



Электричество и магнетизм

Лекция 09

Магнитное поле

27 октября 2021 года

Лектор: доцент НИЯУ МИФИ,
Ольчак Андрей Станиславович



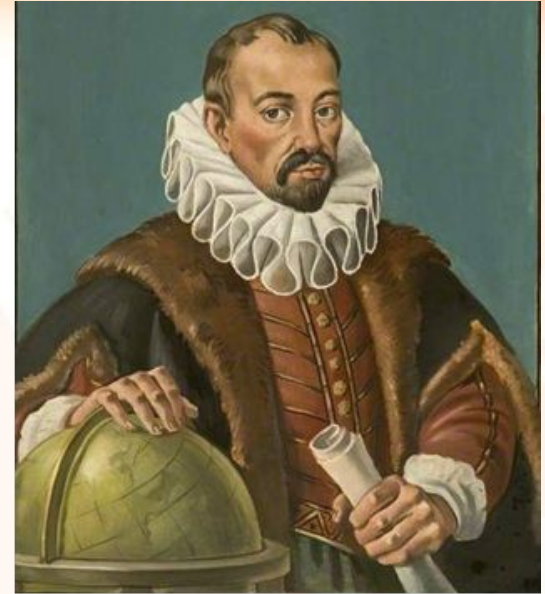
Магнетит (*от античного города Магнесия в Малой Азии*) Fe_3O_4 – природный минерал с сильными магнитными свойствами (притягивает и намагничивает железные предметы)



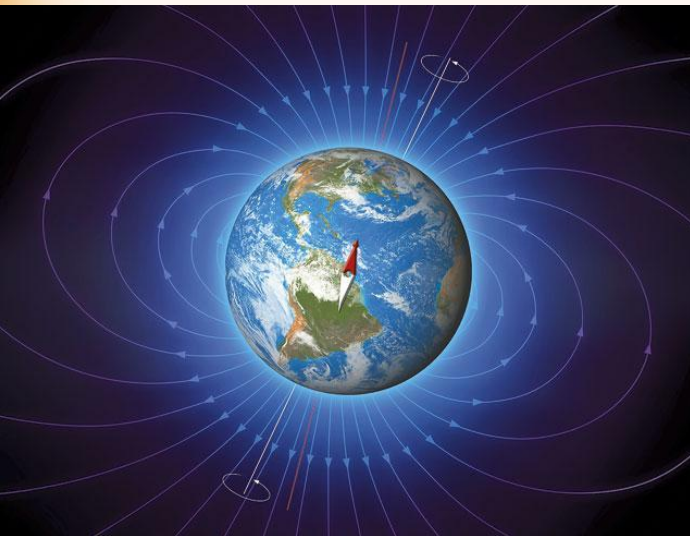
Китайский магнитный компас

Первое серьезное исследование электрических и магнитных явлений выполнил William Gilbert (1544-1603) в Англии. В 1600 году он опубликовал 6-томный трактат «*О магните, магнитных телах и большом магните — Земле*») Именно он ввел термин *electricity*.

Труд Гилберта практически использовали в изучении электрических и магнитных явлений вплоть до конца 18-го века!!.



Магнитное поле Земли имеет дипольный характер и вблизи поверхности Земли имеет напряженность $H \sim 40 \text{ А/м}$ ($B \sim 0,25 \text{ мТл}$).



Опыт Эрстеда



Эрстед впервые доказал в 1820 г., что электрический ток является источником магнитного поля.

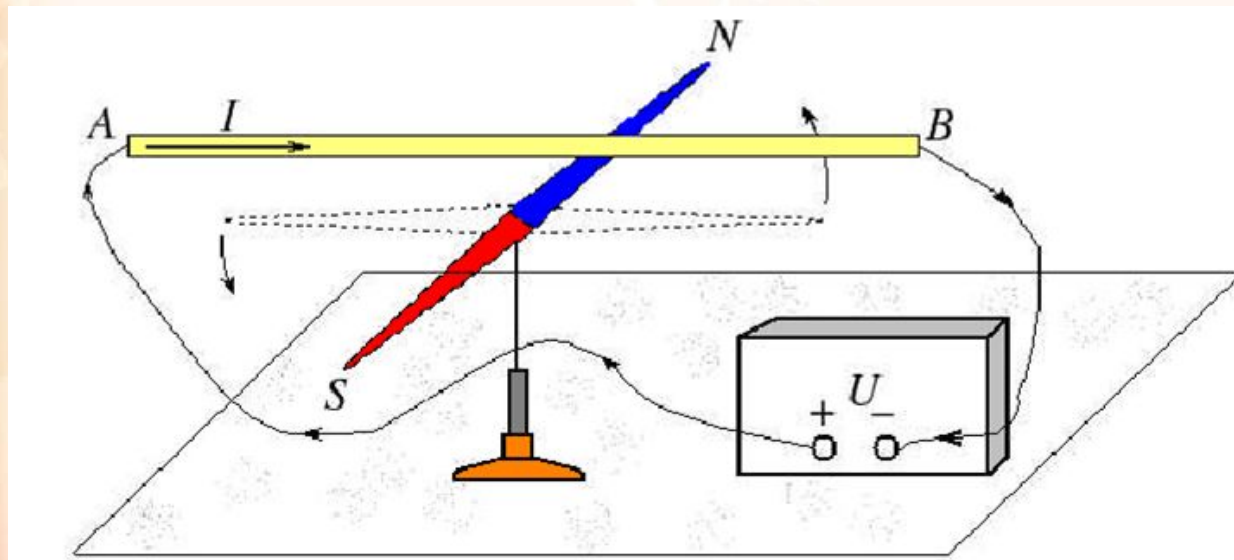


Схема опыта Эрстеда.





Свойства магнитного поля



Опыт показывает, что

- (1) Магнитное поле создаётся движущимися электрическими зарядами (электротоком);
- (2) Магнитное поле действует только на движущиеся заряды (на проводники с током)
- (3) В природе не существует магнитных зарядов

Основная характеристика магнитного поля – вектор магнитной индукции \vec{B} Единица измерения магнитной индукции – Тл (тесла).

Другая характеристика магнитного поля – вектор напряженности магнитного поля \vec{H} . В вакууме $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

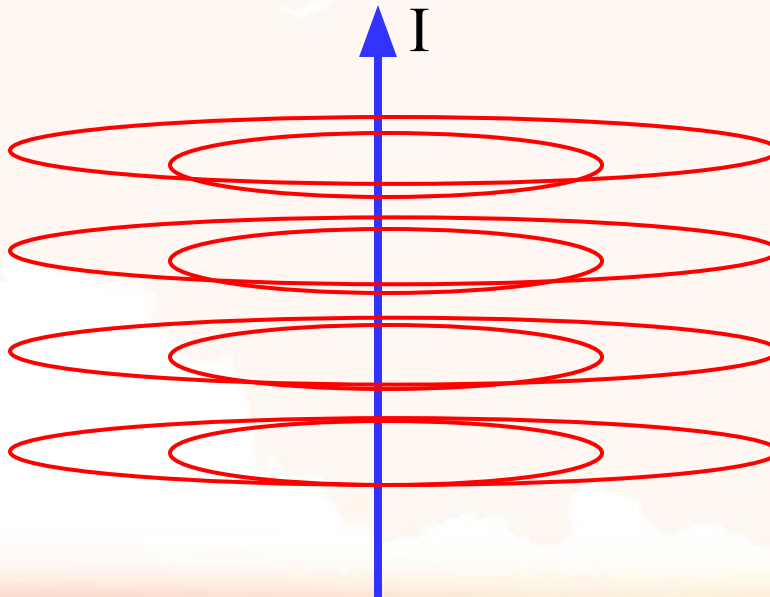
Единица измерения \vec{H} – А/м.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ – магнитная постоянная



Линии индукции - способ визуализации магнитного поля. Подобно силовым линиям электростатического поля, линии индукции в каждой точке направлены вдоль вектора магнитной индукции в данной точке. Густота линий пропорциональна величине магнитной индукции

Для прямого тока: линии индукции = окружности. Направление линий – условно (правило «буравчика» или «правого винта»)

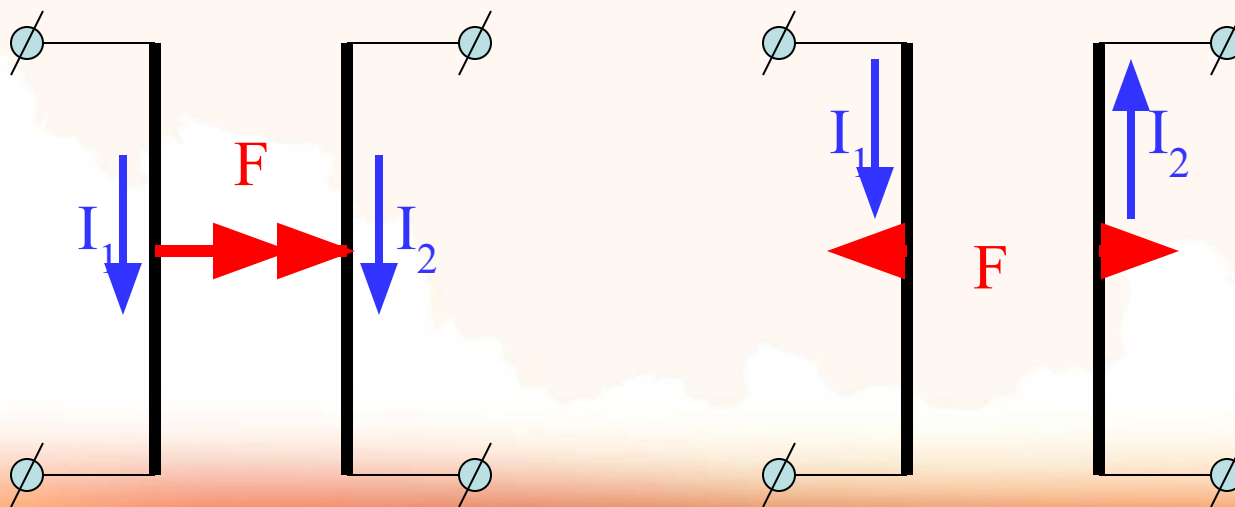




Магнитное поле: физическая реальность, возникающая при движении электрических зарядов (в частности - при протекании электрического тока).

Магнитное поле проявляет себя по действию на движущиеся заряды и проводники с током

В частности: два параллельных проводника с током притягиваются, если токи в проводниках направлены в одну сторону, или отталкиваются, если токи направлены в противоположные стороны.





Магнитное поле

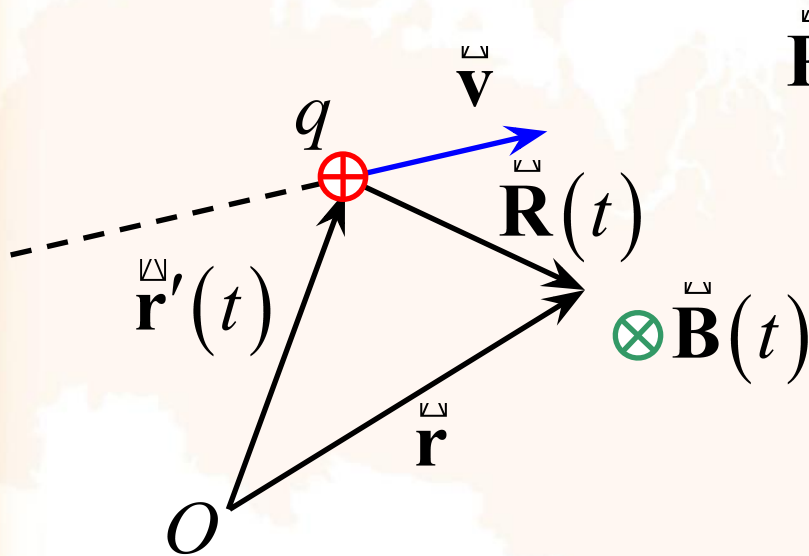


(1) Магнитное поле создаётся движущимися электрическими зарядами:

Закон Био – Савара – Лапласа



Магнитное поле равномерно движущегося заряда



$$\vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{r}'(t)$$

Опыт:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \left[\vec{v}, \vec{R} \right]}{R^3}$$

$$(v \ll c)$$

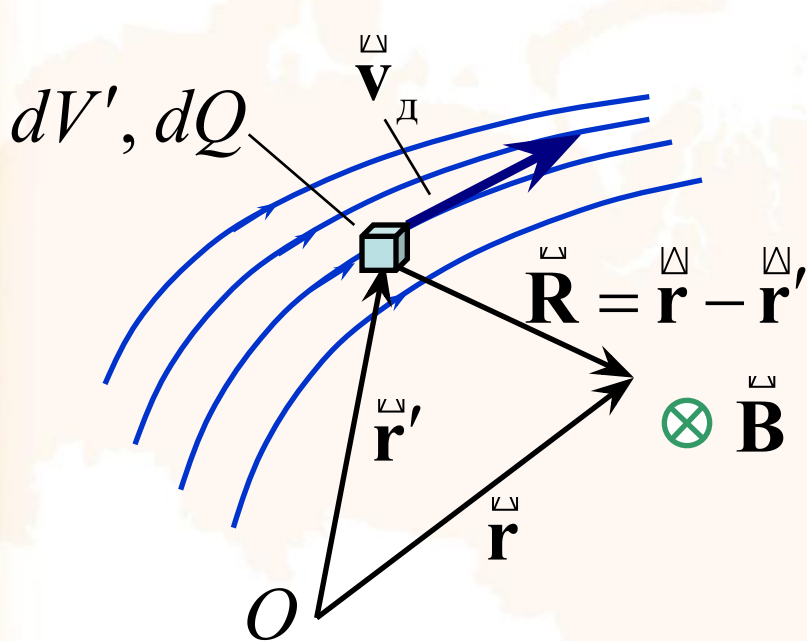
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

- магнитная постоянная

$$\text{Гн} = \text{Н} \cdot \text{м} / \text{А}^2$$



Магнитостатика изучает постоянные, т.е. независящие от времени магнитные поля, создаваемые постоянными токами.



$$dQ = qn dV' \quad \vec{j} = qn \vec{v}_d$$

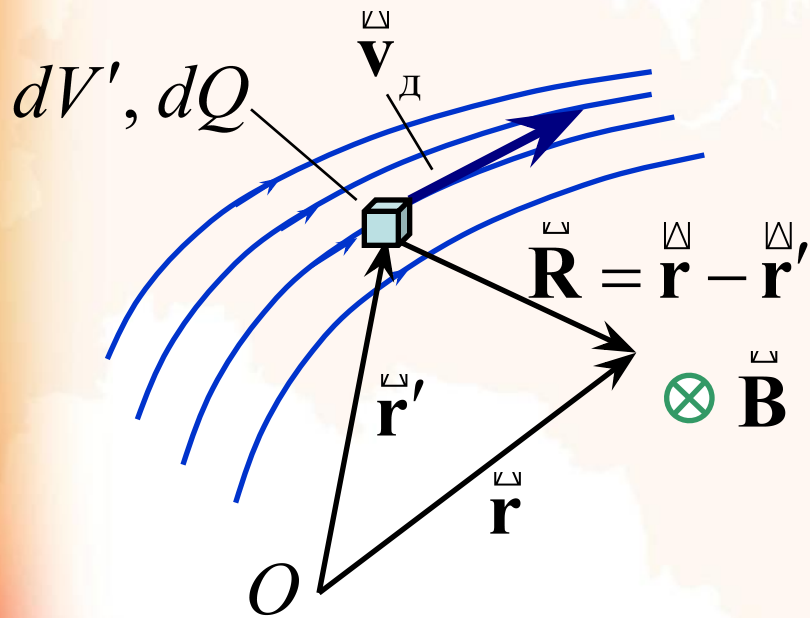
$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dQ [\vec{v}_d, \vec{R}]}{R^3} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qn [\vec{v}_d, \vec{R}] dV'}{R^3} = \end{aligned}$$



$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[qn\vec{v}_d, \vec{R}]}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} dV'$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

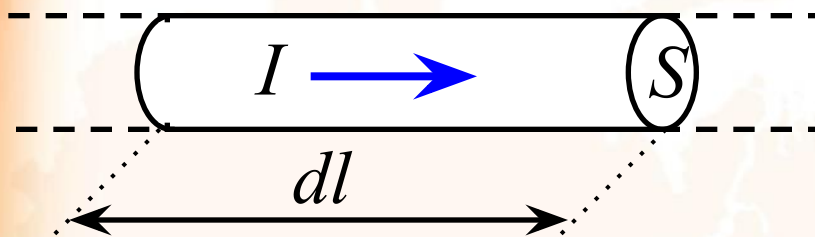


Био – Савар (1820, эксперимент)
Лаплас (1826, теория)

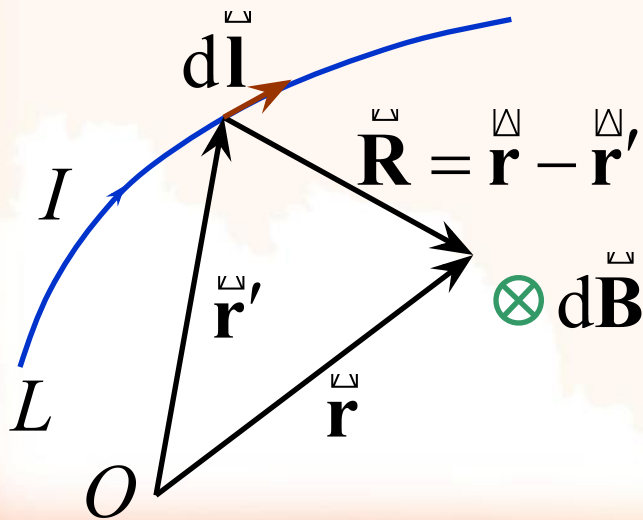
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_{\text{пров}}} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$



Закон Био – Савара для линейного проводника с током

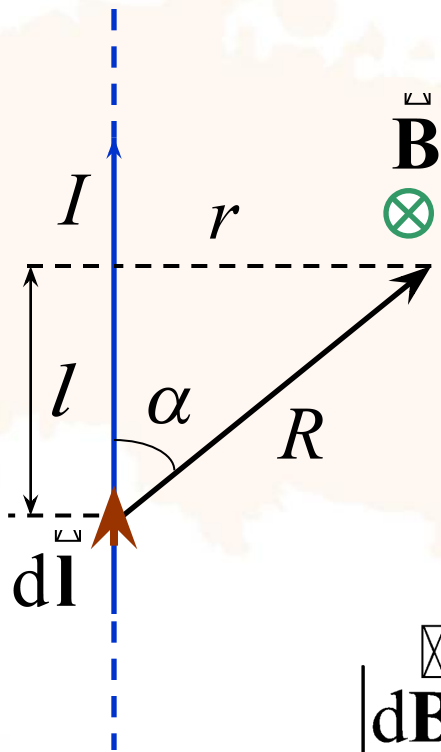


$$\begin{aligned} d\vec{l} \times \vec{j}, \quad |d\vec{l}| = dl, \quad \vec{j} dV' = \vec{j} S dl = \\ = j S d\vec{l} = I d\vec{l} \quad \boxed{\vec{j} dV' = I d\vec{l}} \end{aligned}$$



$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3}}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{r}', \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}$$

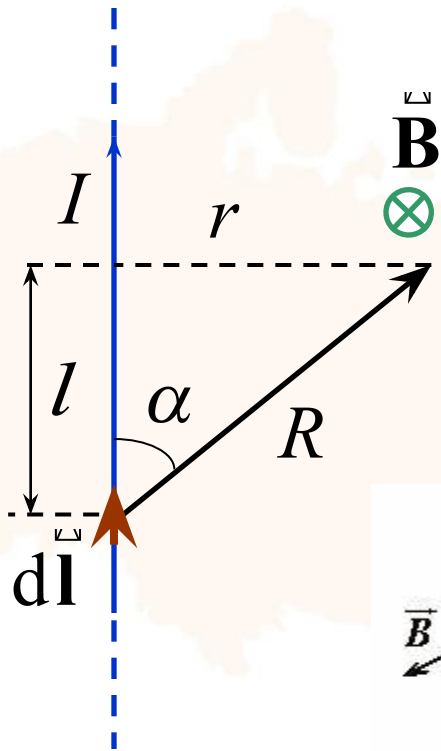


$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [\vec{dl}, \vec{\mathbf{R}}]}{R^3} \Rightarrow \otimes$$

$$|d\vec{\mathbf{B}}| = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi R^2}, \quad \sin \alpha = \frac{r}{R}$$

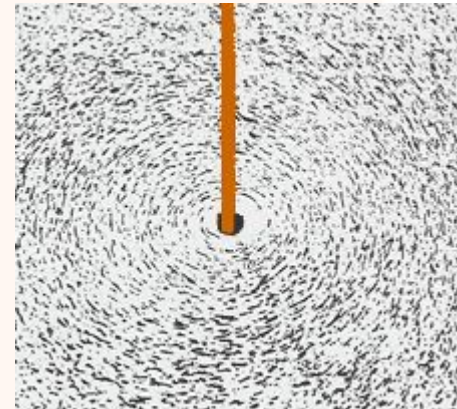
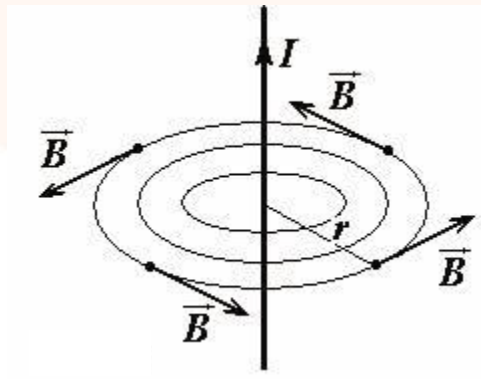
$$R = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad l = r \operatorname{ctg} \alpha, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

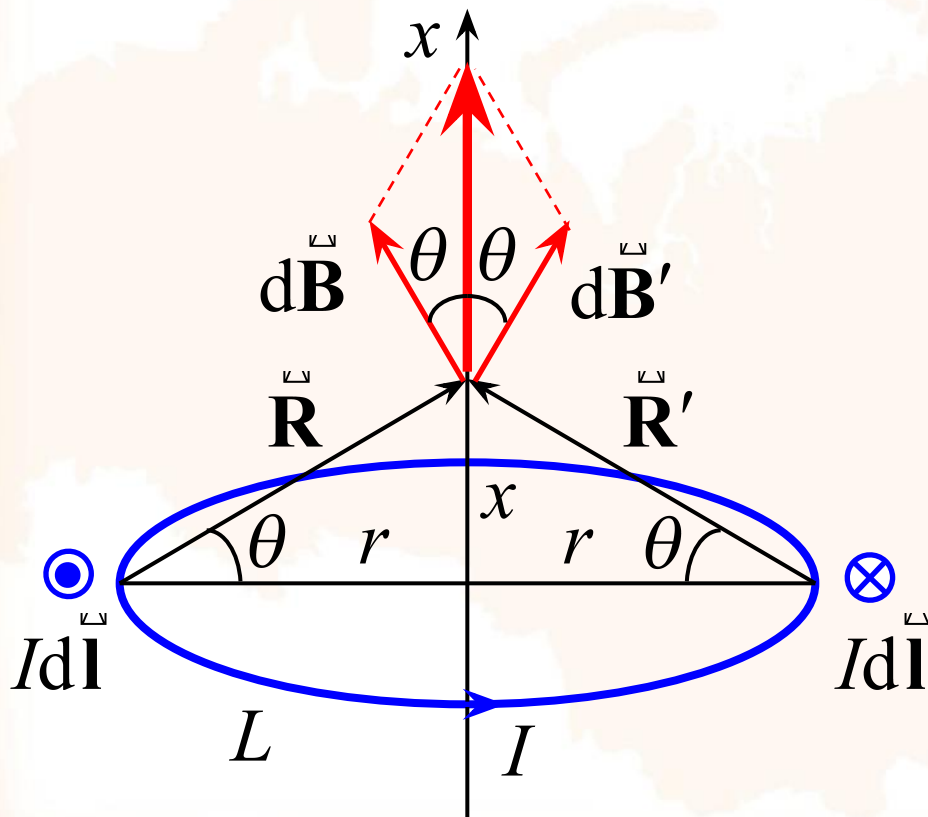
$$|d\vec{\mathbf{B}}| = \frac{\mu_0 I \sin \alpha \sin^2 \alpha}{4\pi r^2} \frac{r d\alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sin \alpha d\alpha$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-\cos \alpha) \Big|_0^\pi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$





$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3}$$

$$d\vec{l} \perp \vec{R} \Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I dl \cos \theta}{4\pi R^2},$$

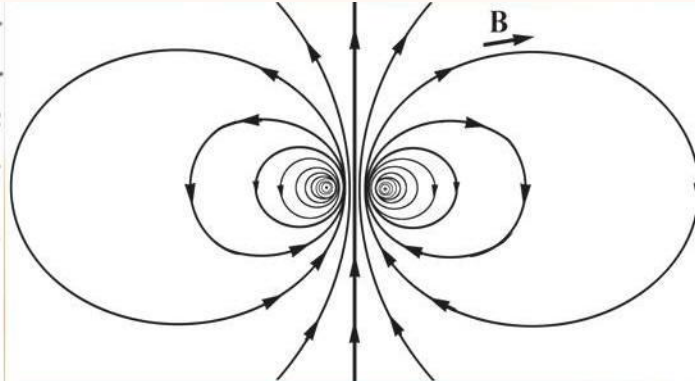
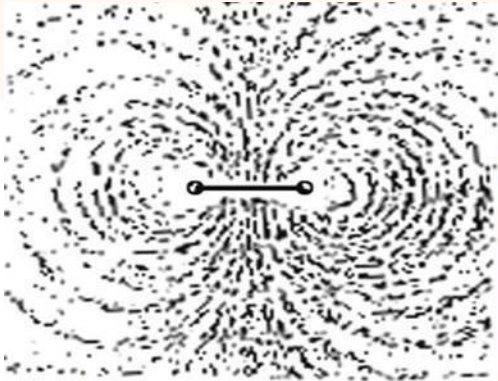
$$\cos \theta = \frac{r}{R}$$



$$B_x = \oint_L dB_x = \frac{\mu_0 I r}{4\pi R^3} \oint_L dl = \frac{\mu_0 I r}{4\pi R^3} 2\pi r = \frac{\mu_0 I r^2}{2R^3}$$

$$R^2 = r^2 + x^2$$

$$B_x(x) = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + x^2)^{3/2}}$$



$$B_x \sim \frac{1}{x^3}$$
$$x \gg r$$



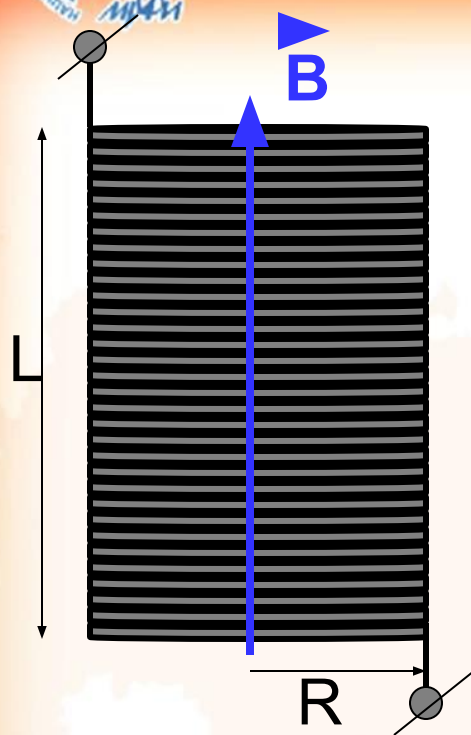
Каждый виток катушки создает в центре соленоида магнитное поле с индукцией:

$$B = (\mu_0/2)I/R$$

Направление вектора магнитной индукции определяется по правилу буравчика.

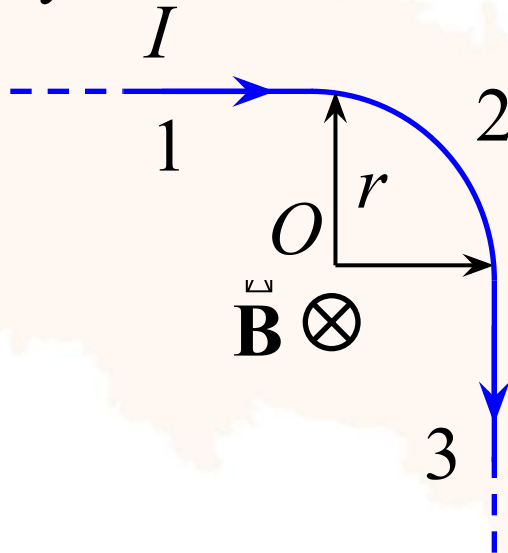
Вся катушка с числом витков N создаст в сердечнике соленоида однородное магнитное поле с индукцией, вычисляемой методом сложения (интегрирования) полей, создаваемых отдельными витками. Если катушка достаточно длинна ($L \gg R$) то результат интегрирования не зависит от R :

$$B = \mu_0 IN/L$$





Пример 1. Постоянный ток I протекает по двум полубесконечным прямым проводникам, соединённым между собой под прямым углом дугой окружности радиуса r . Найти индукцию магнитного поля в центре окружности O .



$$B_1 = B_3 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

$$B_x(x) = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$B_2 = \frac{1}{4} \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 I}{8r} \Rightarrow B = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I (4 + \pi)}{8\pi r}$$



Магнитное поле



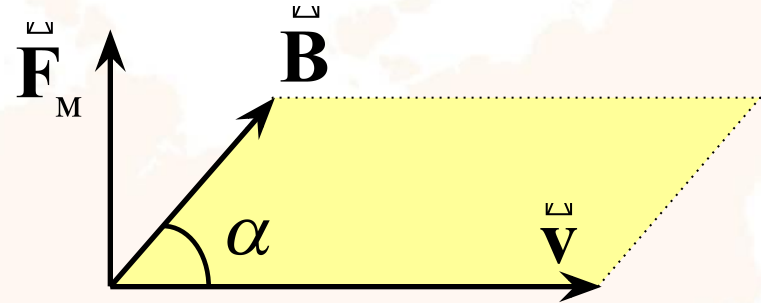
(2) Магнитное поле действует на движущиеся заряды

Сила Лоренца
Закон Ампера

Магнитная сила

$$\vec{\mathbf{F}}_M = q [\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{B}}]$$

$$|\vec{\mathbf{F}}_M| = |q| v B \sin \alpha$$



$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_{\parallel} + \vec{\mathbf{v}}_{\perp}, \quad \vec{\mathbf{v}}_{\parallel} \parallel \vec{\mathbf{B}}, \quad \vec{\mathbf{v}}_{\perp} \perp \vec{\mathbf{B}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{F}}_M = q [\vec{\mathbf{v}}_{\perp}, \vec{\mathbf{B}}]$$

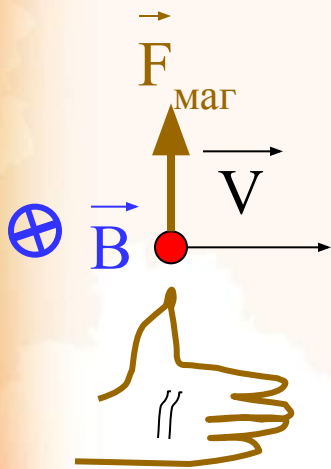
$$[\vec{\mathbf{v}}_{\perp}, \vec{\mathbf{F}}_M] = q [\vec{\mathbf{v}}_{\perp}, [\vec{\mathbf{v}}_{\perp}, \vec{\mathbf{B}}]] = q \left\{ \vec{\mathbf{v}}_{\perp} (\vec{\mathbf{v}}_{\perp}, \vec{\mathbf{B}}) - \vec{\mathbf{B}} v_{\perp}^2 \right\}$$

$$(\vec{\mathbf{v}}_{\perp}, \vec{\mathbf{B}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{B}} = \frac{[\vec{\mathbf{F}}_M, \vec{\mathbf{v}}_{\perp}]}{q v_{\perp}^2}$$

Магнитное поле действует на движущийся заряд q с силой

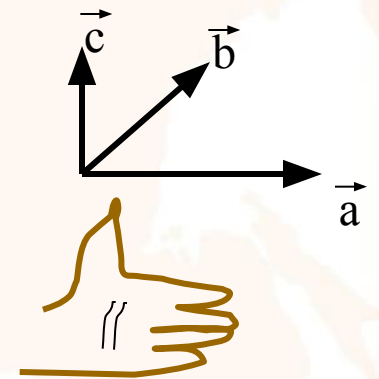
$$\vec{F}_{\text{маг}} = q[\vec{V}, \vec{B}]$$

в направлении, перпендикулярном его скорости \vec{V} и вектору магнитной индукции \vec{B} .



Немного математики:

Векторное произведение $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ направлено перпендикулярно обоим векторам \vec{a} и \vec{b} и равно по величине $c = a b \sin(\alpha)$, где α - угол между векторами \vec{a} и \vec{b} . Направление вектора \vec{c} определяется *правилом левой руки*.

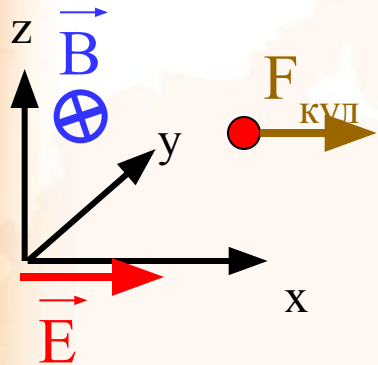


Величина силы действия магнитного поля, соответственно, равна

$F_{\text{маг}} = qVB \sin(\alpha)$, где α - угол между векторами скорости и магнитной индукции.

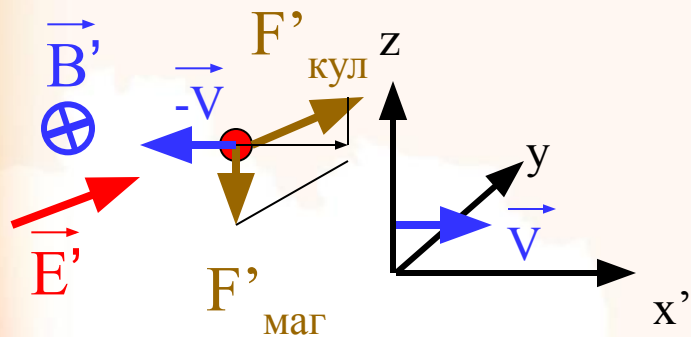


Рассмотрим заряд q , находящийся в скрещенных магнитном и электрическом полях.



В системе отсчета, где заряд неподвижен, на него действует только сила Кулона

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{кул}} = q \vec{E}$$



В системе отсчета, где заряд движется, на него действует и сила Кулона, и сила магнитного поля (**сила Лоренца**)

$$\vec{F} = \vec{F}'_{\text{кул}} + \vec{F}'_{\text{маг}} = q \vec{E}' + q[-\vec{v}, \vec{B}']$$

Следствие: величина и направление векторов напряженности электрического поля и магнитной индукции зависят от выбора системы отсчета.



Сила Лоренца



1. Магнитная сила не совершает работы, её мощность равна нулю, т.к. $\vec{\mathbf{F}}_M \perp \vec{\mathbf{v}}$.
2. В системе единиц СГСМ $\vec{\mathbf{F}}_M = \frac{q}{c} [\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{B}}]$.
3. $\vec{\mathbf{B}}$ является псевдовектором, $\vec{\mathbf{F}}_M$ истинным вектором.

Сила Лоренца

$$\vec{\mathbf{F}}_M = q\vec{\mathbf{E}} + q [\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{B}}]$$

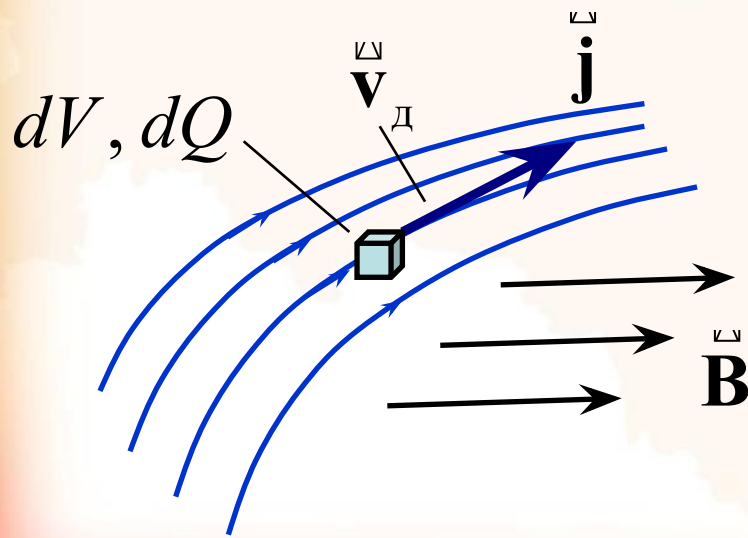
Разделение силы Лоренца на электрическую и магнитную составляющие зависит от системы отсчёта.



Магнитная сила, действующая на проводник с током

$$d\vec{F}_M = dQ \left[\vec{v}_{др} \times \vec{B} \right] \quad dQ = qn dV$$

$$d\vec{F}_M = qn \left[\vec{v}_{др} \times \vec{B} \right] dV = \left[\vec{j} \times \vec{B} \right] dV$$



$$d\vec{F}_A = \left[\vec{j} \times \vec{B} \right] dV$$

$$\vec{F}_A = \int_{V_{пров}} \left[\vec{j} \times \vec{B} \right] dV$$

Закон Ампера для линейного проводника

$$\vec{j}dV = Id\vec{l} \Rightarrow$$

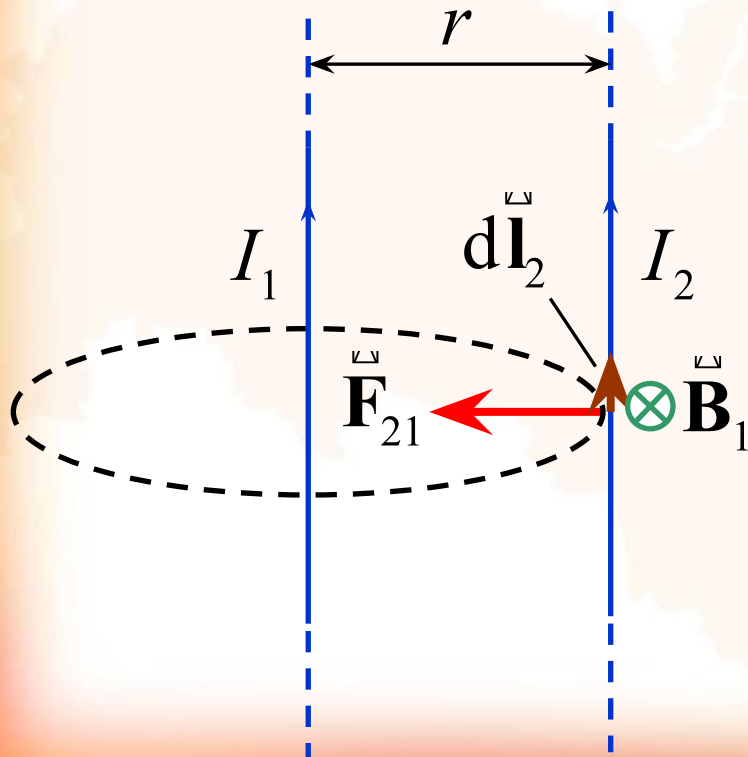
$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l} \times \vec{B}]$$

$$\vec{F}_A = I \int_L [d\vec{l} \times \vec{B}]$$



Андре́-Мари́ Ампе́р
1775-1836

Сила магнитного взаимодействия двух параллельных линейных бесконечных токов в вакууме



$$d\mathbf{F}_{21} = I_2 \left[d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 \right]$$

$$dF_{21} = I_2 dl_2 B_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dF_{21}}{dl_2} = I_2 B_1, \quad B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dF_{21}}{dl_2} = \frac{dF_{12}}{dl_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}}, \quad \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

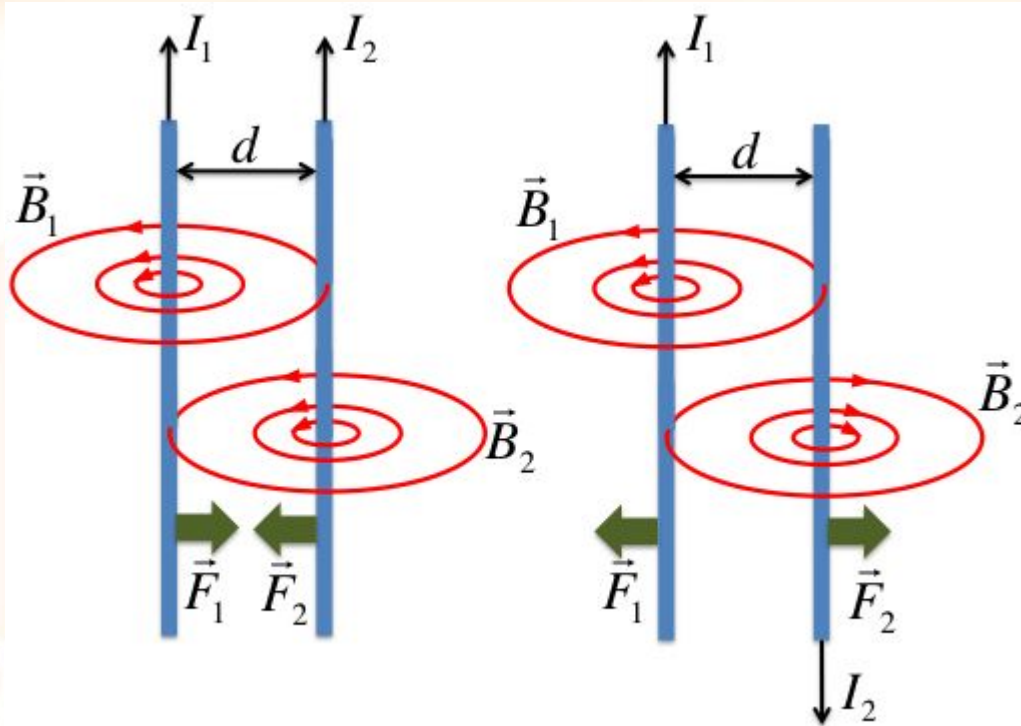


Единица силы тока в системе СИ

Прохождение тока силой в 1 Ампер по двум очень длинным тонким параллельным проводникам, находящимся в вакууме на расстоянии 1 метр друг от друга, вызывает силу взаимодействия в $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждом участке проводника, длиной в 1 метр.

$$\frac{dF_{21}}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \Rightarrow 2 \cdot 10^{-7} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1}{2\pi \cdot 1}$$

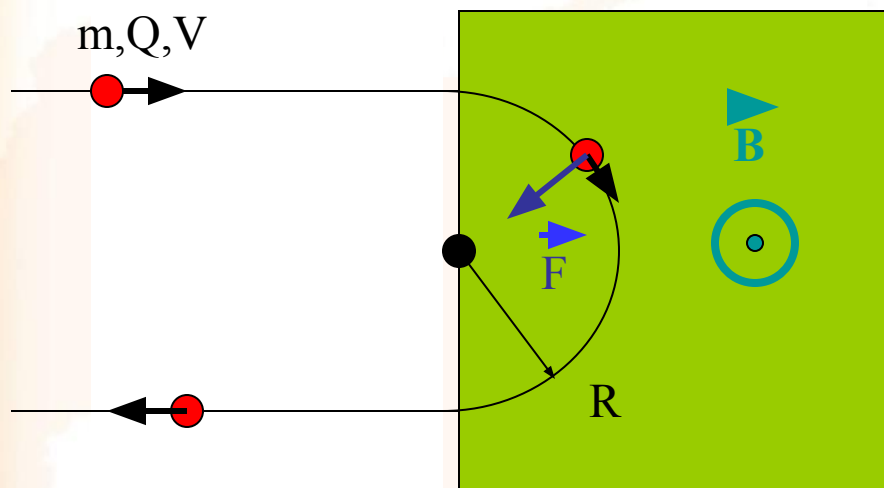
Кулон – это заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение проводника, по которому течёт постоянный ток силой в 1 А.



Токи одного направления притягиваются, токи противоположных направлений отталкиваются



ПРИМЕР 1. Заряд q влетает в область однородного магнитного поля B .
Определить его траекторию движения.

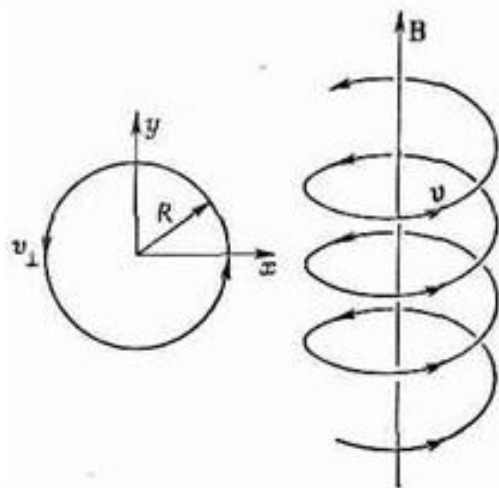


Решение:

$$F = QVB = ma_{\text{ц}} = mV^2 / R.$$

$$R = mV / QB.$$

ПРИМЕР 2. Заряд q влетает в область однородного магнитного поля B .
Определить его траекторию движения.



Если частица имела начальную скорость V не перпендикулярную направлению вектора магнитной индукции B :

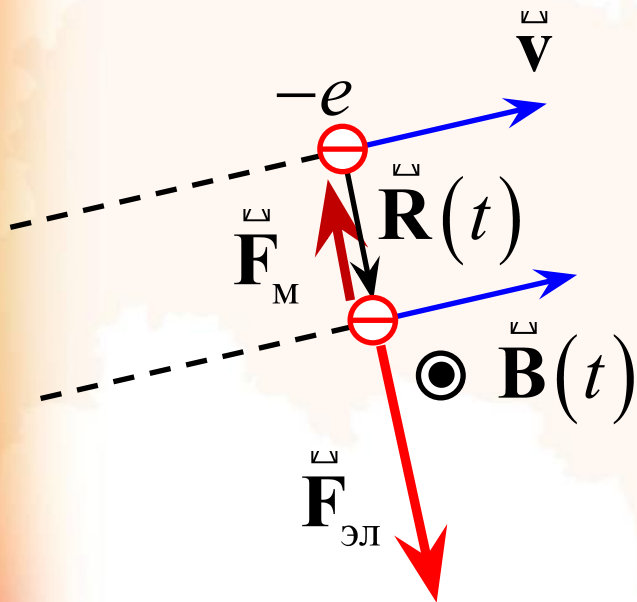
Под действием магнитной силы заряд будет двигаться по дуге окружности радиуса

$$R = mV_{\text{перп}}/qB$$

Где $V_{\text{перп}}$ - компонента вектора скорости, перпендикулярная направлению вектора магнитной индукции.

Кроме этого, частица будет смещаться вдоль направления вектора магнитной индукции с постоянной скоростью $V_{\text{парал}}$. В результате частица будет двигаться по спирали.

Пример 3. Скорости \vec{v} двух нерелятивистских электронов одинаковы и перпендикулярны прямой, которая их соединяет. Найти отношение сил магнитного и электрического взаимодействия электронов.

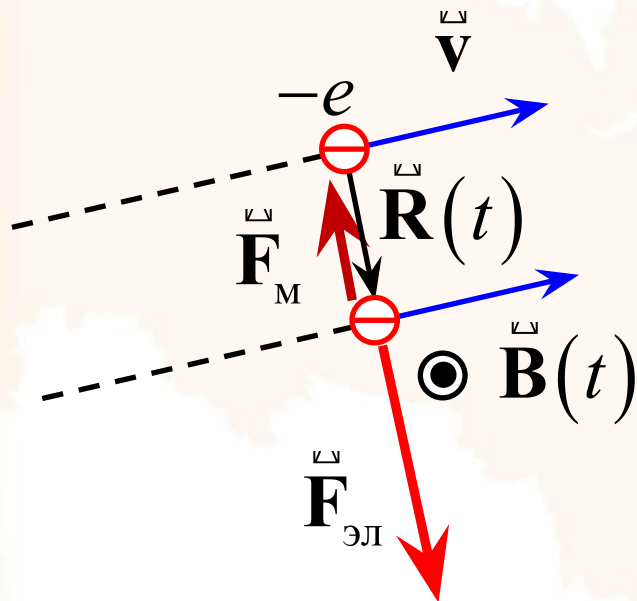


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(-e) \left[\vec{v}, \vec{R} \right]}{R^3} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 e v}{4\pi R^2}$$

$$\vec{F}_M = (-e) \left[\vec{v}, \vec{B} \right] \Rightarrow F_M = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{4\pi R^2}$$

$$\vec{F}_{эл} = \frac{(-e)^2 \vec{R}}{4\pi \epsilon_0 R^3} \Rightarrow F_{эл} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 R^2}$$

Пример 3. Скорости \vec{v} двух нерелятивистских электронов одинаковы и перпендикулярны прямой, которая их соединяет. Найти отношение сил магнитного и электрического взаимодействия электронов.



$$\Rightarrow \frac{F_M}{F_{эл}} = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{4\pi R^2} \frac{4\pi \epsilon_0 R^2}{e^2} =$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \ll 1$$



Спасибо за внимание!

**Следующая лекция
3 ноября**



Магнитная постоянная и скорость света.



$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 12,56 \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ - магнитная постоянная

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Нм}^2$ - электрическая постоянная (из закона Кулона)

$\mu_0 \varepsilon_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 0,885 \cdot 10^{-11} [\text{Н/А}^2 \cdot \text{Кл}^2/\text{Нм}^2] = 1,1 \cdot 10^{-17} [\text{с}^2/\text{м}^2]$

$(\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} = (0,11 \cdot 10^{-16})^{-1/2} [\text{м/с}] = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = c$
(скорость света)