МЕХАНИКА

Теоретическая механика.
Модуль 1

Раздел 1 – СТАТИКА

- **ВВЕДЕНИЕ В СТАТИКУ**
  - ЛЕКЦИЯ 1
  - ЛЕКЦИЯ 2
  - ЛЕКЦИЯ 3
- **УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ**
  - ЛЕКЦИЯ 4
  - ЛЕКЦИЯ 5
- **ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ**
  - ЛЕКЦИЯ 6

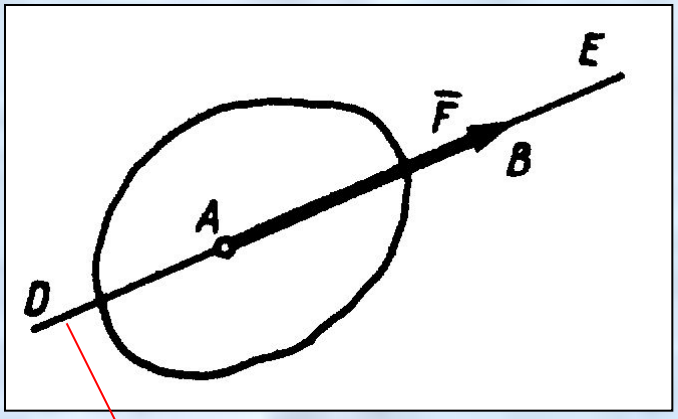
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Статика - *раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и условиях равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.*

Равновесие - *это состояние покоя тела по отношению к другим телам, например по отношению к Земле.*

Абсолютно твердое тело - *такое тело, расстояние между каждыми двумя точками которого всегда остается постоянным.*

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ



линия действия силы

Сила *в механике – это величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия материальных тел.*

Действие силы на тело определяется:

- ***модулем*** *силы;*
- ***направлением*** *вектора силы;*
- ***точкой приложения*** *вектора силы.*

Основная единица измерения силы - 1 ньютон (1 Н).

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Система сил - ***совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело***

Плоские *(линии действия всех сил лежат в одной плоскости)*

Пространственные *(линии действия сил не лежат в одной плоскости)*

Параллельные *(линии действия сил параллельны друг другу)*

Произвольные *(линии действия сил не пересекаются и не параллельны)*

Сходящиеся *(линии действия сил пересекаются в одной точке)*

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

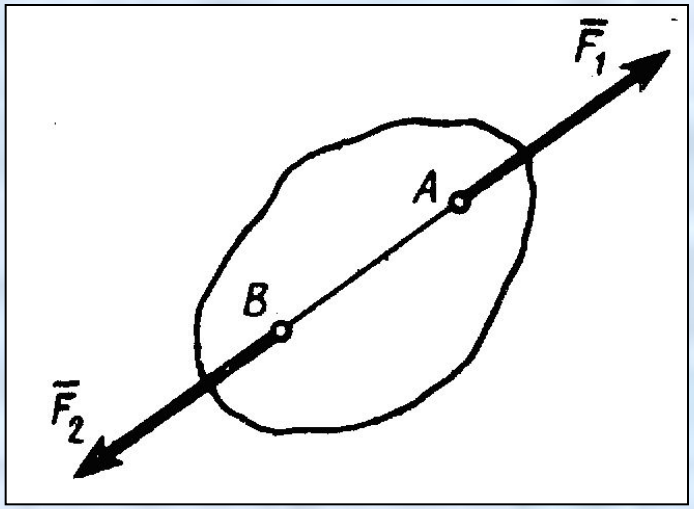
Эквивалентными *называются две системы сил, приводящие тело к одному и тому же кинематическому состоянию.*

Уравновешенная *(эквивалентная нулю) – это такая система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое.*

Равнодействующей системы сил, *называется сила, эквивалентная данной системе сил.*

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется ***сосредоточенной****.*
Силы, действующие на все точки объема или части поверхности тела, называются ***распределенными****.*

АКСИОМЫ СТАТИКИ



1. *Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны*

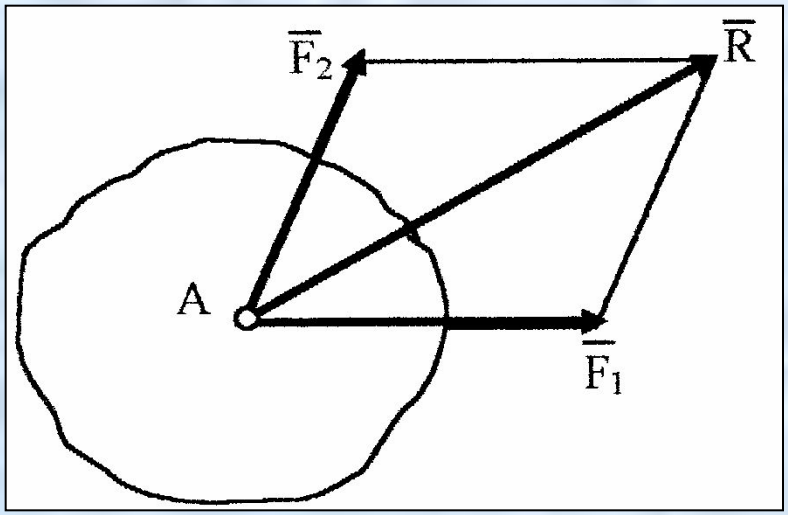
2. *Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменяется, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил*

Следствие: *действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.*

АКСИОМЫ СТАТИКИ

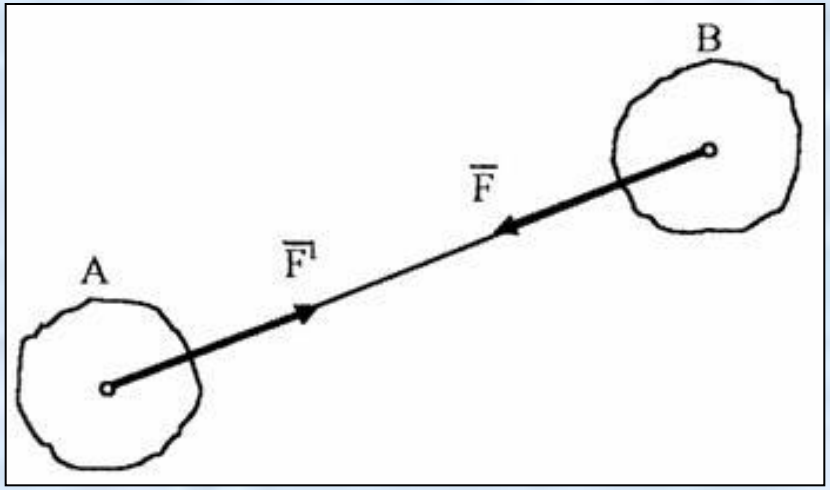
3. **Закон параллелограмма сил**: *две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах*

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$$



АКСИОМЫ СТАТИКИ

4. **Закон равенства действия и противодействия**: *при всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направлению противодействие, т.е.*



5. **Принцип отвердевания**: *равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием уравновешенной системы сил, возможно только при его «отвердевании»*

СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Свободным *называется тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве*

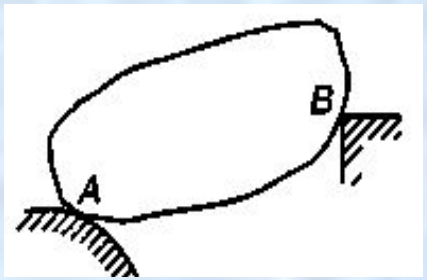
Несвободным *называется тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним, тела* (**связи**)

Реакция связи *– это сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется.*

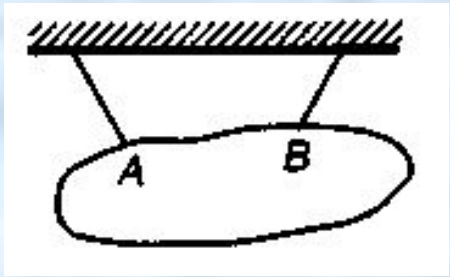
Принцип освобождаемости от связей: *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу*

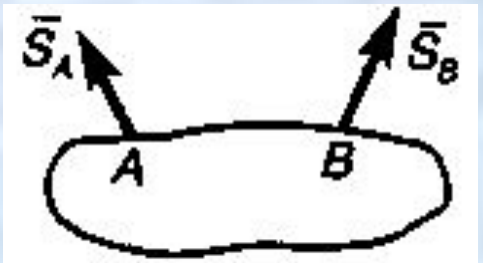
СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Гладкая поверхность

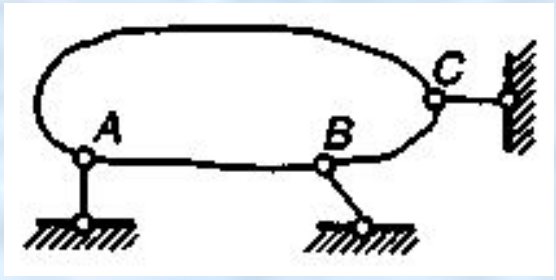


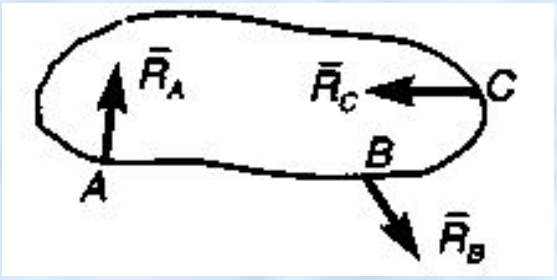
Гибкая связь





Шарнирный стержень

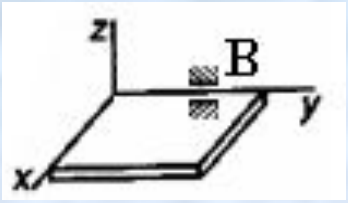


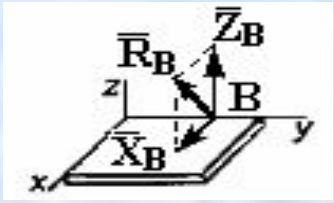


СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

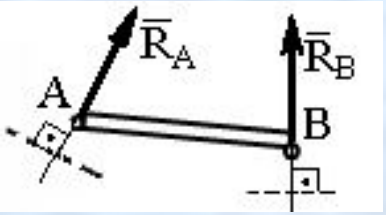
Шарнирно-неподвижная опора

Цилиндрический шарнир

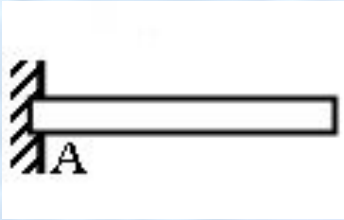


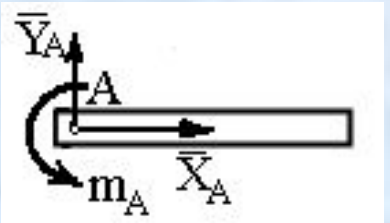


Шарнирно-подвижная опора



Жесткая заделка





МЕХАНИКА

Модуль 1
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

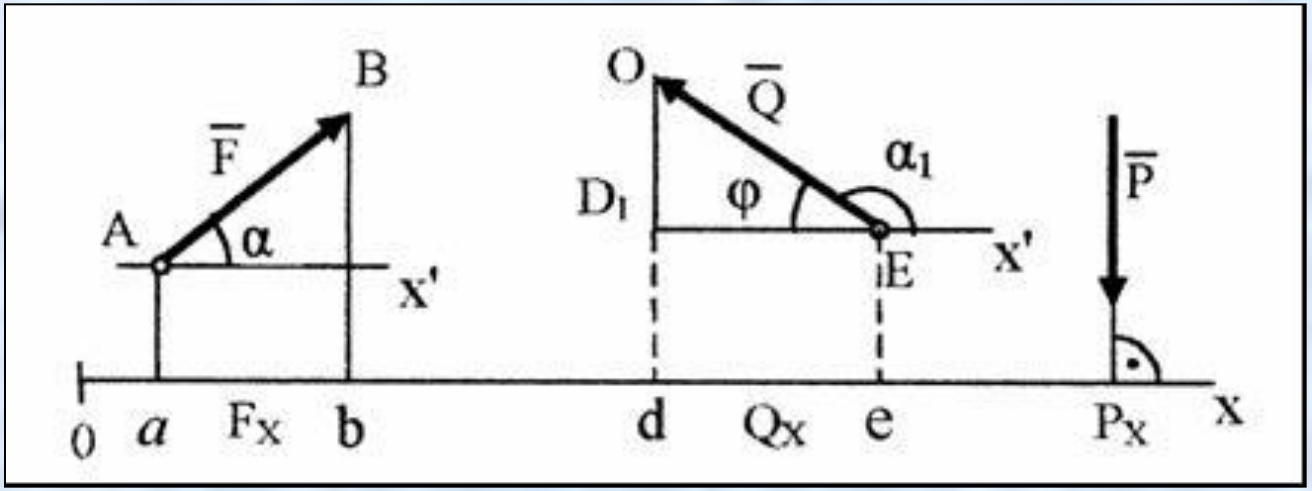
Введение в статику

ЛЕКЦИЯ 2
План:

2.1. Проекции сил.
2.2. Момент силы относительно точки и относительно оси.
2.3. Пара сил, момент пары

ПРОЕКЦИИ СИЛ

Проекция силы на ось - *алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси:*



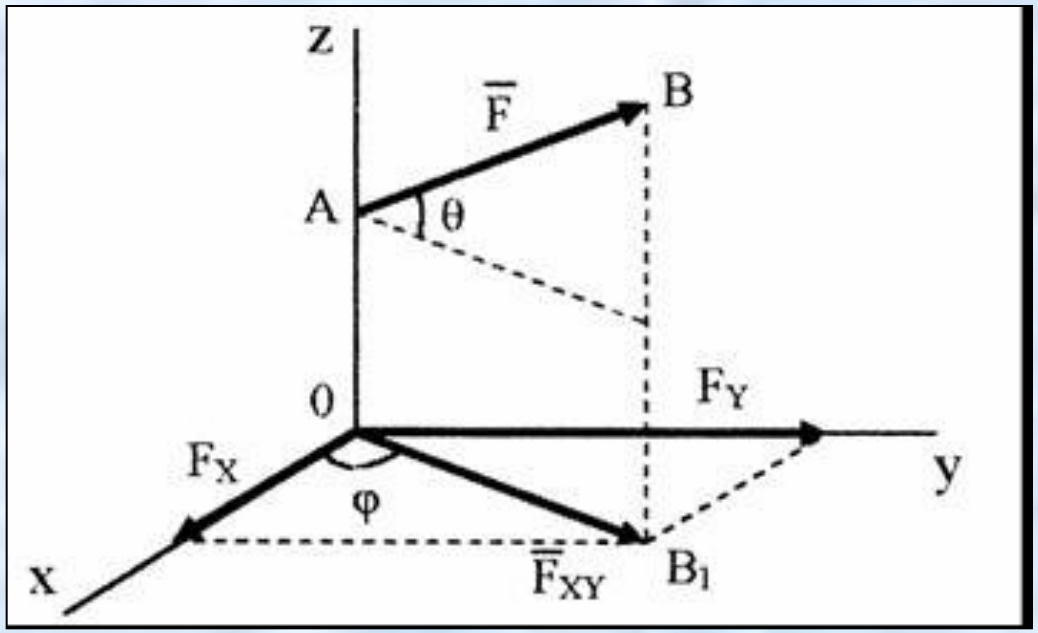
$F_x = F\cos\alpha = ab;$

$Q_x = Q\cos\alpha_1 = -Q\cos\phi = -de$

$P_x = 0$

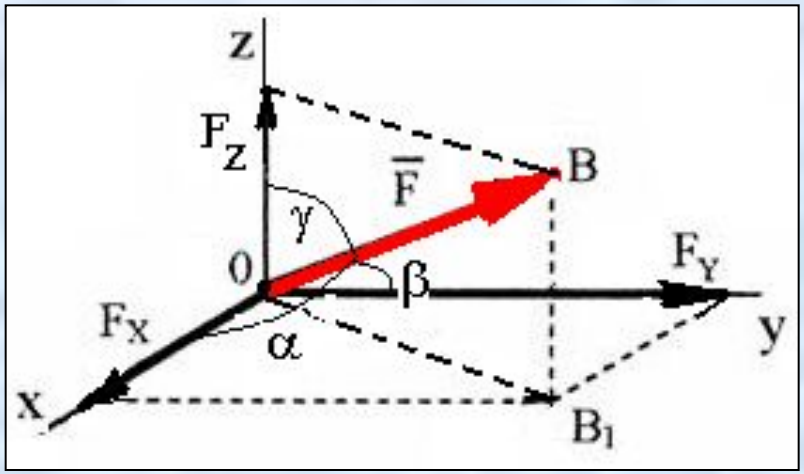
ПРОЕКЦИИ СИЛ

Проекция силы на плоскость *это вектор , заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость*



ПРОЕКЦИИ СИЛ

Силу можно задавать ее проекциями F_x, F_y, F_z на координатные оси:



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos\alpha = F_x / F,$$

$$\cos\beta = F_y / F,$$

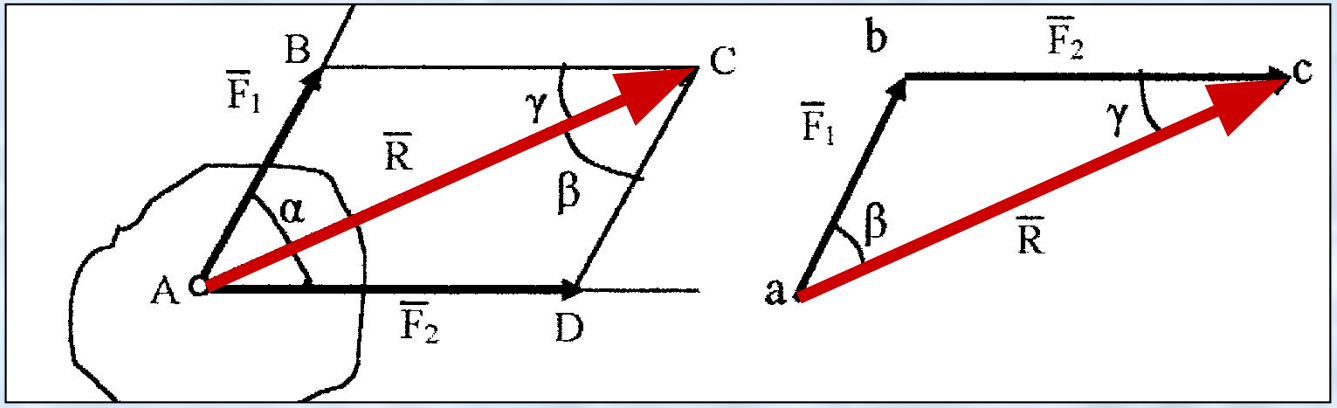
$$\cos\gamma = F_z / F$$

СПОСОБЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛ

1. Сложение двух сил

Величину, равную геометрической сумме сил системы, называют **главным вектором этой системы сил**

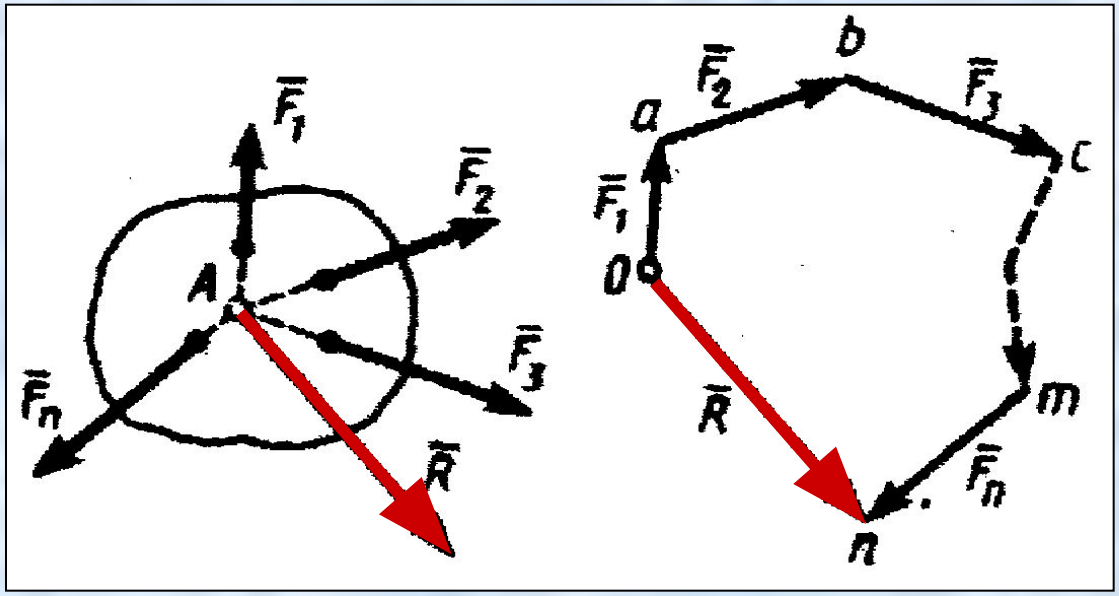
$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \qquad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$



СПОСОБЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛ

2. Сложение системы сил

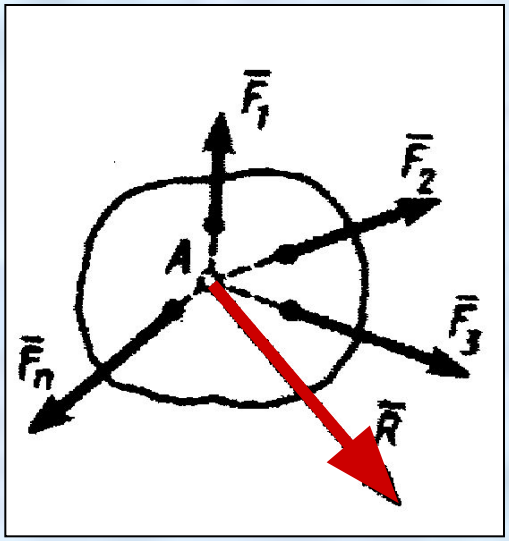
$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_k$$



Аналитический способ сложения сил

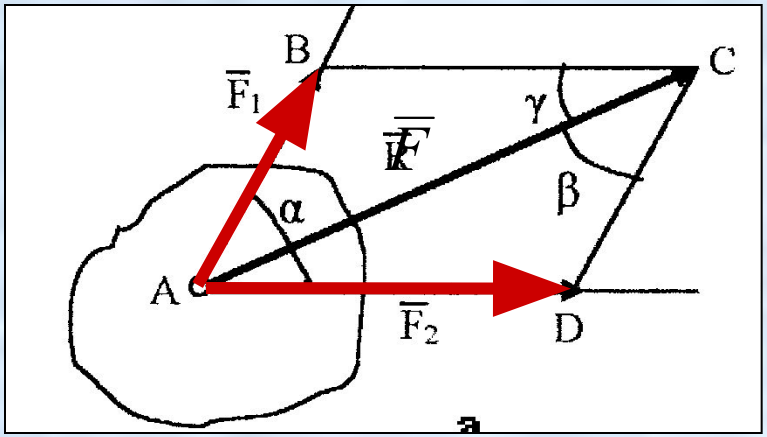
$$R_x = \sum F_{kx};$$
$$R_y = \sum F_{ky};$$
$$R_z = \sum F_{kz}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$
$$\cos\alpha = R_x / R,$$
$$\cos\beta = R_y / R,$$
$$\cos\gamma = R_z / R.$$



Разложение сил

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

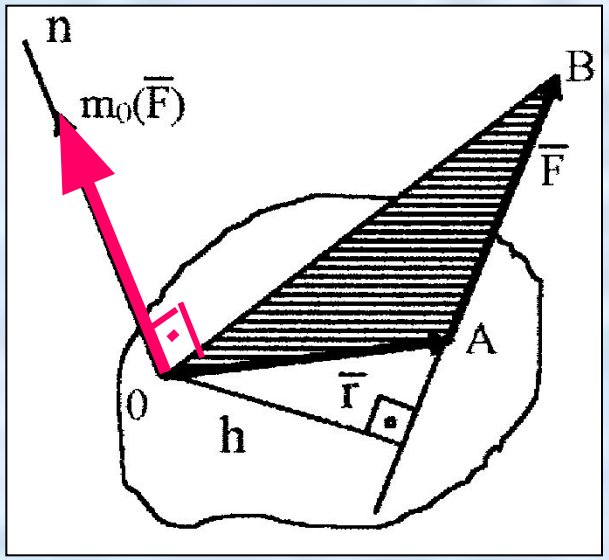


Момент силы относительно точки

Векторный момент силы *относительно центра O - это приложенный в центре O вектор*

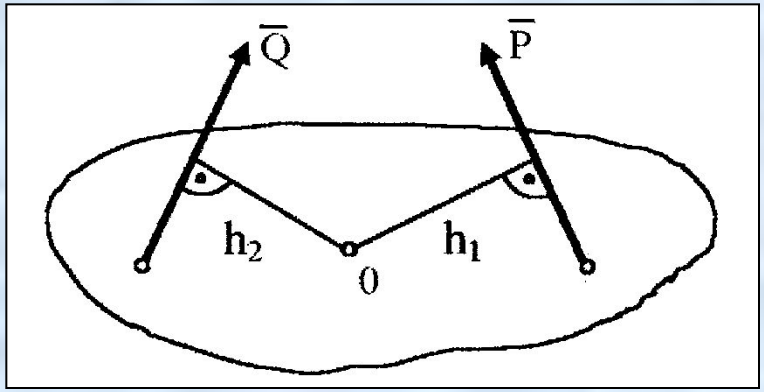
$$\overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$$

где $\overline{OA} = \overline{r}$ *- радиус-вектор точки A, проведенный из центра O.*



Алгебраический момент силы *относительно центра*

$$m_0(\overline{F}) = \pm F\,h.$$

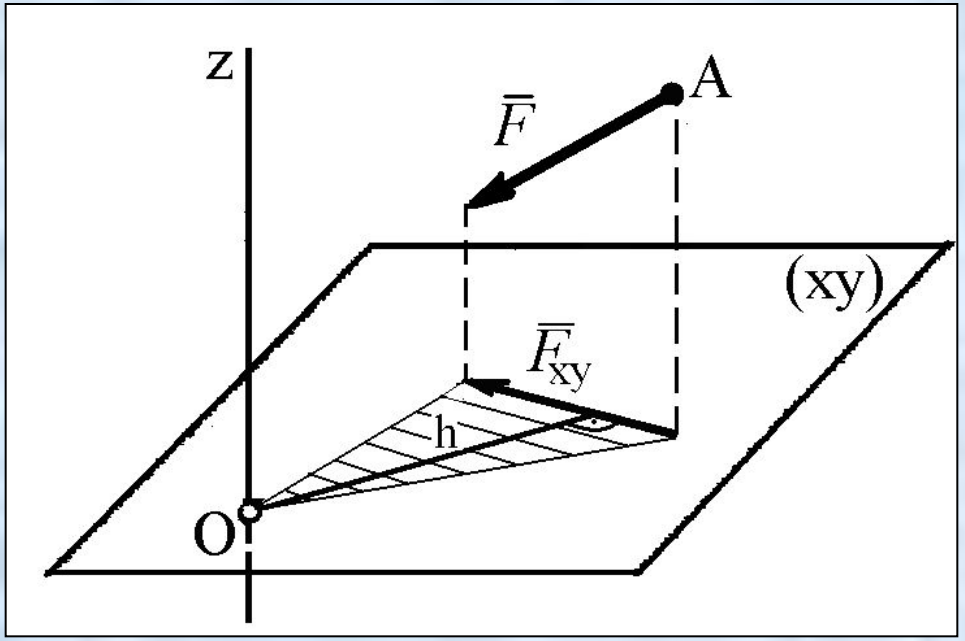


$$m_0(\overline{P}) = P\,h_1,\quad m_0(\overline{Q}) = -\,Q\,h_2$$

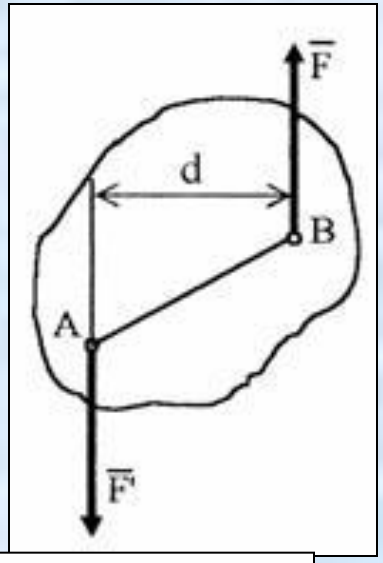
Момент силы относительно оси

- это момент проекции вектора силы на плоскость перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с этой плоскостью

$$m_z(\overline{F}) = \pm |F_{xy}| h$$



Пара сил, момент пары

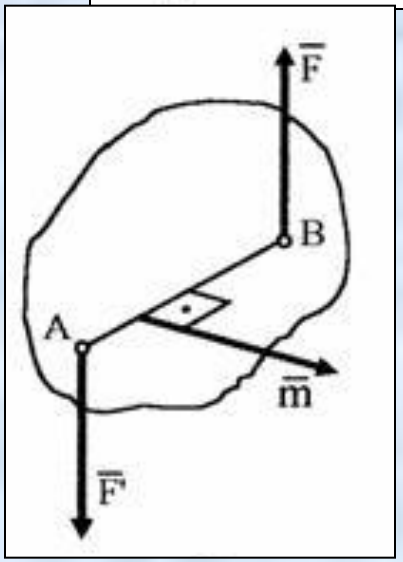


Плоскость действия пары - *плоскость, проходящая через линии действия сил пары*

Алгебраический момент пары

$$m = \pm F\,d$$

Плечо пары d ***-*** *кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары*



Векторный момент пары - *это вектор* $\overline{m}$*, направленный перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки*

Этот вектор называется ***скользящим***

МЕХАНИКА

Модуль 1
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

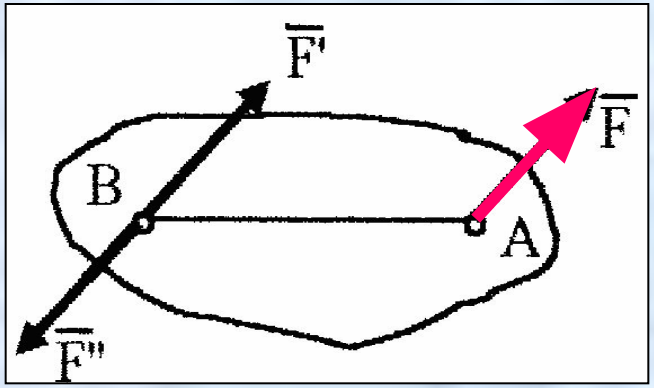
СТАТИКА

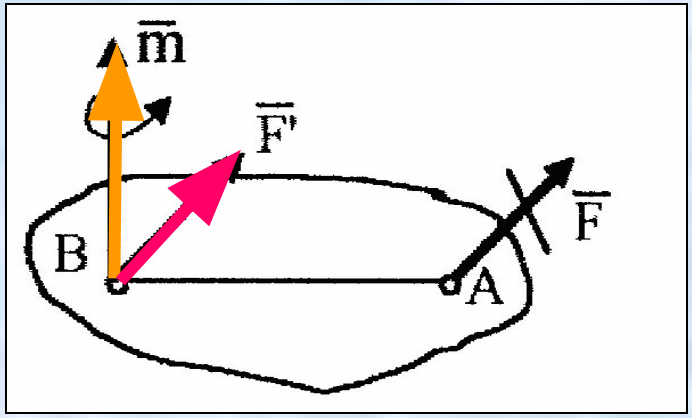
Введение в статику

ЛЕКЦИЯ 3
План:

3.1. Теорема о параллельном переносе силы.
3.2. Приведение системы сил к центру. Главный вектор и главный момент системы сил

Теорема о параллельном переносе силы

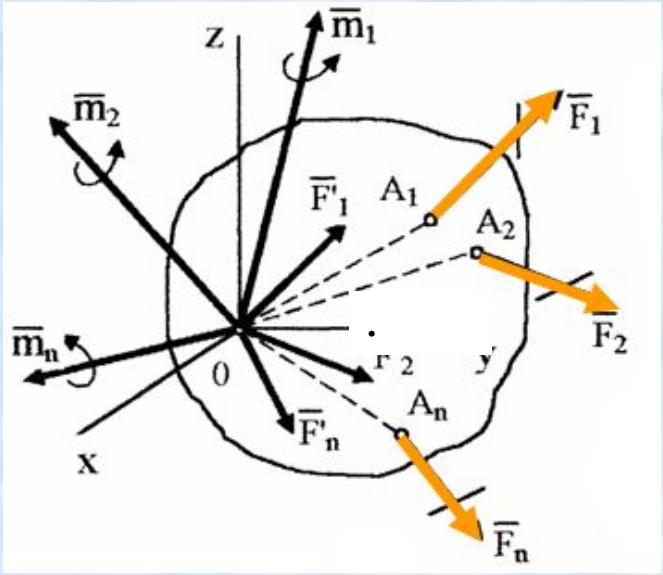




Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя её действия, переносить из данной точки в новый произвольный центр, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно нового центра

Приведение системы сил к центру

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n) = (\overline{F}_1', \overline{F}_2', \ldots, \overline{F}_n') + (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n)$$

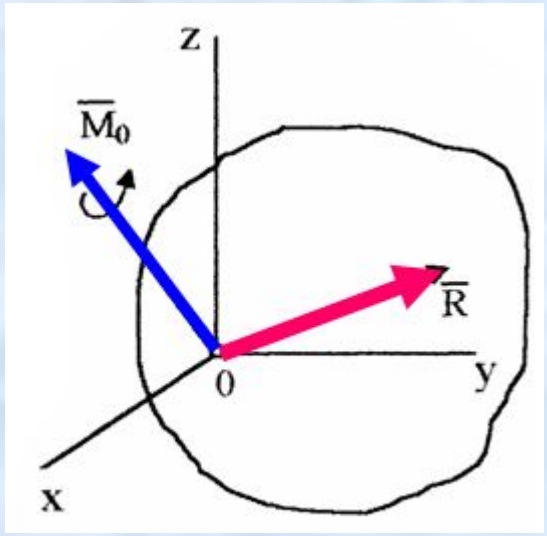


$\overline{F}_1' = \overline{F}_1$, и т д. $\quad \overline{m}_1 = \overline{m}_0(\overline{F}_1)$ и тт.д

$$\boxed{(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n) = \overline{R}, \overline{M}_o}$$

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k$$

$$\overline{M}_0 = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k)$$



$\overline{R}$ - **главный вектор системы сил;**

$\overline{M}_0$ - **главный момент системы сил относительно центра О**

Приведение системы сил к центру

Частные случаи приведения системы сил к центру:

$\overline{R} = 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$ — *данная система сил приводится к одной паре сил*

$\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_0 = 0$ — *данная система сил приводится к одной силе, т. е. к равнодействующей*

$\overline{R} = 0$, $\overline{M}_0 = 0$ — *данная система сил будет уравновешенной*

МЕХАНИКА

Модуль 1
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Условия равновесия

ЛЕКЦИЯ 4

План:

4.1. Теорема Вариньона.

4.2. Условия равновесия различных систем сил.

ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

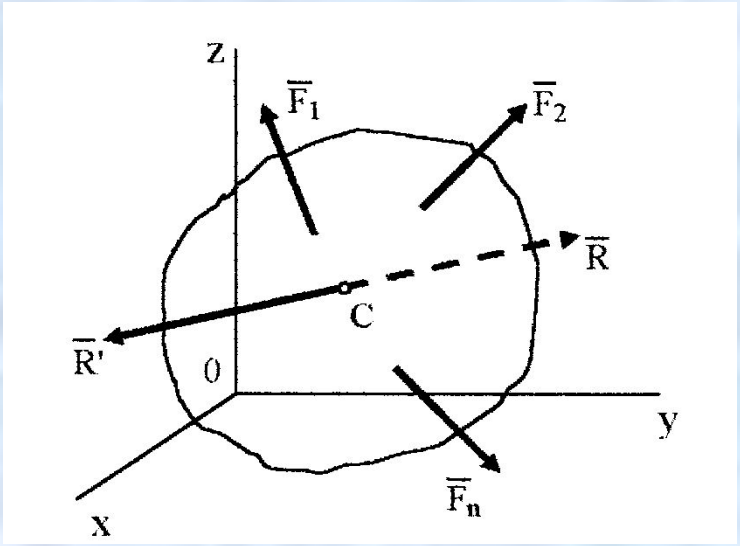
Пусть система сил приводится к равнодействующей $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n = \overline{R}$

Приложим в точке С силу $\overline{R}' = \overline{R}$

Система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n, \overline{R}'$
будет находиться в равновесии и для нее

$$\overline{M}_0 = 0 \quad \text{или} \quad \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k) + \overline{m}_0(\overline{R}') = 0$$

$$-\overline{m}_0(\overline{R}') = \overline{m}_0(\overline{R}) = \sum m_o(\overline{F}_k)$$



Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра О равен сумме моментов сил системы относительно того же центра

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие пространственной системы произвольно расположенных сил

$$\overline{R} = 0 \qquad \overline{M}_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & \sum m_x(\overline{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & \sum m_y(\overline{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{kz} &= 0, & \sum m_z(\overline{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

Равновесие пространственной системы параллельных сил

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_z(\overline{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны оси z

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие системы сходящихся сил

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k = 0$$

в геометрической форме: *необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из векторов сил, был замкнутым*

в аналитической форме:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0, \ или$$

$$R_x = 0, \ R_y = 0, \ R_z = 0,$$

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum F_{ky} = 0, \ \sum F_{kz} = 0$$

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие плоской системы произвольных сил

1

$$\sum F_{kx} = 0,$$
$$\sum F_{ky} = 0,$$
$$\sum m_0(\overline{F}_k) = 0$$

2

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0,$$
$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0,$$
$$\sum F_{kx} = 0$$

ось Ox, *не перпендикулярна* прямой AB

3

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0,$$
$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0,$$
$$\sum m_C(\overline{F}_k) = 0$$

центры A, B и C, *не лежат* на одной прямой

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие плоской системы параллельных сил

$$\sum F_{ky} = 0,$$
$$\sum m_0(\overline{F}_k) = 0$$

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны оси Oy

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0,$$
$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0$$

точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной векторам сил.

5.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Условия равновесия

ЛЕКЦИЯ 5

План:

5.1. Равновесие систем тел.

5.2. Равновесие тела при наличии трения

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ ТЕЛ

Внутренние связи – это связи, соединяющие части конструкции

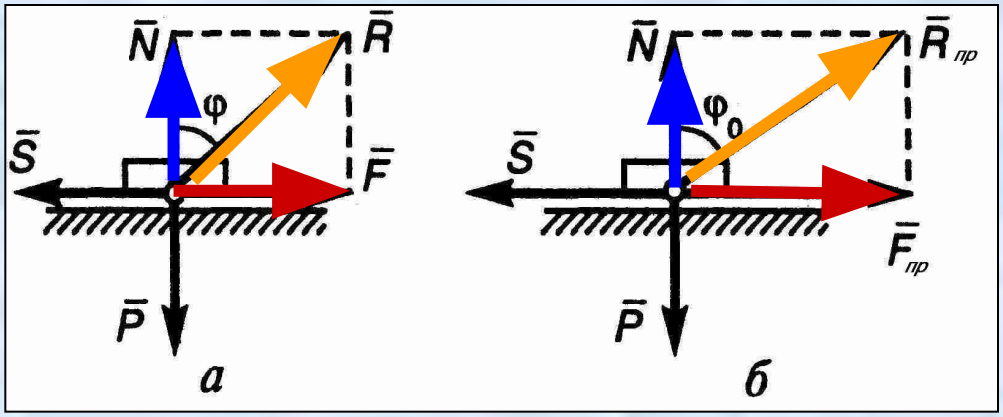
Два способа решения задач
на равновесие составной конструкции:

1 способ. Рассматривают равновесие всей конструкции как единое целое (не учитывая реакции внутренних связей) и дополнительно равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции с учетом реакций внутренних связей.

2 способ. Конструкцию расчленяют на части и рассматривают равновесие каждой части, учитывая при этом реакции внутренних связей. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Сцепление и трение скольжения



Условие равновесия:

$$S \le f_0 N$$

$$\bar{F}_{\text{ТР}} = -\bar{S}$$

$$0 \le F_{\text{ТР}} \le F_{\text{ПР}}.$$

$$F_{\text{ПР}} = f_0 N$$

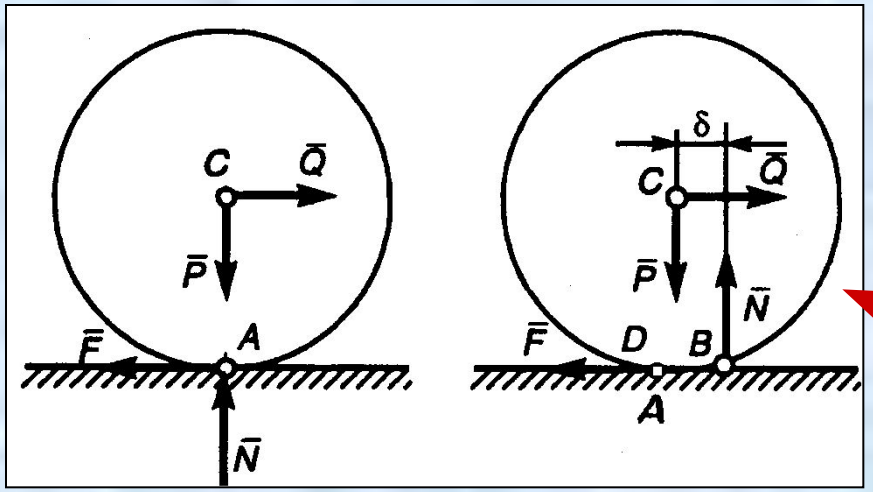
ϕ_0 - *угол трения покоя*

$$\text{tg}\phi_0 = F_{\text{ПР}} / N.$$

$$\text{tg}\phi_0 = f_0.$$

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Трение качения



$$\Sigma m_A(\overline{F}_k) = 0$$

$$N\delta - Q_{\text{ПР}} R = 0$$

$$Q_{\text{ПР}} = (\delta / R)\, N.$$

Условие равновесия:

$$Q \le \frac{\delta}{R} N$$

$$Q \le f_0 N$$

$(\overline{Q}, \overline{F})$ – пара сил

$(\overline{N}\ \overline{P})$ – пара сил

6.1

МЕХАНИКА

Модуль 1
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

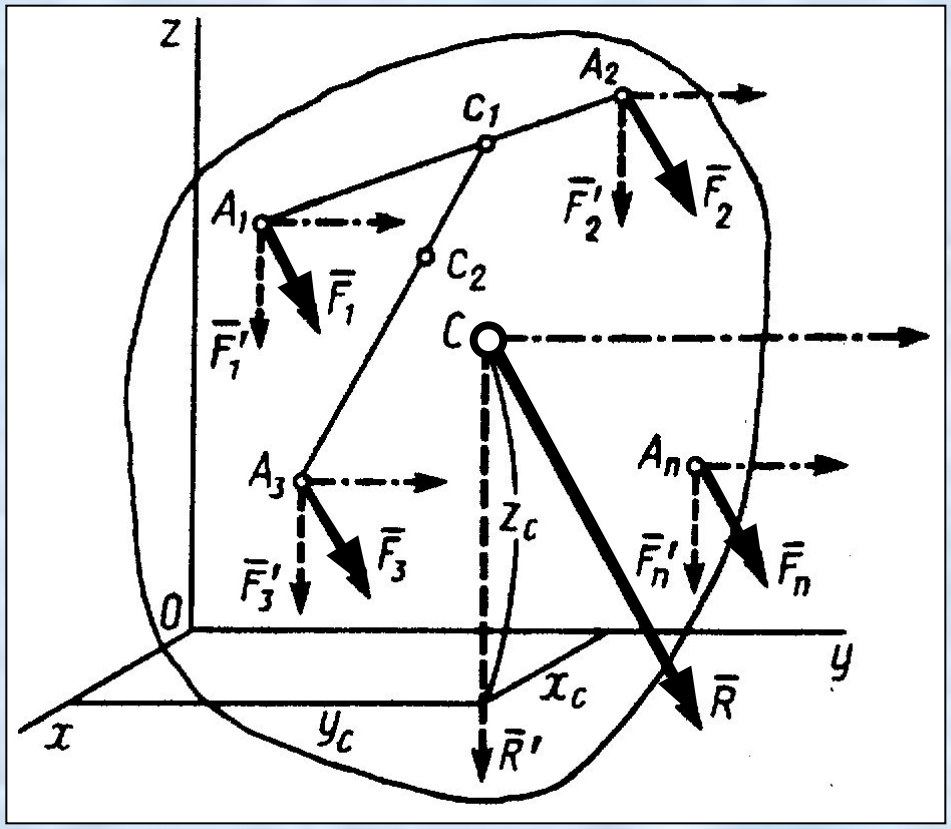
СТАТИКА

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

ЛЕКЦИЯ 5
План:

6.1. Центр параллельных сил
6.2. Центр тяжести твердого тела

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ



$$m_y(\overline{R'}) = \sum m_y(\overline{F_k'}) = R \cdot x_C$$

$$R\,x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots + F_n x_n$$

$$R\,x_C = \Sigma F_k x_k.$$

Координаты центра параллельных сил:

$$x_c = \frac{\sum F_k x_k}{R}$$

$$y_c = \frac{\sum F_k y_k}{R}$$

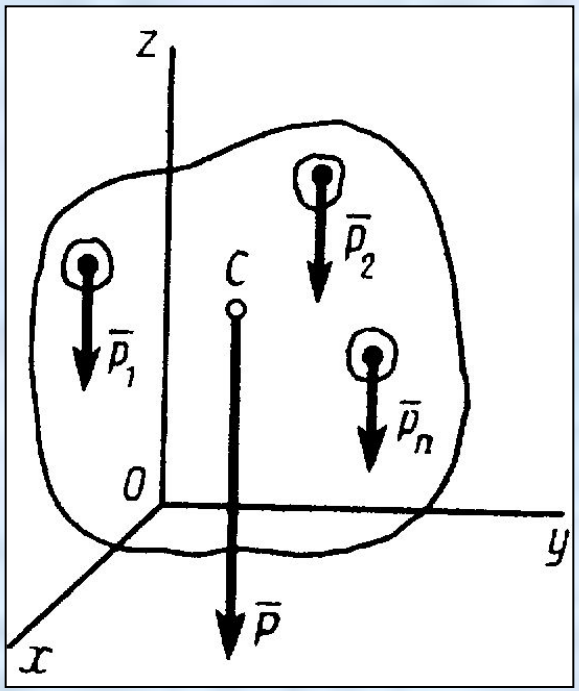
$$z_c = \frac{\sum F_k z_k}{R}$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Силовое поле – это область, в которой на каждую материальную точку действует сила, зависящая от положения этой точки,

Поле тяжести вблизи земной поверхности можно назвать однородным полем тяжести.

Модуль равнодействующей сил тяжести называется ***весом тела P***



Координаты центра тяжести:

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P} \qquad y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P} \qquad z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Центр тяжести некоторых однородных тел

1 Для однородного объемного твердого тела (вес пропорционален объему):

$$x_C = \frac{\sum V_k x_k}{V} \qquad y_C = \frac{\sum V_k y_k}{V} \qquad z_C = \frac{\sum V_k z_k}{V}$$

2. Для тела, представляющего собой однородную пластину (вес пропорционален площади):

$$x_C = \frac{\sum S_k x_k}{S} \qquad y_C = \frac{\sum S_k y_k}{S} \qquad z_C = \frac{\sum S_k z_k}{S}$$

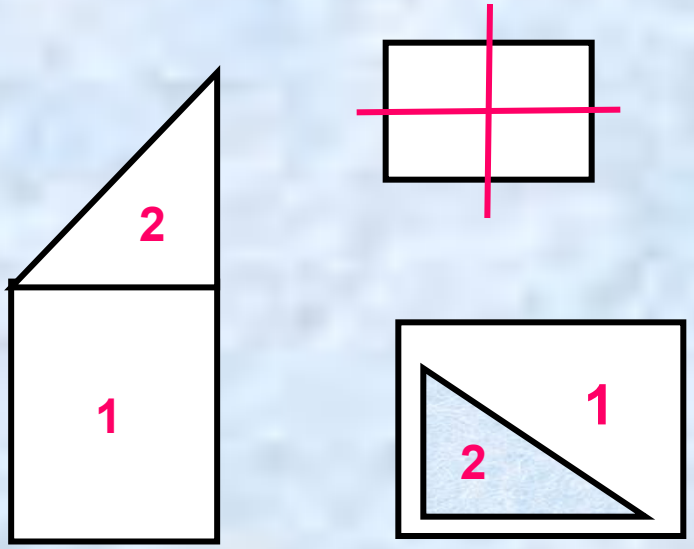
3. Координаты центра тяжести тонкого прямого стержня (вес пропорционален длине):

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L} \qquad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L} \qquad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L}$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Способы нахождения положения центров тяжести тел сложной формы:

- **Способ симметрии**
- **Способ разбиения**
- **Способ дополнения**
- **Способ интегрирования**



$$x_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} x dV, \qquad y_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} y dV, \qquad z_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} z dV.$$