

# МЕХАНИКА

## Теоретическая механика.

### Модуль 1

#### Раздел 1 – СТАТИКА

**ВВЕДЕНИЕ В СТАТИКУ**

ЛЕКЦИЯ 1

ЛЕКЦИЯ 2

ЛЕКЦИЯ 3

**УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ**

ЛЕКЦИЯ 4

ЛЕКЦИЯ 5

**ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ**

ЛЕКЦИЯ 6

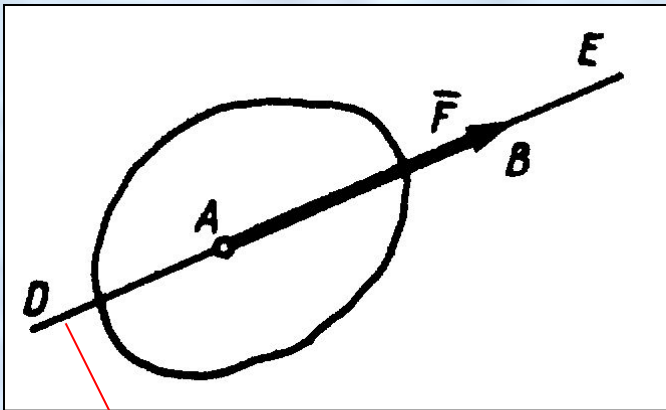
## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Статика** - раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и условиях равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

**Равновесие** - это состояние покоя тела по отношению к другим телам, например по отношению к Земле.

**Абсолютно твердое тело** - такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается постоянным.

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ



линия  
действия  
силы

**Сила** в механике – это величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия материальных тел.

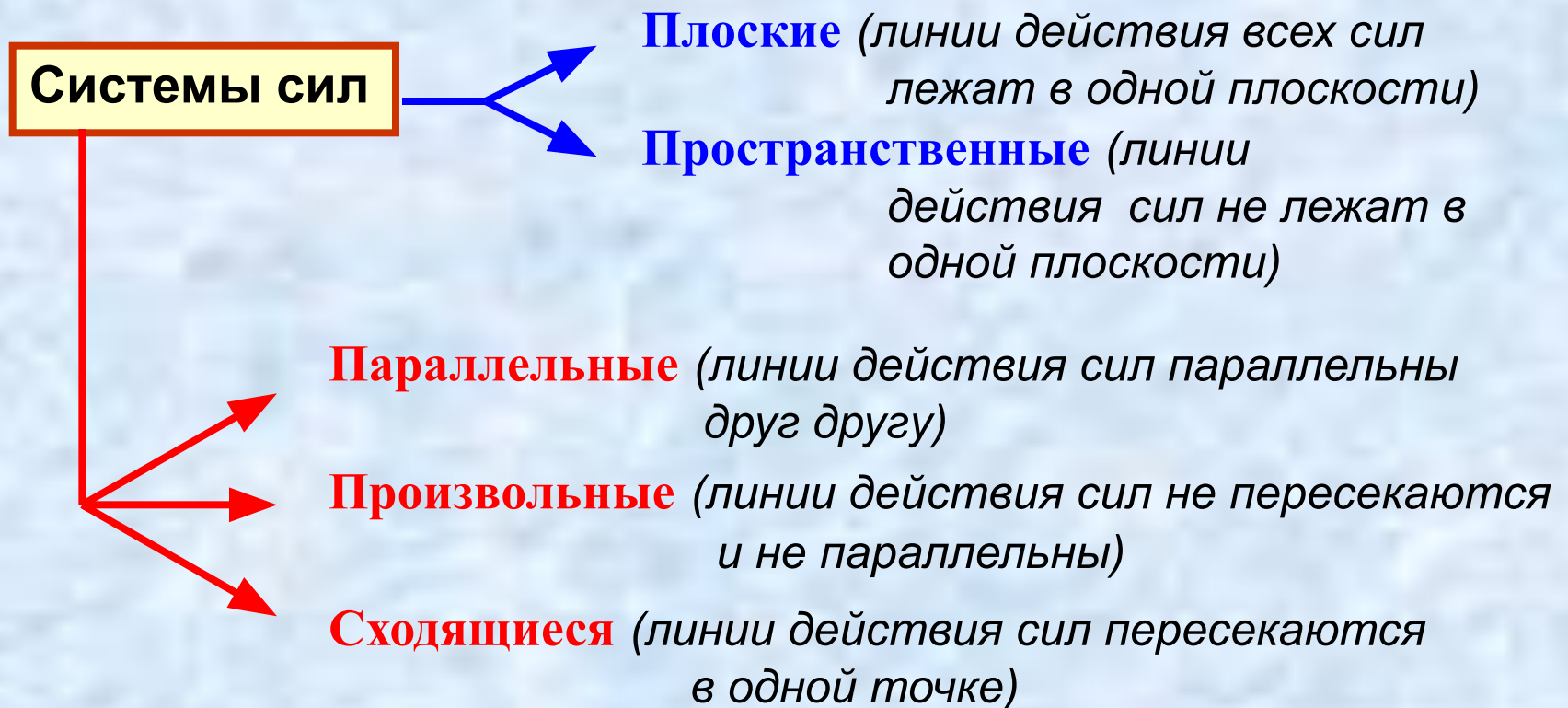
Действие силы на тело определяется:

- **модулем** силы;
- **направлением** вектора силы;
- **точкой приложения** вектора силы.

Основная единица измерения силы - 1 ньютон (1 Н).

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Система сил** - совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело



## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Эквивалентными** называются две системы сил, приводящие тело к одному и тому же кинематическому состоянию.

**Уравновешенная** (эквивалентная нулю) – это такая система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое.

**Равнодействующей системы сил**, называется сила, эквивалентная данной системе сил.

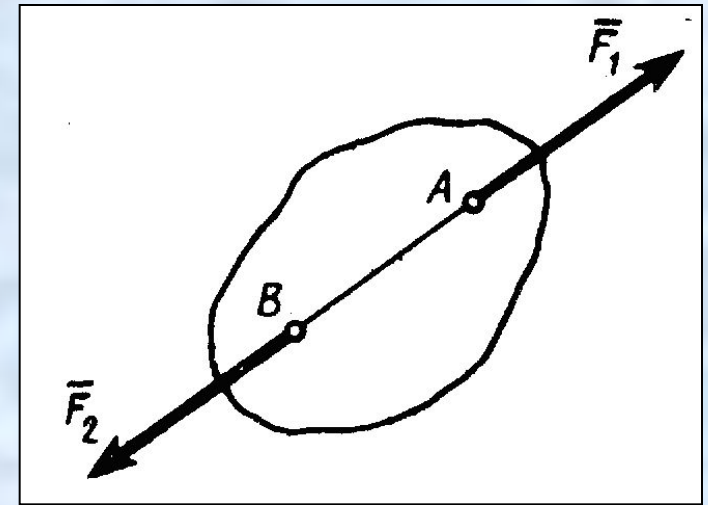
Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется **сосредоточенной**.

Силы, действующие на все точки объема или части поверхности тела, называются **распределенными**.



## АКСИОМЫ СТАТИКИ

**1.** Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ( $F_1 = F_2$ ) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны



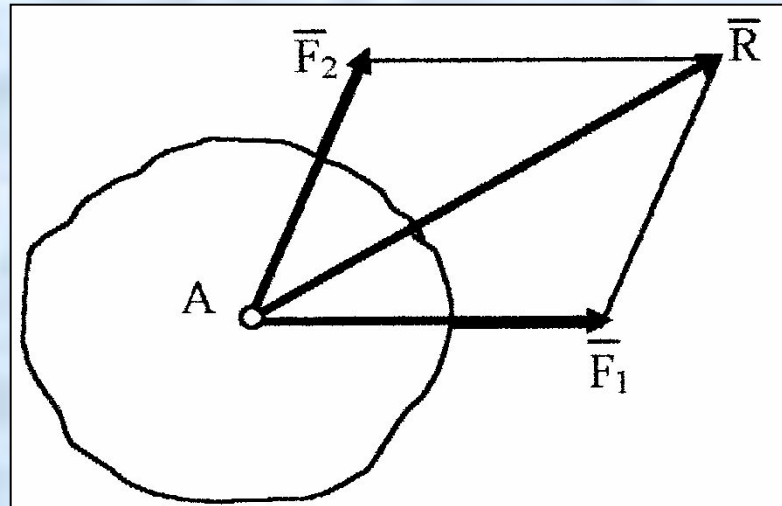
**2.** Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменяется, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил

**Следствие:** действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.

## АКСИОМЫ СТАТИКИ

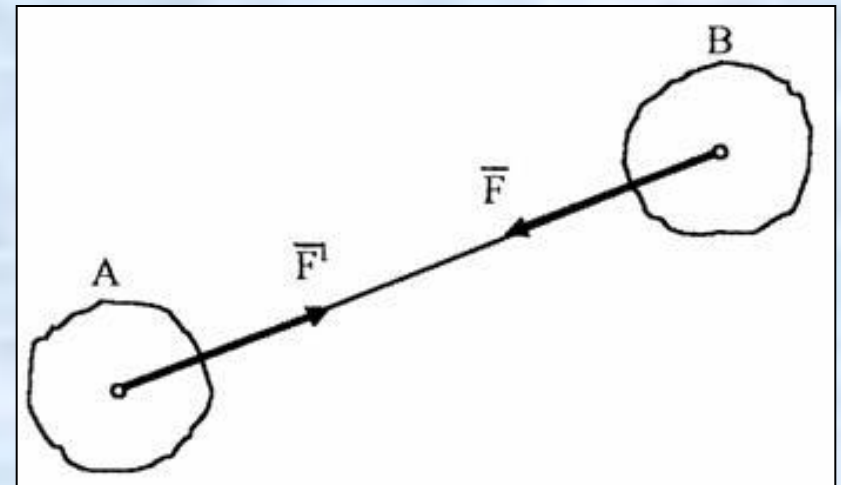
**3. Закон параллелограмма сил:** две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$



## АКСИОМЫ СТАТИКИ

**4. Закон равенства действия и противодействия:** *при всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направлению противодействие, т.е.*



**5. Принцип отвердевания:** *равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием уравновешенной системы сил, возможно только при его «отвердевании»*



## СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

**Свободным** называется тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве

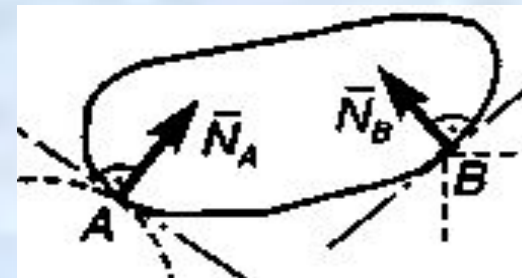
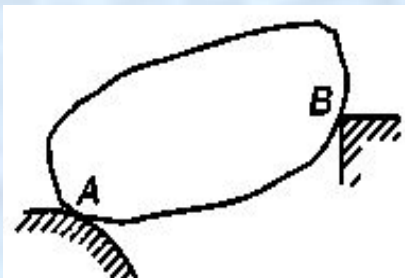
**Несвободным** называется тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним, тела (**СВЯЗИ**)

**Реакция связи** – это сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется.

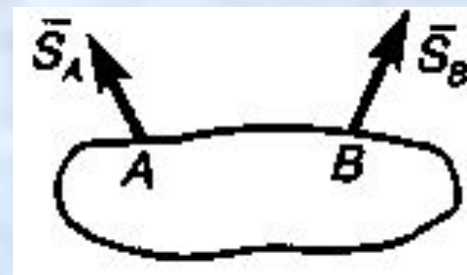
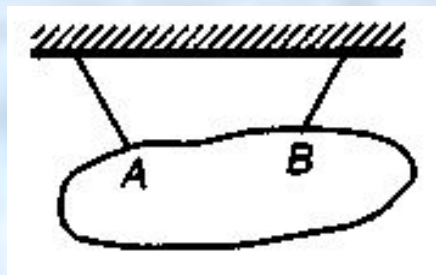
**Принцип освобожденности от связей:** всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу

## СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

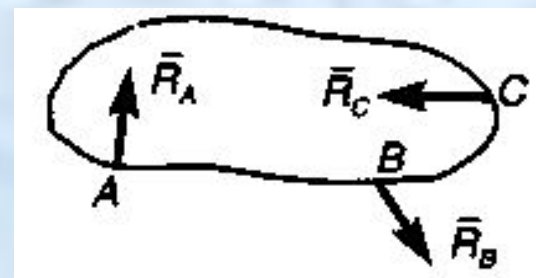
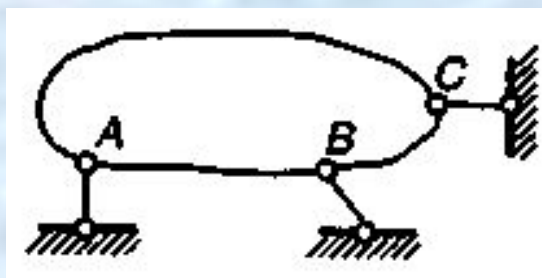
Гладкая  
поверхность



Гибкая связь

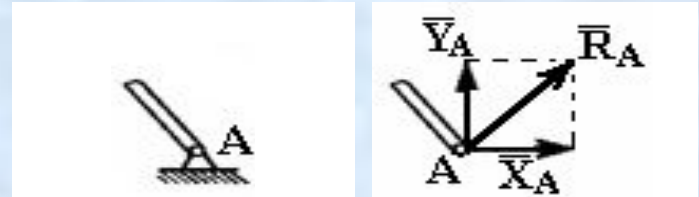


Шарнирный  
стержень

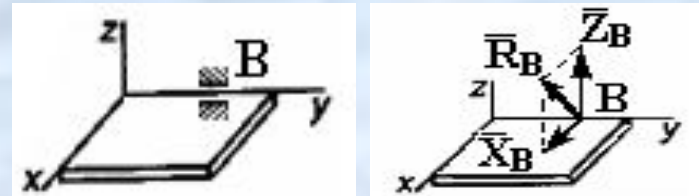


# СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

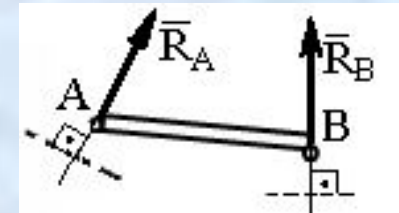
Шарнирно-неподвижная опора



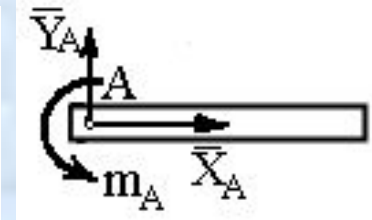
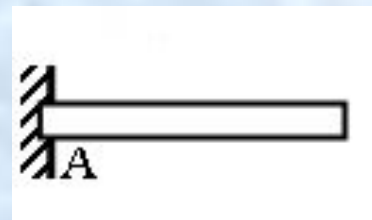
Цилиндрический шарнир



Шарнирно-подвижная опора



Жесткая заделка





Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ  
МЕХАНИКА

СТАТИКА

Введение в статику

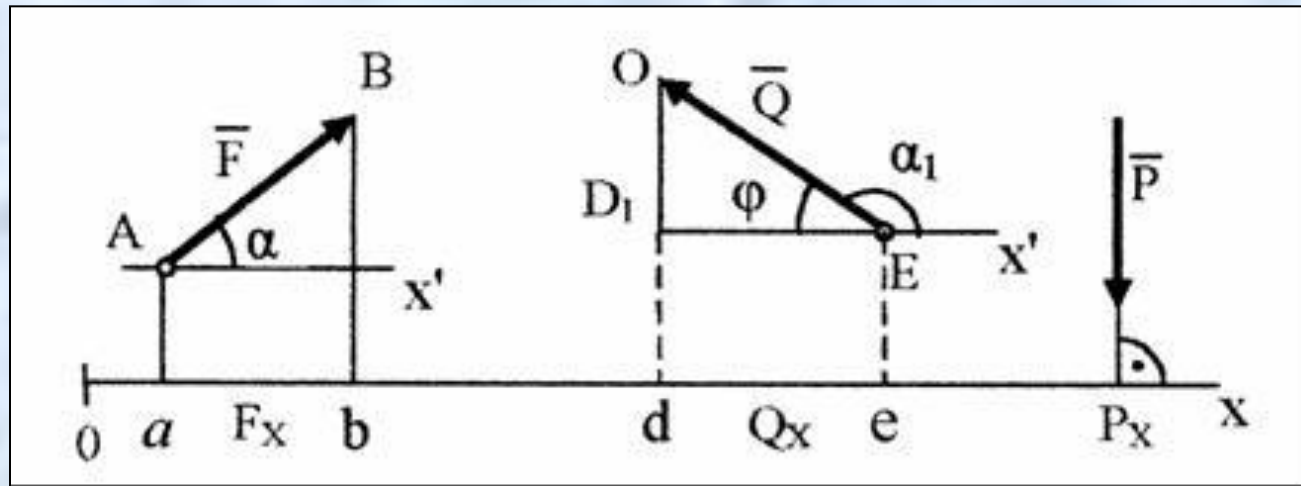
ЛЕКЦИЯ 2

План:

- 2.1. Проекция сил.
- 2.2. Момент силы относительно точки и относительно оси.
- 2.3. Пара сил, момент пары

## ПРОЕКЦИИ СИЛ

**Проекция силы на ось** - алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси:



$$F_x = F \cos \alpha = ab;$$

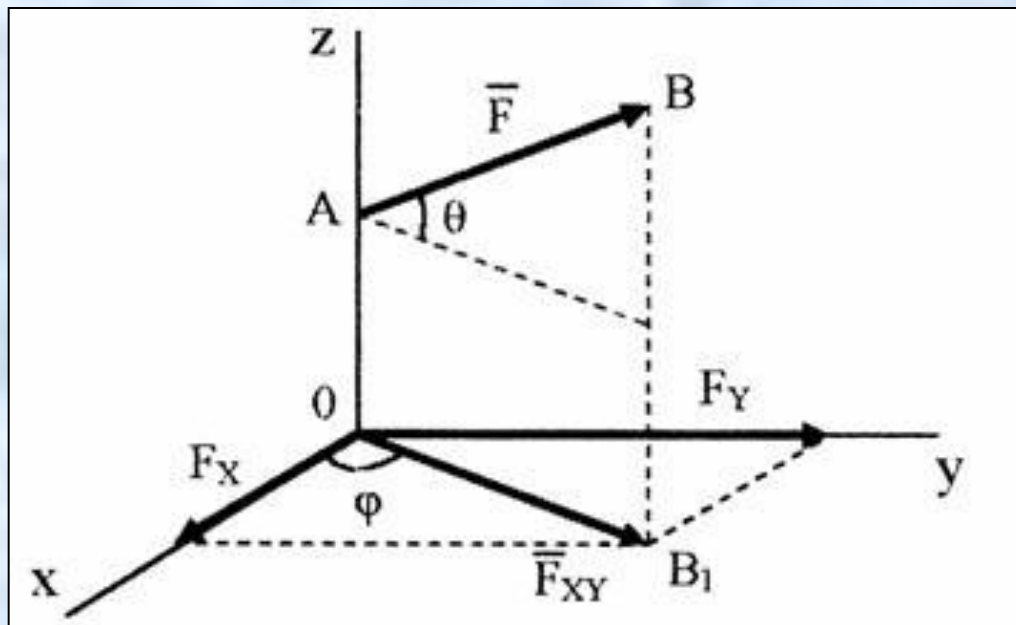
$$Q_x = Q \cos \alpha_1 = -Q \cos \phi = -de$$

$$P_x = 0$$



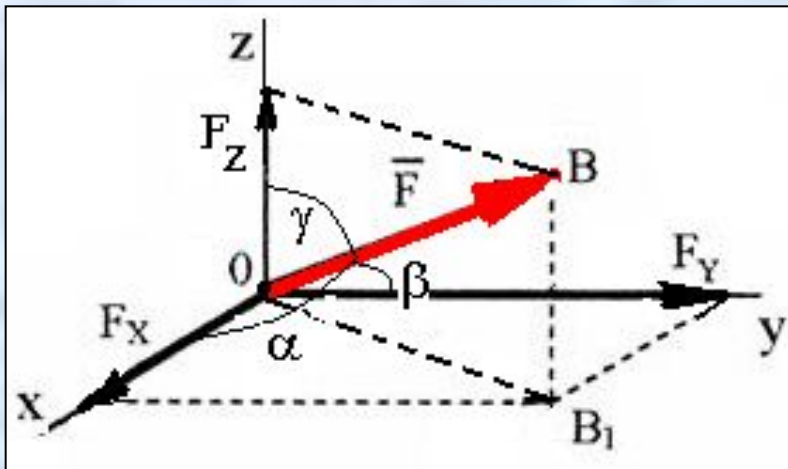
## ПРОЕКЦИИ СИЛ

**Проекция силы на плоскость** это вектор, заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость



## ПРОЕКЦИИ СИЛ

Силу можно задавать ее проекциями  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  на координатные оси:



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos \alpha = F_x / F,$$

$$\cos \beta = F_y / F,$$

$$\cos \gamma = F_z / F$$

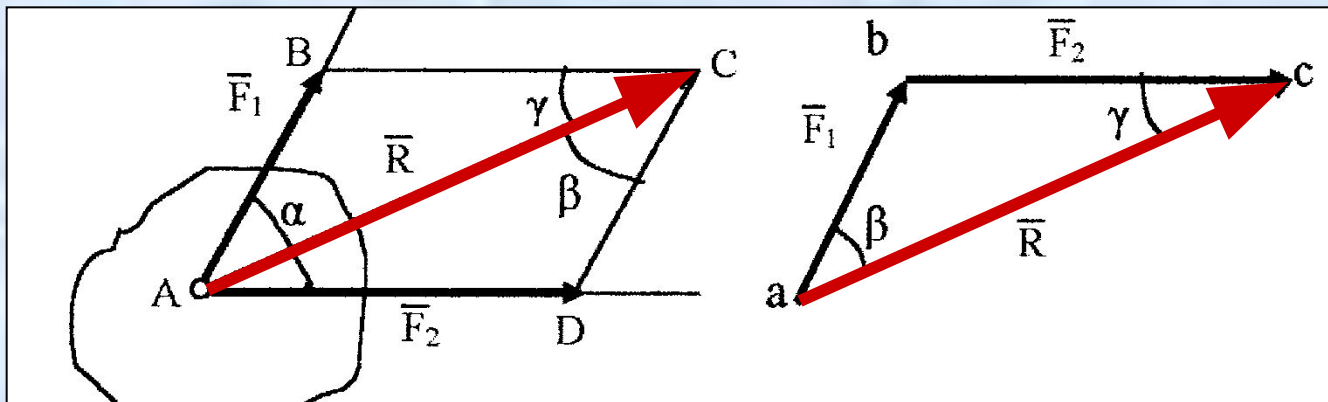
# СПОСОБЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛ

Введение в статику

## 1. Сложение двух сил

Величину, равную геометрической сумме сил системы, называют **главным вектором этой системы сил**

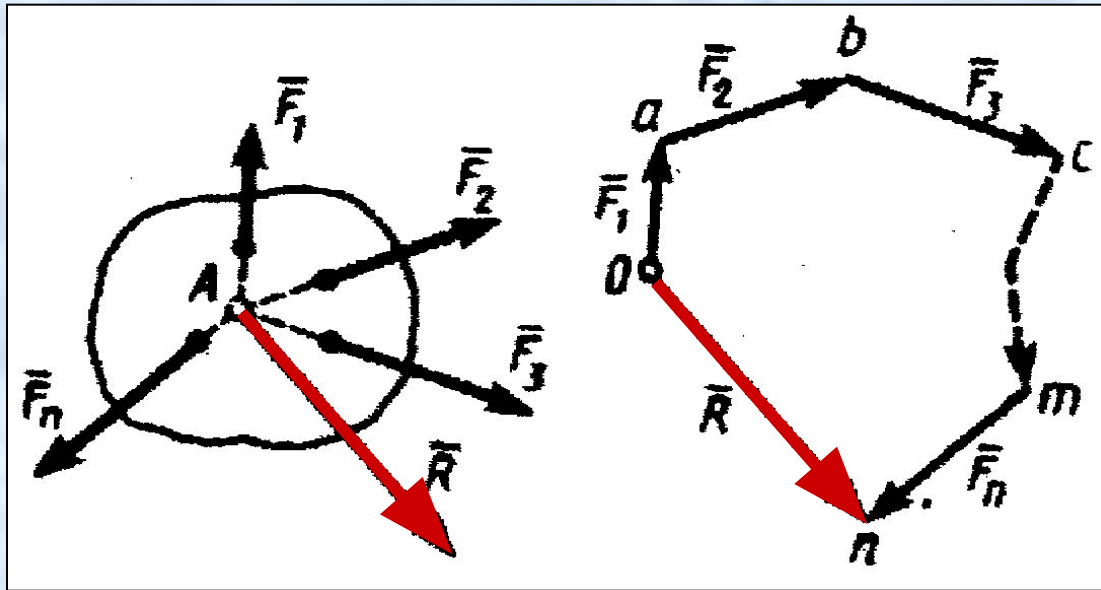
$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$



## СПОСОБЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛ

### 2. Сложение системы сил

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_k$$



## Аналитический способ сложения сил

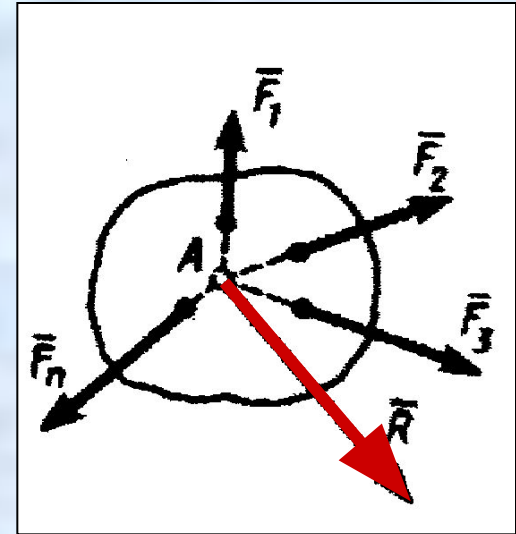
$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx}; \\ R_y &= \sum F_{ky}; \\ R_z &= \sum F_{kz} \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$\cos \alpha = R_x / R,$$

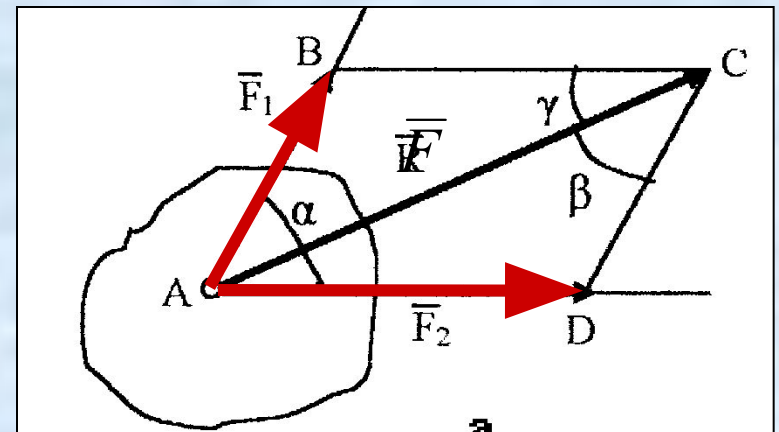
$$\cos \beta = R_y / R,$$

$$\cos \gamma = R_z / R.$$



## Разложение сил

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$



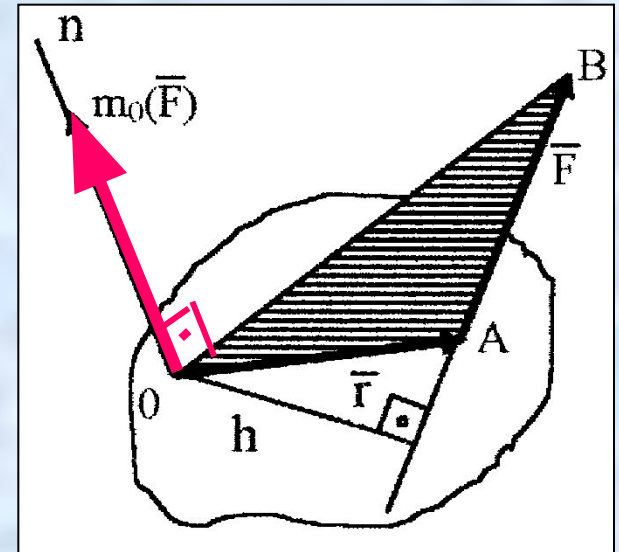


## Момент силы относительно точки

**Векторный момент силы** относительно центра  $O$  - это приложенный в центре  $O$  вектор

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

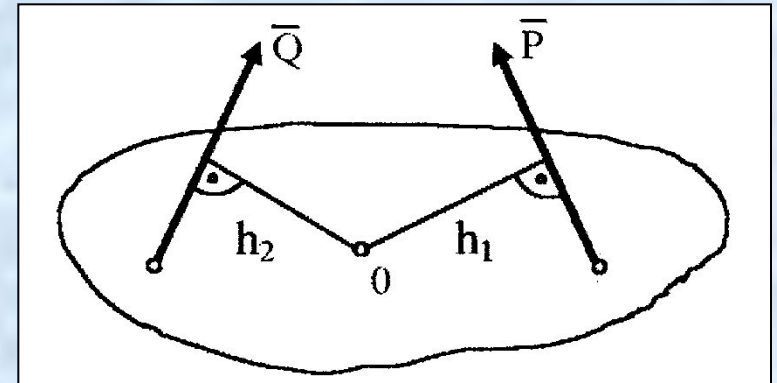
где  $\vec{OA} = \vec{r}$  - радиус-вектор точки  $A$ , проведенный из центра  $O$ .



**Алгебраический момент силы** относительно центра

$$m_0(\vec{F}) = \pm F h.$$

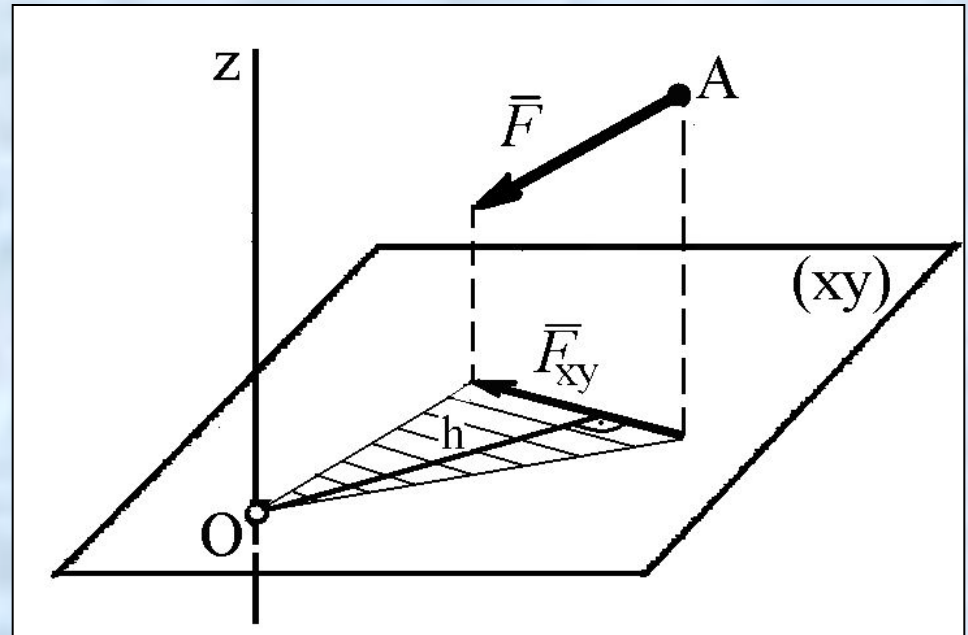
$$m_0(\vec{P}) = P h_1, \quad m_0(\vec{Q}) = -Q h_2$$



## Момент силы относительно оси

- это момент проекции вектора силы на плоскость перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с этой плоскостью

$$m_z(\bar{F}) = \pm |F_{xy}| h$$



## Пара сил, момент пары

**Плоскость действия пары** - плоскость, проходящая через линии действия сил пары

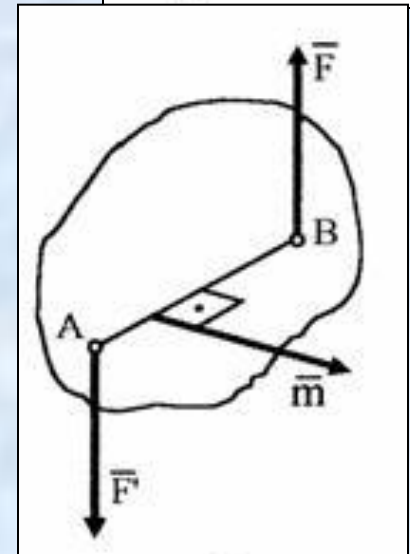
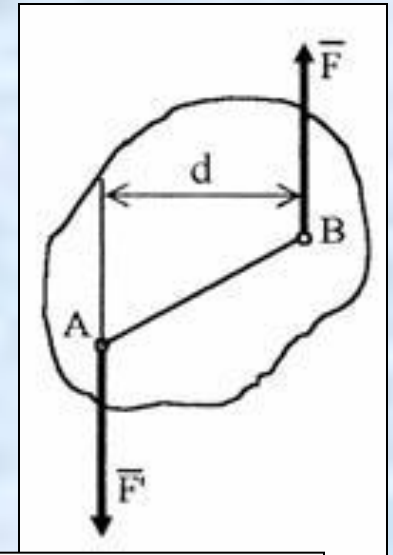
**Алгебраический момент пары**

$$m = \pm F d$$

**Плечо пары  $d$**  - кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары

**Векторный момент пары** - это вектор  $\vec{m}$ , направленный перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки

Этот вектор называется **скользящим**





Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ  
МЕХАНИКА

СТАТИКА

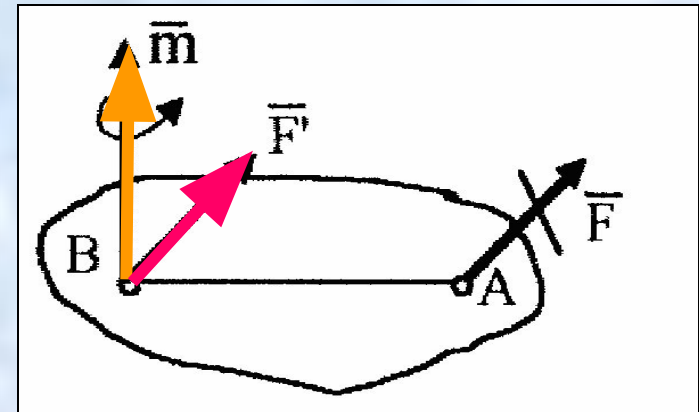
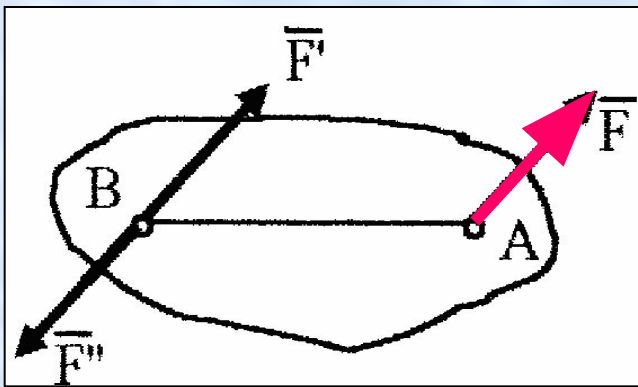
Введение в статику

ЛЕКЦИЯ 3

План:

- 3.1. Теорема о параллельном переносе силы.
- 3.2. Приведение системы сил к центру. Главный вектор и главный момент системы сил

## Теорема о параллельном переносе силы

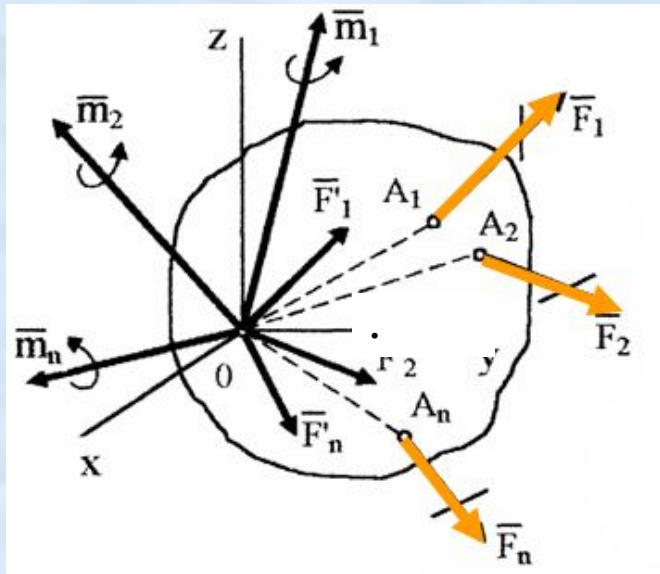


*Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя её действия, переносить из данной точки в новый произвольный центр, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно нового центра*



## Приведение системы сил к центру

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) = (\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n) + (\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n)$$



$$\bar{F}'_1 = \bar{F}_1, \text{ и т.д. } \bar{m}_1 = \bar{m}_0(\bar{F}_1) \text{ и т.д.}$$

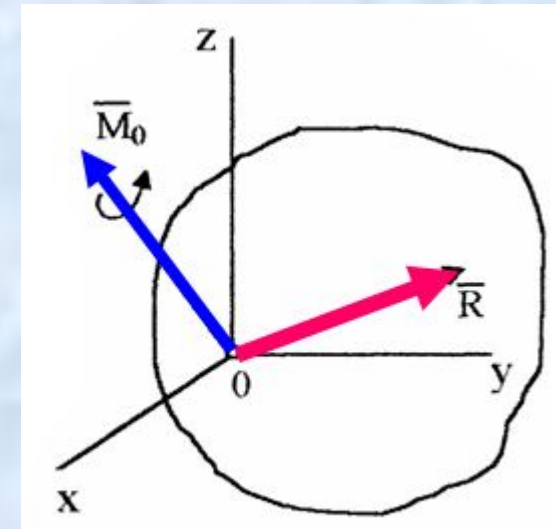
$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) = \bar{R}, \bar{M}_0$$

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k$$

$$\bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k)$$

$\bar{R}$  - **главный вектор** системы сил;

$\bar{M}_0$  - **главный момент** системы сил относительно центра O



## Приведение системы сил к центру

Частные случаи приведения системы сил к центру:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_0 \neq 0 \end{array} \right\} \text{данная система сил приводится к одной паре сил}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R} \neq 0 \\ \bar{M}_0 = 0 \end{array} \right\} \text{данная система сил приводится к одной силе, т. е. к равнодействующей}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_0 = 0 \end{array} \right\} \text{данная система сил будет уравновешенной}$$

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ  
МЕХАНИКА

СТАТИКА

Условия равновесия

ЛЕКЦИЯ 4

План:

- 4.1. Теорема Вариньона.
- 4.2. Условия равновесия различных систем сил.

## ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

Пусть система сил  
приводится к  
равнодействующей

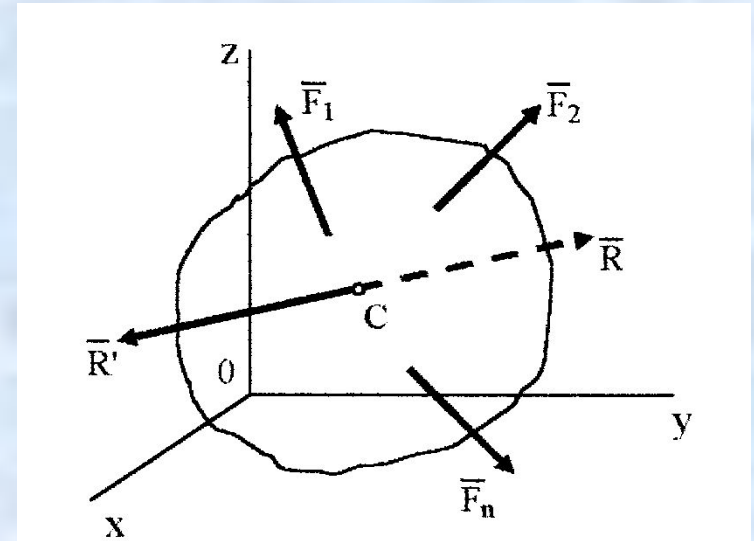
$$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n = \bar{R}$$

Приложим в точке  $C$  силу  $\bar{R}' = \bar{R}$

Система сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}'$   
будет находиться в равновесии и для нее

$$\bar{M}_0 = 0 \quad \text{или} \quad \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) + \bar{m}_0(\bar{R}') = 0$$

$$-\bar{m}_0(\bar{R}') = \bar{m}_0(\bar{R}) = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k)$$



Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра  $O$  равен сумме моментов сил системы относительно того же центра

## УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

**Равновесие  
пространственной  
системы произвольно  
расположенных сил**

$$\bar{R} = 0 \quad \bar{M}_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0, & \quad \sum m_x(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & \quad \sum m_y(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum F_{kz} = 0, & \quad \sum m_z(\bar{F}_k) = 0. \end{aligned}$$

**Равновесие  
пространственной  
системы параллельных  
сил**

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

*В случае, когда все действующие на тело силы параллельны оси z*



## УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

### Равновесие системы сходящихся сил

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k = 0$$

**в геометрической форме:** необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из векторов сил, был замкнутым

**в аналитической форме:**

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0, \text{ или}$$

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0$$

## УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

### Равновесие плоской системы произвольных сил

①

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_O(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{kx} &= 0 \end{aligned}$$

ось  $Ox$ , **не**  
перпендикулярна  
прямой  $AB$

③

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned}$$

центры  $A$ ,  $B$  и  $C$ ,  
**не лежат**  
на одной прямой

## УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

### Равновесие плоской системы параллельных сил

$$\begin{aligned}\sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_0(\bar{F}_k) &= 0\end{aligned}$$

*В случае, когда все действующие на тело силы параллельны оси Oy*

$$\begin{aligned}\sum m_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) &= 0\end{aligned}$$

*точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной векторам сил.*

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ  
МЕХАНИКА

СТАТИКА

Условия равновесия

ЛЕКЦИЯ 5

План:

- 5.1. Равновесие систем тел.
- 5.2. Равновесие тела при наличии трения

## РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ ТЕЛ

*Внутренние связи* – это связи, соединяющие части конструкции

*Два способа решения задач  
на равновесие составной конструкции:*

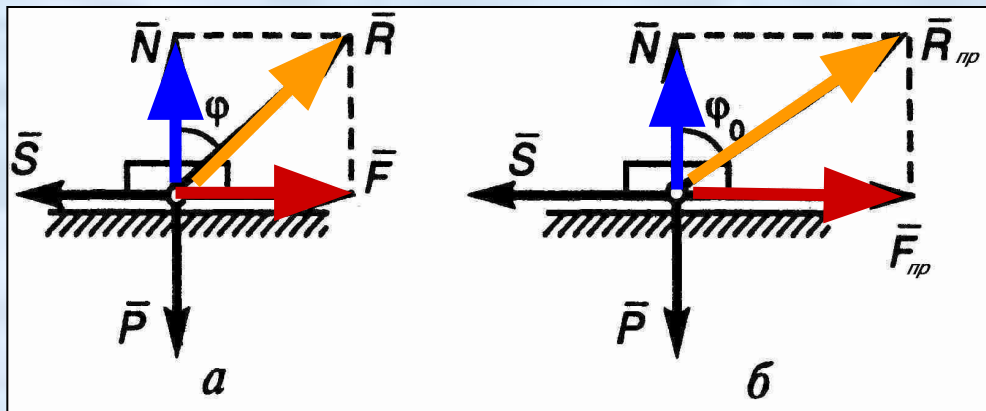
***1 способ.** Рассматривают равновесие всей конструкции как единое целое (не учитывая реакции внутренних связей) и дополнительно равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции с учетом реакций внутренних связей.*

***2 способ.** Конструкцию расчленяют на части и рассматривают равновесие каждой части, учитывая при этом реакции внутренних связей. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.*



# РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

## Сцепление и трение скольжения



Условие  
равновесия:

$$S \leq f_0 N$$

$$\bar{F}_{\text{ТР}} = -\bar{S}$$

$\phi_0$  - угол трения покоя

$$0 \leq F_{\text{ТР}} \leq F_{\text{ПР}}$$

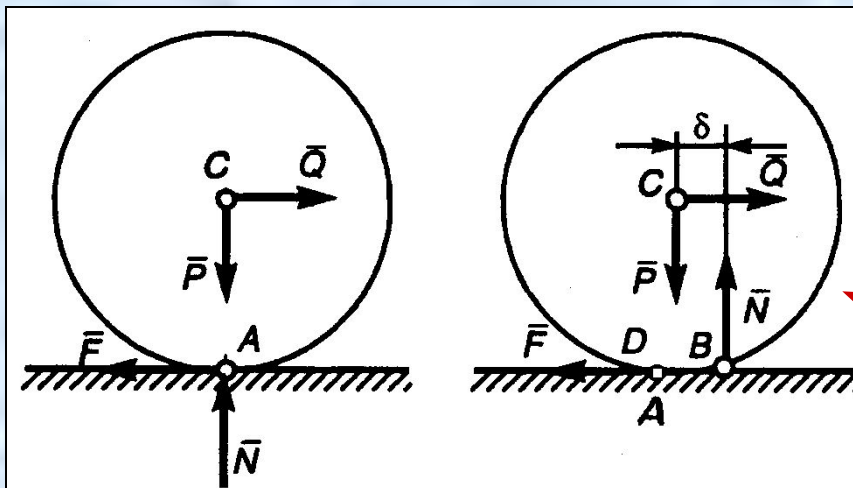
$$\text{tg} \phi_0 = F_{\text{ПР}} / N.$$

$$F_{\text{ПР}} = f_0 N$$

$$\text{tg} \phi_0 = f_0.$$

# РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

## Трение качения



$(\bar{Q}, \bar{F})$  – пара сил

$(\bar{N}, \bar{P})$  – пара сил

$$\Sigma m_A(\bar{F}_k) = 0$$

$$N\delta - Q_{\text{тр}}R = 0$$

$$Q_{\text{тр}} = (\delta / R) N.$$

Условие равновесия:

$$Q \leq \frac{\delta}{R} N$$

$$Q \leq f_0 N$$

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ  
МЕХАНИКА

СТАТИКА

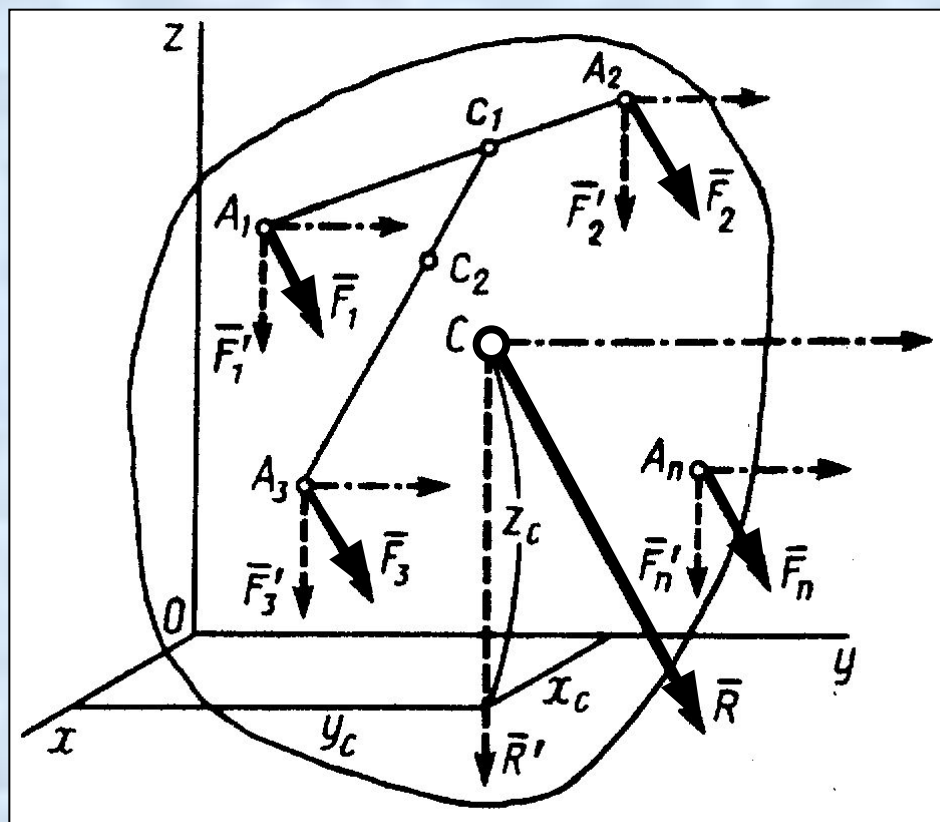
## ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

ЛЕКЦИЯ 5

План:

- 6.1. Центр параллельных сил
- 6.2. Центр тяжести твердого тела

## ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ



$$m_y(\bar{R}') = \sum m_y(\bar{F}'_k) = R \cdot x_C$$

$$R x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n$$

$$R x_C = \sum F_k x_k.$$

Координаты центра  
параллельных сил:

$$x_c = \frac{\sum F_k x_k}{R}$$

$$y_c = \frac{\sum F_k y_k}{R}$$

$$z_c = \frac{\sum F_k z_k}{R}$$

## ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

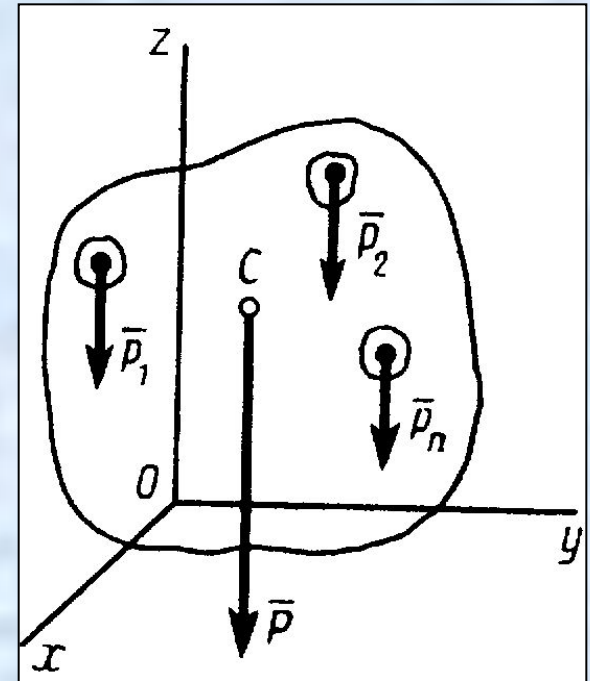
**Силовое поле** – это область, в которой на каждую материальную точку действует сила, зависящая от положения этой точки,

Поле тяжести вблизи земной поверхности можно назвать **однородным полем тяжести**.

Модуль равнодействующей сил тяжести называется **весом тела  $P$**

**Координаты центра тяжести:**

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P} \quad y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P} \quad z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}$$





## ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### Центр тяжести некоторых однородных тел

1 Для однородного объемного твердого тела (вес пропорционален объему):

$$x_C = \frac{\sum V_k x_k}{V} \quad y_C = \frac{\sum V_k y_k}{V} \quad z_C = \frac{\sum V_k z_k}{V}$$

2. Для тела, представляющего собой однородную пластину (вес пропорционален площади):

$$x_C = \frac{\sum S_k x_k}{S} \quad y_C = \frac{\sum S_k y_k}{S} \quad z_C = \frac{\sum S_k z_k}{S}$$

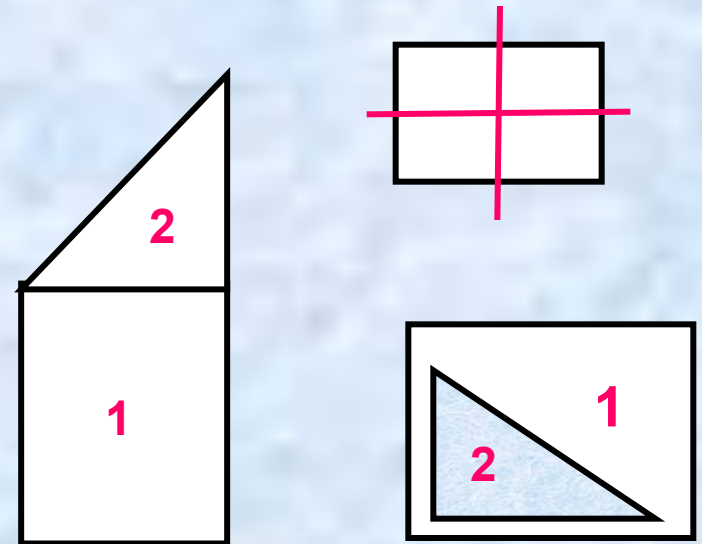
3. Координаты центра тяжести тонкого прямого стержня (вес пропорционален длине):

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L} \quad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L} \quad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L}$$

## ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Способы нахождения положения центров тяжести тел сложной формы:

- Способ симметрии
- Способ разбиения
- Способ дополнения
- Способ интегрирования



$$x_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV,$$

$$y_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV,$$

$$z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV.$$