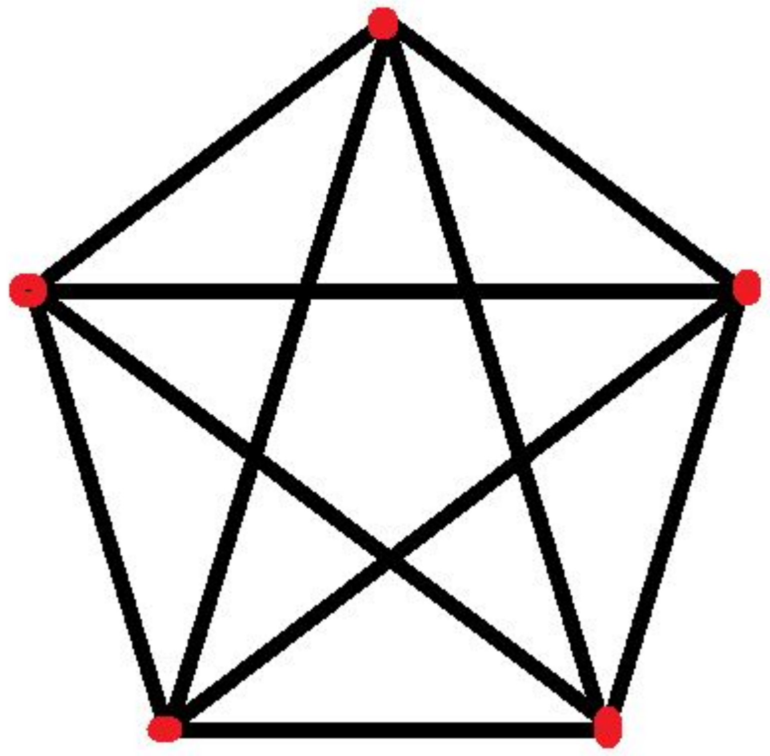


G1　G2　G3

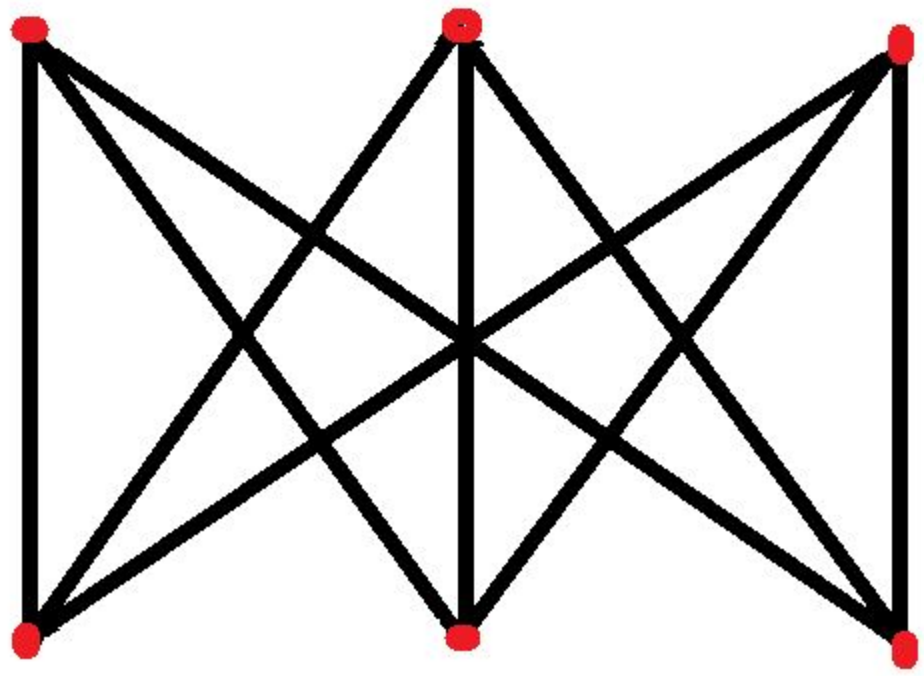
G1 – исходный граф

G2 и G3 гомеоморфные графы, полученные из G1 путем подразбиения ребер G1

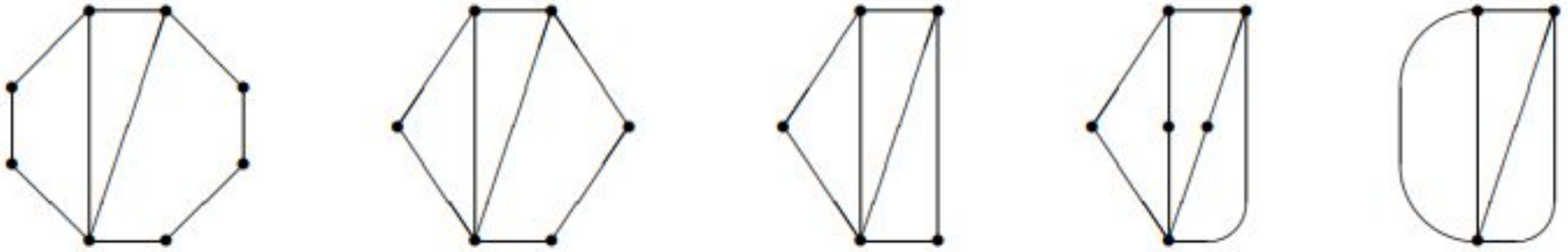
Граф $К_5$ – полный граф с 5 вершинами



Граф $К_{3,3}$ – «домики и колодцы»



Примеры гомеоморфных графов



Вопрос о распознавании планарности графа являлся в свое время серьезной математической проблемой, которую на сегодняшний день удалось решить.

Некоторые критерии планарности графов

Теорема Понтрягина-Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Теорема

Граф планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, стягиваемых (т.е. получаемых последовательностью отождествлений вершин, связанных ребрами) к графам K_5 или $K_{3,3}$.

Для непланарных графов вводятся характеристики, представляющие ту или иную меру непланарности.

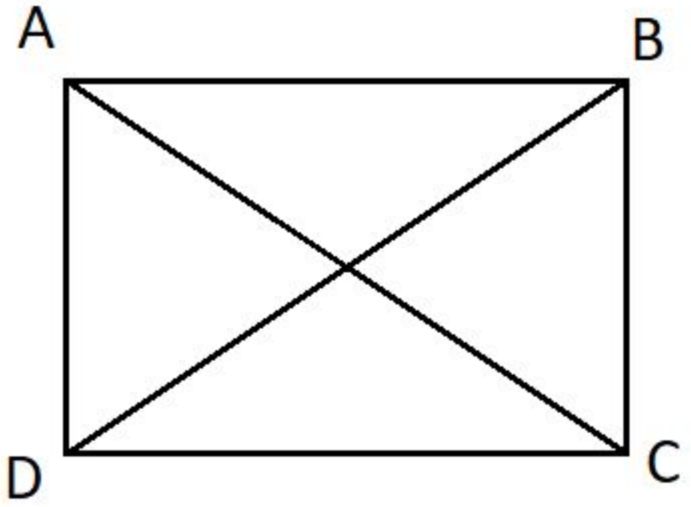
Если граф непланарен, то для его геометрической реализации удаляют отдельные ребра – переносят их на другую плоскость.

Наименьшее число ребер, удаление которых приводит к планарному графу, называется **числом планарности** или **искаженностью** графа G и обозначается sk(G)

Для числа планарности полного графа справедлива следующая формула:

$$sk(G) = C_n^2 - 3n + 6$$

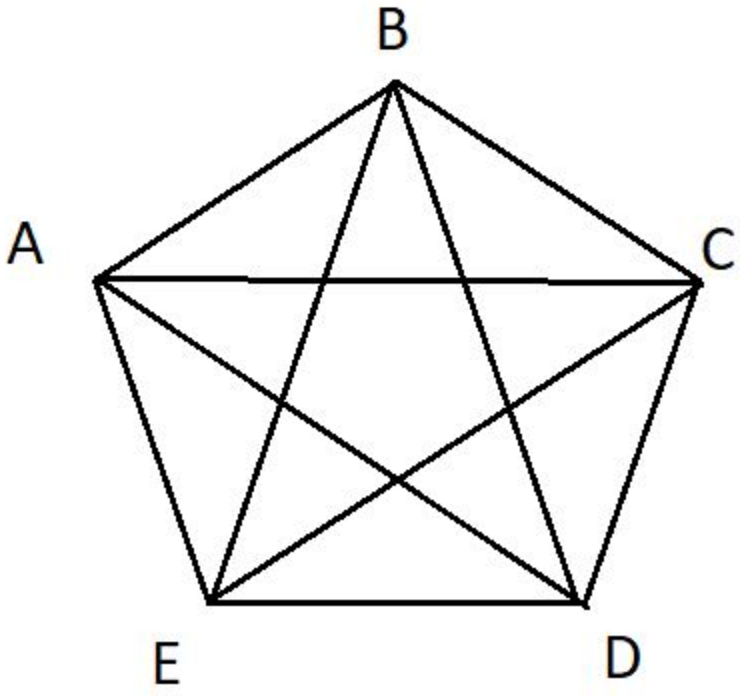
n≥3



n=4

G – полный граф, является планарным

$$sk(G) = C_4^2 - 3 \cdot 4 + 6 = 0$$



N=5

G – полный граф, не является планарным

$$sk(G) = C_5^2 - 3 \cdot 5 + 6 = 10 - 15 + 6 = 1$$

Примеры из практики. В электротехнике части цепей наносятся на одну сторону непроводящей пластины (печатная плата). Поскольку проводники не изолированы, они не могут пересекаться, и соответствующие графы должны быть планарными.

Требуется знать, сколько печатных плат понадобится для формирования всей сети.

С этой целью вводится понятие толщины графа.

Толщина графа $t(G)$ – наименьшее число планарных графов, наложение которых дает G.

Толщина графа является мерой его «непланарности».

Например, толщина планарного графа равна единице, поскольку его можно разместить на одной плоскости.

$t(K_5)=2$ и $t(K_{3,3})=2$

Оценку снизу для толщины графа можно получить по теореме Эйлера.

Это довольно грубая оценка.

Однако часто оказывается истинным значением толщины графа.

Обозначения:

[x] – наибольшее целое число, не превосходящее x,

{x} – наименьшее целое число, не превосходящее x

Теорема о нижней границе толщины графа

Толщина t(G) графа G удовлетворяет следующим неравенствам:

$$t(G) \geq \left\{ \frac{m}{3n-6} \right\} \qquad\qquad t(G) \geq \left[\frac{m+3n-7}{3n-6} \right]$$

n – количество вершин, m – количество ребер графа G

2. Укладка графа на плоскости

Критерии планарности не всегда просты в практическом применении. Также они не дают информации о том, как выполнить укладку планарного графа на плоскости.

Рассмотрим некоторые алгоритмы проверки планарности графа и построения его плоской укладки.

Алгоритм представляет собой процесс последовательного присоединения к некоторому уложенному подграфу G’ графа G новой цепи L, оба конца которой принадлежат G.

Затем в качестве подграфа G’ выбирается любой простой цикл графа G, и процесс присоединения новых цепей продолжается до тех пор, пока не будет построен плоский граф, изоморфный G.

Либо присоединение новой простой цепи на некотором этапе окажется невозможным. Что будет свидетельствовать о непланарности исходного графа G.

Пусть имеется некоторая плоская укладка подграфа **G’ = (V’, E’)** графа **G = (V, E)**.

Сегментом G_i относительно **G’** называется подграф графа **G** следующих двух видов:

1) ребро **e = (u, v)** такое, что **e** $\notin$**E’** , **u, v** $\in$ **V’**;
2) Связная компонента графа **G \ G’** , дополненная всеми ребрами графа **G**, соединяющими эту компоненту с подграфом **G’**, и концами этих ребер.

Вершина **u** сегмента $\mathbf{G_i}$ называется **контактной**, если $\mathbf{u \in V'}$

Граф G' – плоский, значит, он разбивает плоскость на грани. **Допустимой гранью для сегмента** $\mathbf{G_i}$ **относительно G'** называется грань **Г** графа **G'**, содержащая все контактные вершины сегмента $\mathbf{G_i}$

Обозначим через **$\Gamma(G_i)$** множество допустимых граней для **G_i** .

Для непланарных графов может быть **$\Gamma(G_i) = \varnothing$**.

Рассмотрим простую цепь **L** сегмента **G_i**, соединяющую две контактные вершины этого сегменты и не содержащую других контактных вершин.

Такие цепи называются **α-цепями**.

Всякая α-цепь может быть уложена в любую грань, допустимую для данного сегмента.

Два сегмента **Gi** и **Gj** называются **конфликтующими**, если:

1) $\boldsymbol{\theta} = \Gamma(G_i) \cap \Gamma(G_j) \neq \varnothing$;
2) существуют две **α**-цепи $L_i \in G_i$ и $L_j \in G_j$, которые нельзя уложить без пересечений одновременно ни в какую грань $\Gamma \in \boldsymbol{\theta}$.

Пусть **G’** – плоская укладка некоторого подграфа графа **G**.

Для каждого сегмента $\mathbf{G_i}$ относительно **G’** находим множество допустимых граней.

Тогда возможны следующие случаи:

А) существует сегмент $\mathbf{G_i}$, для которого $\mathbf{\Gamma(G_i) = \varnothing}$, тогда исходный граф **G** непланарен;

Б) для некоторого сегмента $\mathbf{G_i}$ существует единственная допустимая грань **Г**, тогда располагаем любую **α**-цепь сегмента $\mathbf{G_i}$ в грани **Г**, при этом грань **Г** разобьется на две грани;

В) $\mathbf{\Gamma(G_i) \geq 2}$ для всех $\mathbf{G_i}$, тогда располагаем любую **α**-цепь сегмента $\mathbf{G_i}$ в любой допустимой грани.

Если на очередном шаге множество сегментов пусто, то построена укладка графа на плоскости.

Алгоритм укладки планарного графа на плоскости

Шаг 1. Выбираем любой простой цикл **C** графа **G**. Укладываем этот цикл на плоскости и полагаем **G’ = C**.

Шаг 2. Находим все грани графа **G’** и все сегменты $\mathbf{G_i}$ относительно **G’**. Если множество сегментов пусто, то укладка графа **G** на плоскости построена, конец алгоритма.

Шаг 3. Для каждого сегмента $\mathbf{G_i}$ определяем множество допустимых граней $\mathbf{\Gamma(G_i)}$. Если найдется сегмент $\mathbf{G_i}$, для которого $\mathbf{\Gamma(G_i) = \varnothing}$**,** то исходный граф непланарен, конец алгоритма. Иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Если существует сегмент **G_i**, для которого имеется единственная допустимая грань **С**, то переход на шаг 6. Иначе на шаг 5.

Шаг 5. Для некоторого сегмента **G_i** , для которого **$Г(G_i)>1$**, выбираем произвольную допустимую грань **Г**.

Шаг 6. Произвольная **α**-цепь **L** сегмента **G_i** помещаем в грань **Г**. Полагаем **G' = G' ∪ L** и переход на шаг 1.

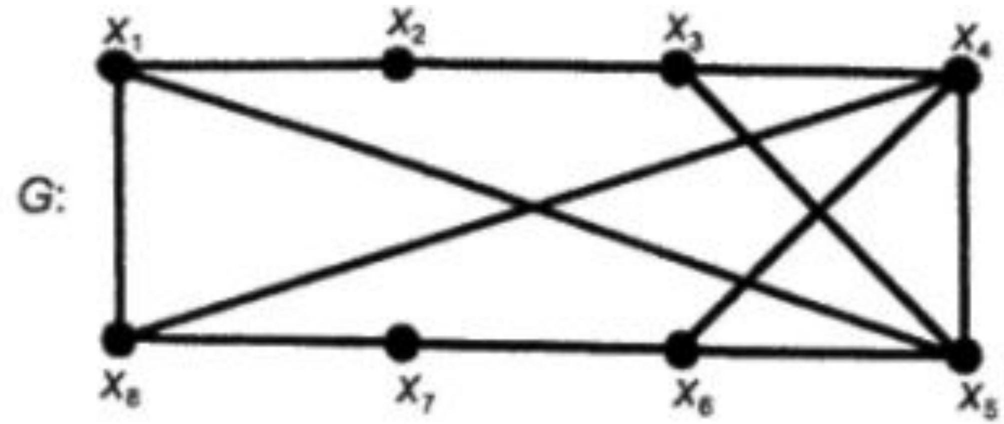
Шаг 7. Построена укладка **G'** графа **G**. Конец алгоритма.

Замечание

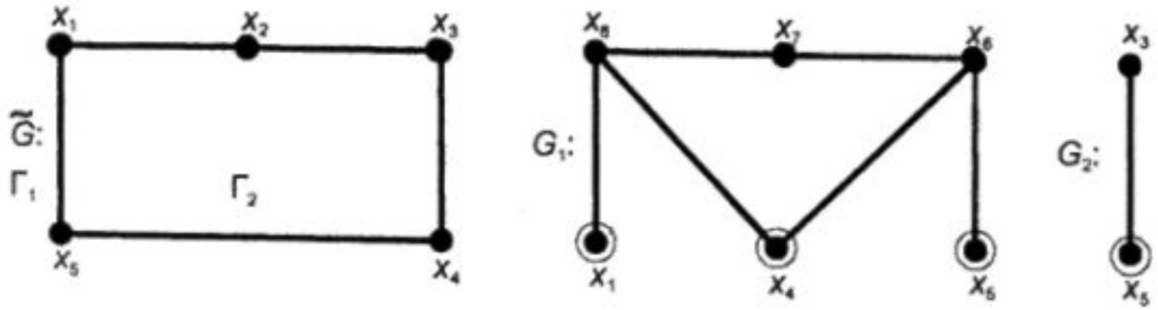
Любой планарный граф можно уложить на сфере, и обратно.

⇒ планарный граф можно уложить на плоскости несколькими способами.

Пример. Выполнить укладку графа на плоскости



Шаг 1. Выберем простой цикл **C={x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}**, который разбивает плоскость на две грани **$Г_1$** и **$Г_2$**. Пусть **G'=C**.



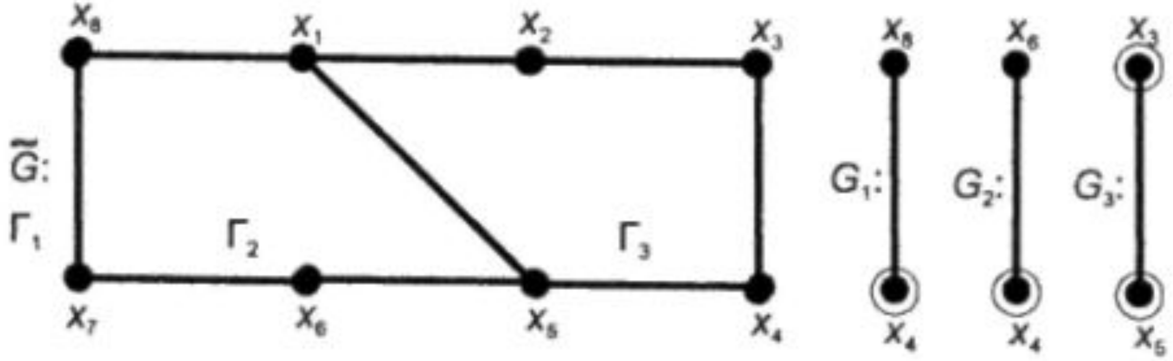
Шаг 2. На рисунке показан граф **$G'=C$** и сегменты **G_1** и **G_2** исходного графа $\tilde{G}$ относительно **G'**. Контактные вершины обведены кружками.

$Г(G_i)=\{Г_1, Г_2\}$, $i=1, 2$.

Шаг 3. $Г(Gi)\neq\varnothing$, $i=1, 2$.

Шаг 4. Нет сегмента, для которого бы существовала единственная допустимая грань.

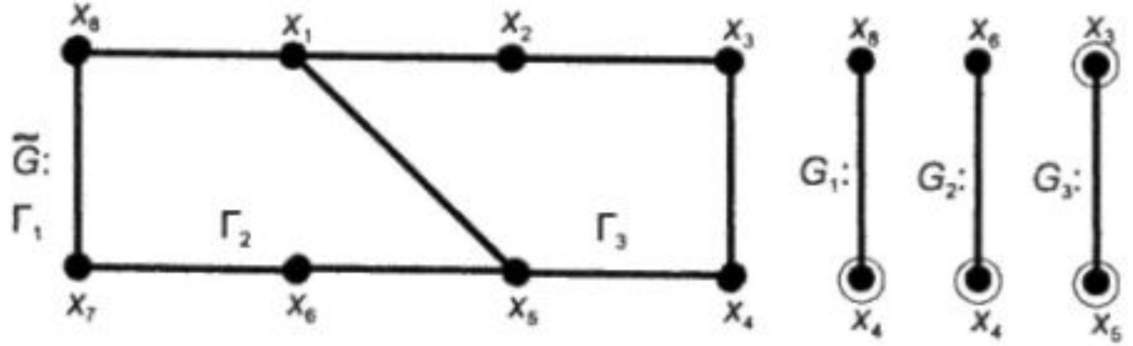
Шаг 5. Любую **α**-цепь можно уложить в **Г1** или **Г2**. Выберем для укладки грань **Г1**.



Шаг 6. Пусть **L={x_1, x_8, x_7, x_6, x_5}**.

Поместим эту **α**-цепь в **$Г_1$**. Возникает новый граф **G’** и его сегменты **G_1**, **G_2**, **G_3**. появляется новая грань **$Г_3$**.

Переходим к шагу 1

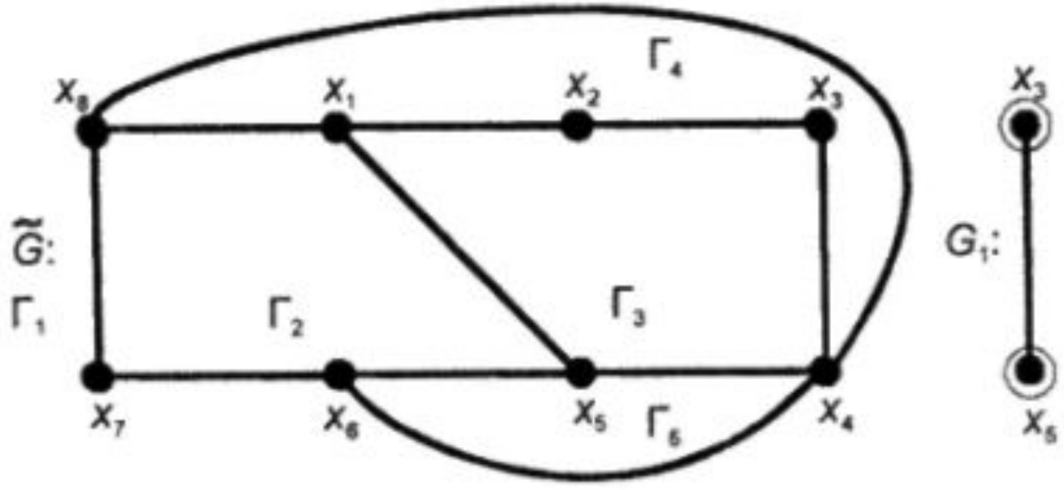


Шаг 1. Имеем новые сегменты $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$, $\mathbf{G_3}$.

Шаг 2. $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_1\}$, $\Gamma(G_2)=\{\Gamma_1\}$, $\Gamma(G_3)=\{\Gamma_1, \Gamma_3\}$

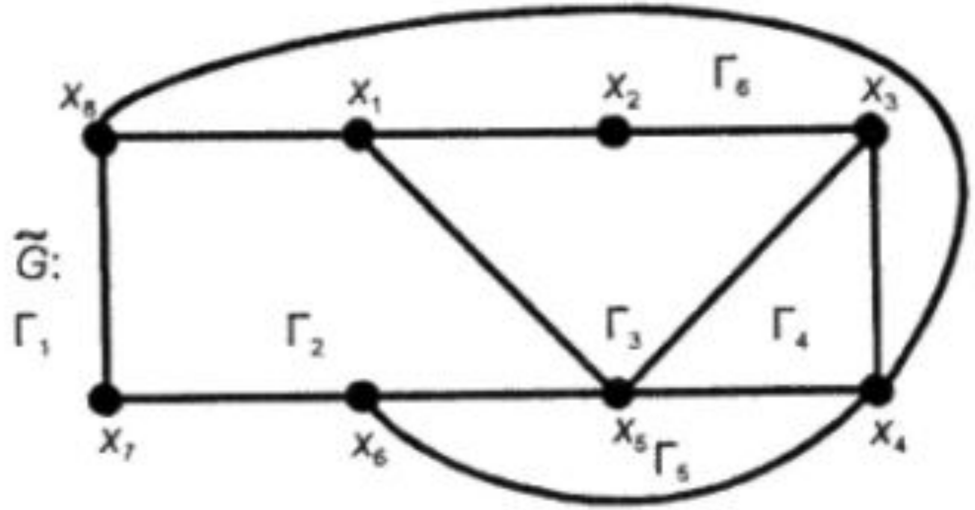
Шаг 3. $\Gamma(G_i)\neq\varnothing$, i=1, 2, 3.

Шаг 4. $\Gamma(G_1) = \Gamma(G_2)=\{\Gamma_1\}$. Переход на шаг 6.



Шаг 6. α-цепь $L_1=\{x_4, x_8\}$ поместим в грань Γ_1, α-цепь $L_2=\{x_4, x_6\}$ также поместим в эту грань.

В результате возникает новый граф G'. Он имеет пять граней и один сегмент.



Шаг 1. G_1 – ребро (x_3, x_5).

Шаг 2. $\Gamma(G_1)=\{\Gamma_3\}$

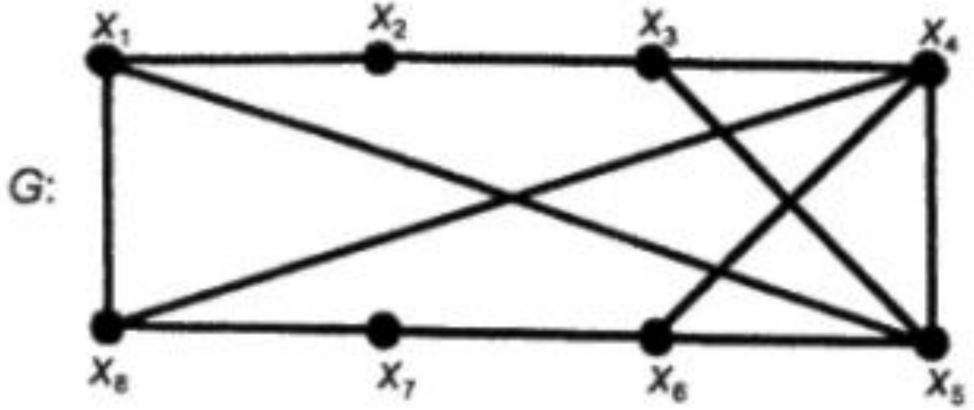
Шаг 3. $\Gamma(G_1)\neq\varnothing$

Шаг 4. $\Gamma(G_1)=\{\Gamma_3\}$, переход на шаг 6

Шаг 6. α-цепь $L_1=\{x_3, x_5\}$ поместим в грань Γ_3. Новый граф G’ является плоской укладкой исходного планарного графа.

Сравним

Исходный планарный граф



Уложенный на плоскости граф