

МЕХАНИКА

Теоретическая механика.

Модуль 1

Раздел 1 – СТАТИКА

ВВЕДЕНИЕ В СТАТИКУ

ЛЕКЦИЯ 1

ЛЕКЦИЯ 2

ЛЕКЦИЯ 3

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

ЛЕКЦИЯ 4

ЛЕКЦИЯ 5

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

ЛЕКЦИЯ 6

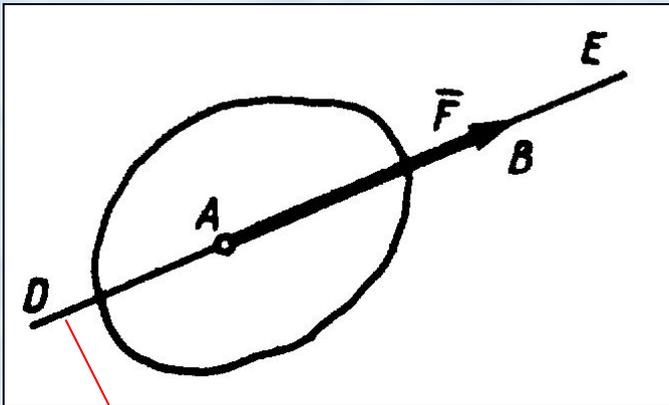
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Статика - раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и условиях равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Равновесие - это состояние покоя тела по отношению к другим телам, например по отношению к Земле.

Абсолютно твердое тело - такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается постоянным.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ



линия
действия
силы

Сила в механике – это величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия материальных тел.

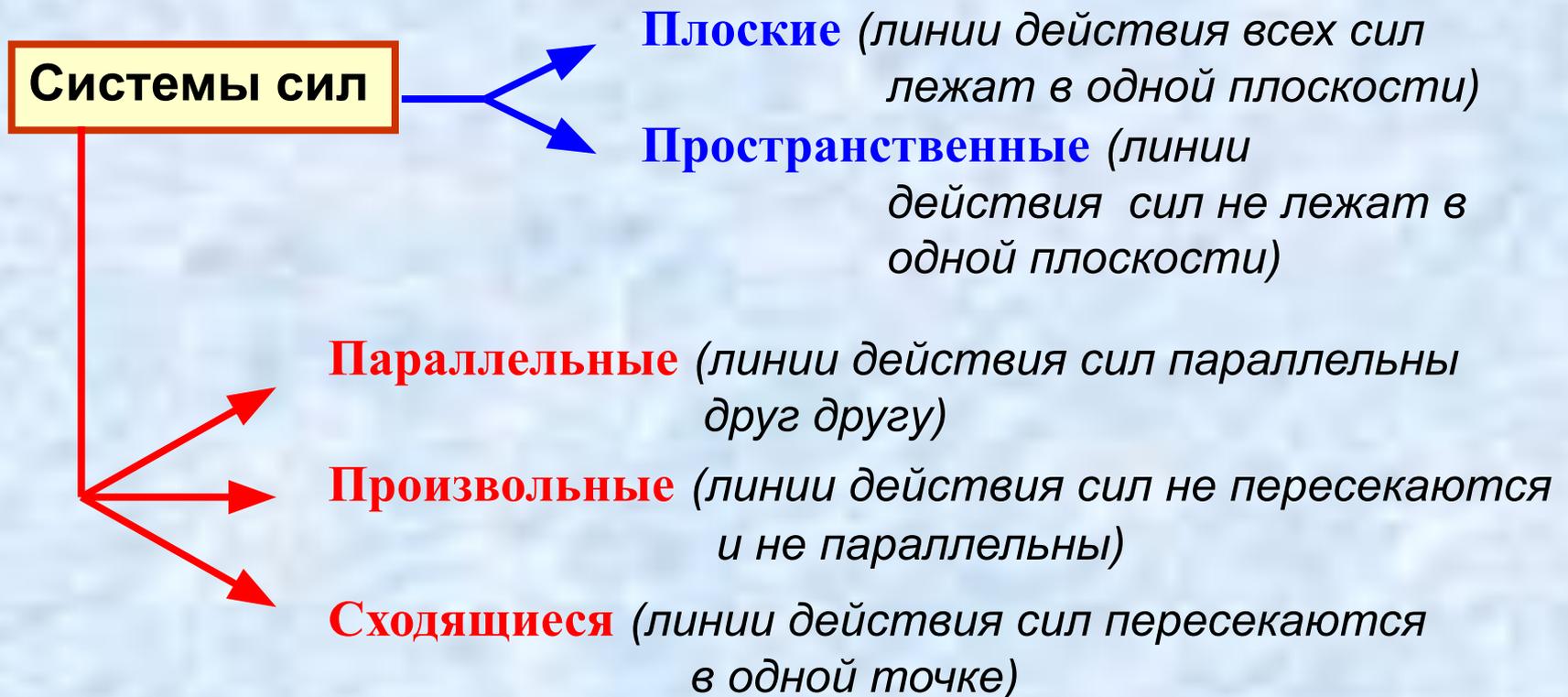
Действие силы на тело определяется:

- **модулем** силы;
- **направлением** вектора силы;
- **точкой приложения** вектора силы.

Основная единица измерения силы - 1 ньютон (1 Н).

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Система сил - совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Эквивалентными называются две системы сил, приводящие тело к одному и тому же кинематическому состоянию.

Уравновешенная (эквивалентная нулю) – это такая система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое.

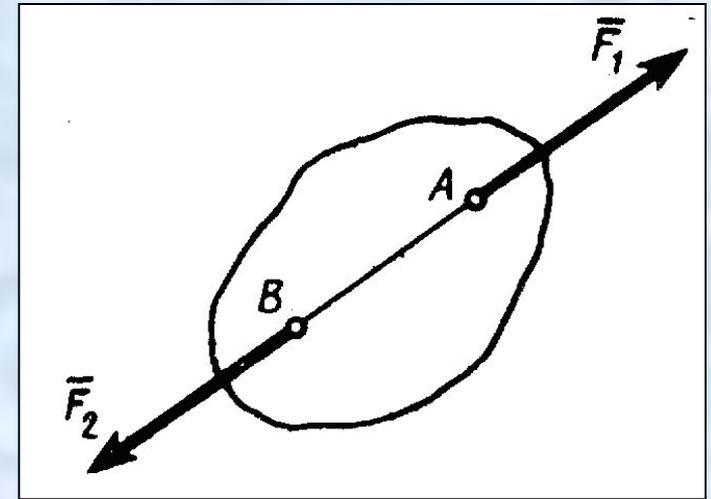
Равнодействующей системы сил, называется сила, эквивалентная данной системе сил.

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется **сосредоточенной**.

Силы, действующие на все точки объема или части поверхности тела, называются **распределенными**.

АКСИОМЫ СТАТИКИ

1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны



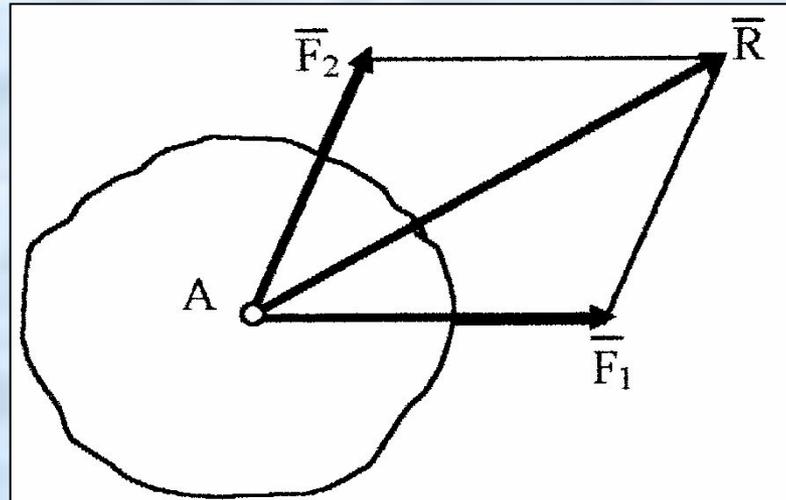
2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменяется, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил

Следствие: действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.

АКСИОМЫ СТАТИКИ

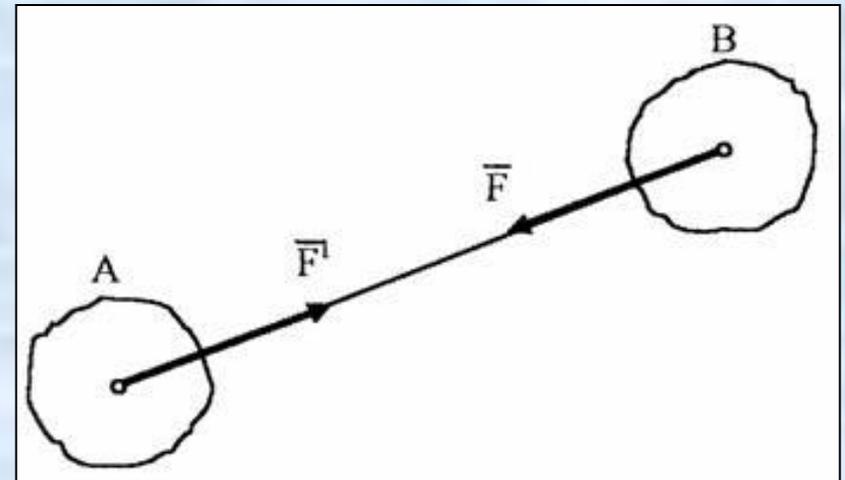
3. Закон параллелограмма сил: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

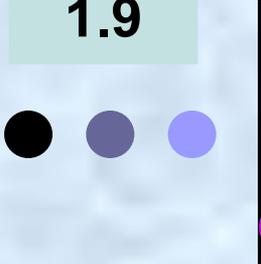


АКСИОМЫ СТАТИКИ

4. Закон равенства действия и противодействия: *при всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направлению противодействие, т.е.*



5. Принцип отвердевания: *равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием уравновешенной системы сил, возможно только при его «отвердевании»*



СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Свободным называется тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве

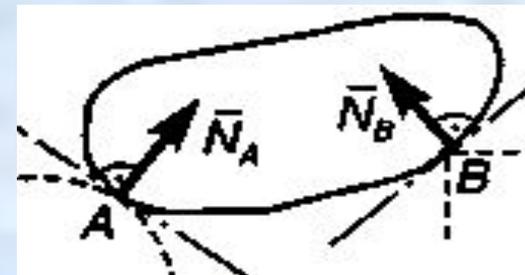
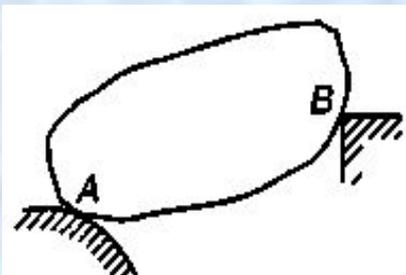
Несвободным называется тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним, тела (**связи**)

Реакция связи – это сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется.

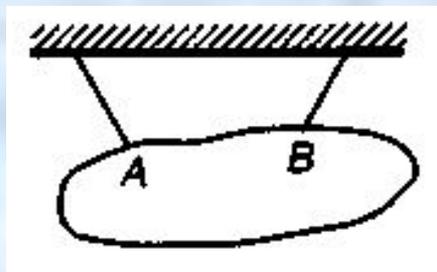
Принцип освобожденности от связей: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу

СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

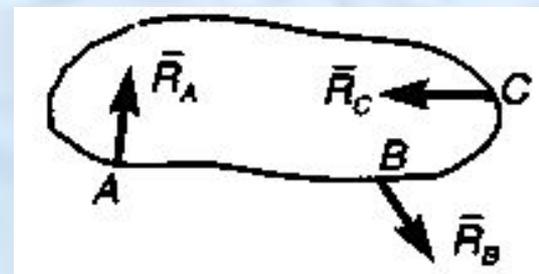
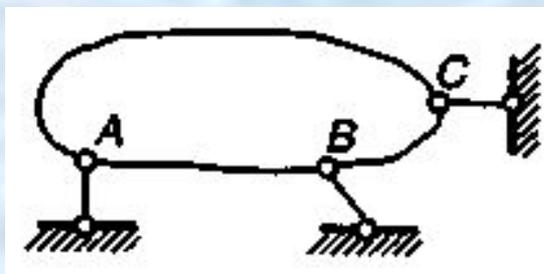
Гладкая
поверхность



Гибкая связь

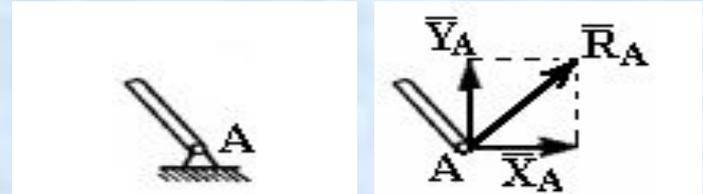


Шарнирный
стержень

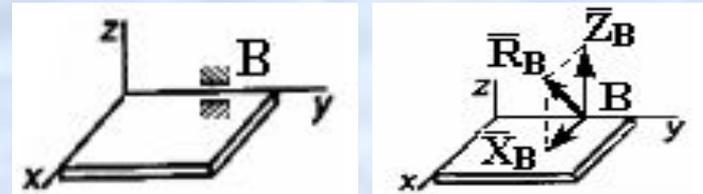


СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

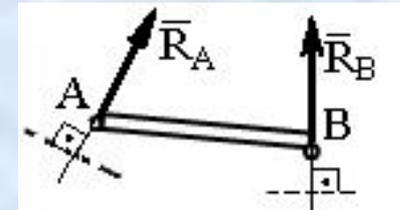
Шарнирно-неподвижная опора



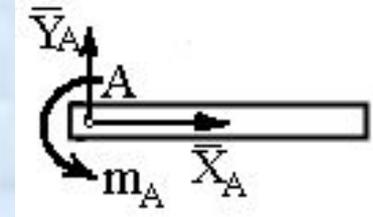
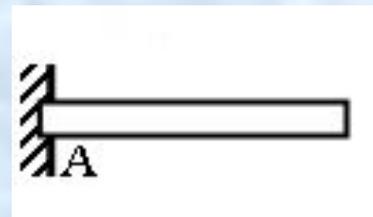
Цилиндрический шарнир



Шарнирно-подвижная опора



Жесткая заделка



Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Введение в статику

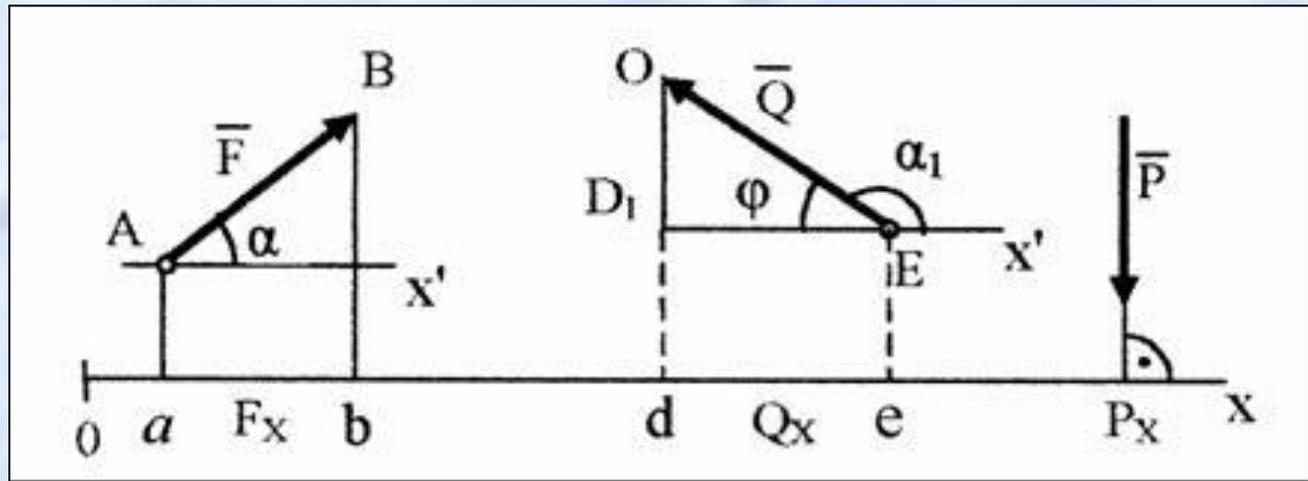
ЛЕКЦИЯ 2

План:

- 2.1. Проекция сил.
- 2.2. Момент силы относительно точки и относительно оси.
- 2.3. Пара сил, момент пары

ПРОЕКЦИИ СИЛ

Проекция силы на ось - алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси:



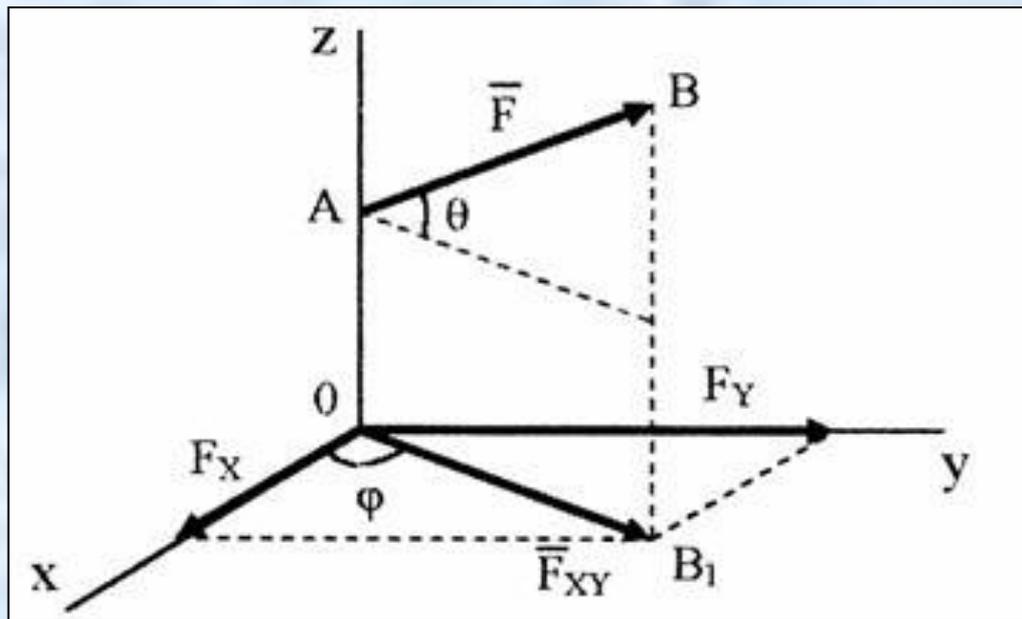
$$F_x = F \cos \alpha = ab;$$

$$Q_x = Q \cos \alpha_1 = -Q \cos \phi = -de$$

$$P_x = 0$$

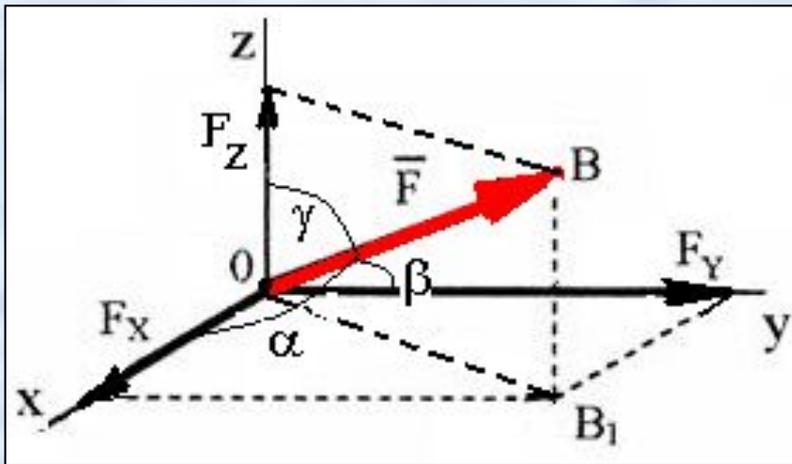
ПРОЕКЦИИ СИЛ

Проекция силы на плоскость это вектор, заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость



ПРОЕКЦИИ СИЛ

Силу можно задавать ее проекциями F_x , F_y , F_z на координатные оси:



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos \alpha = F_x / F,$$

$$\cos \beta = F_y / F,$$

$$\cos \gamma = F_z / F$$

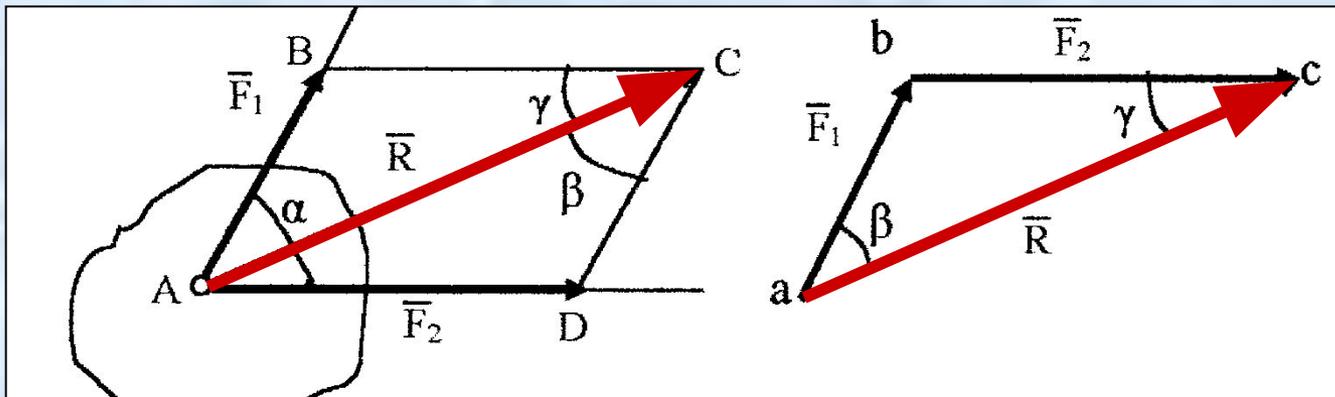
СПОСОБЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛ

Введение в статику

1. Сложение двух сил

Величину, равную геометрической сумме сил системы, называют **главным вектором этой системы сил**

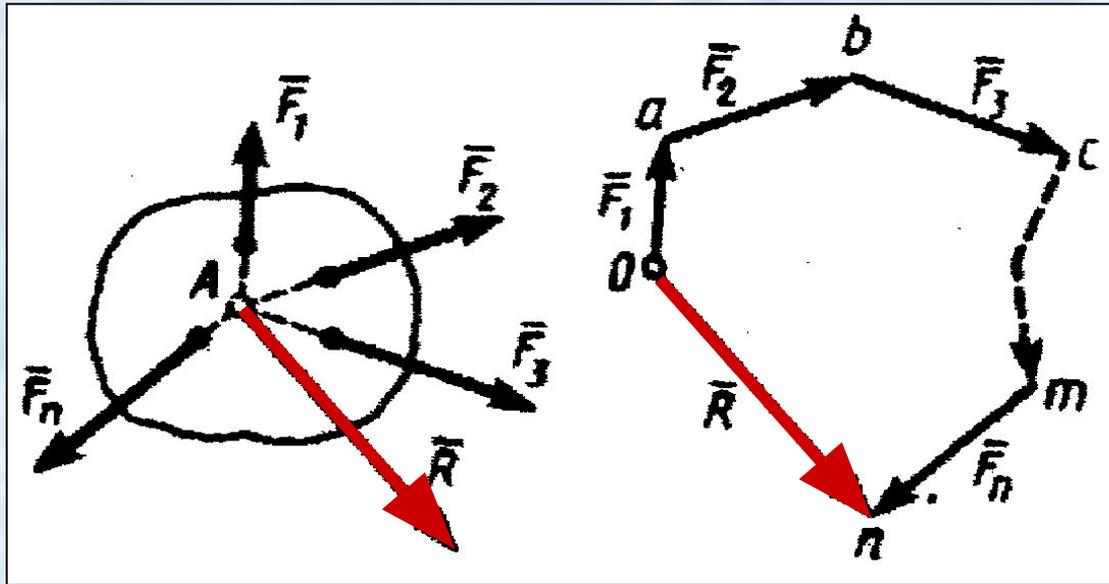
$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$



СПОСОБЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛ

2. Сложение системы сил

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_k$$



Аналитический способ сложения сил

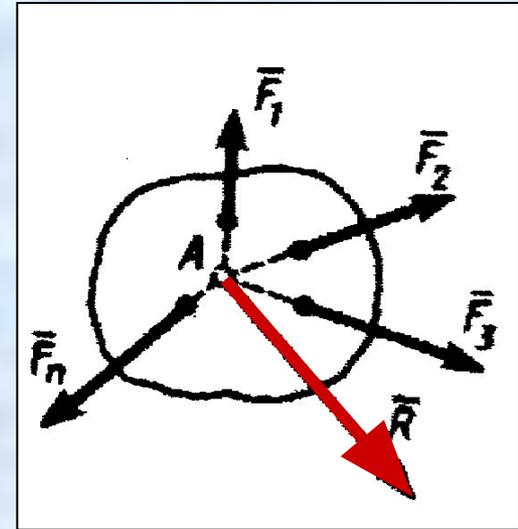
$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx}; \\ R_y &= \sum F_{ky}; \\ R_z &= \sum F_{kz} \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$\cos \alpha = R_x / R,$$

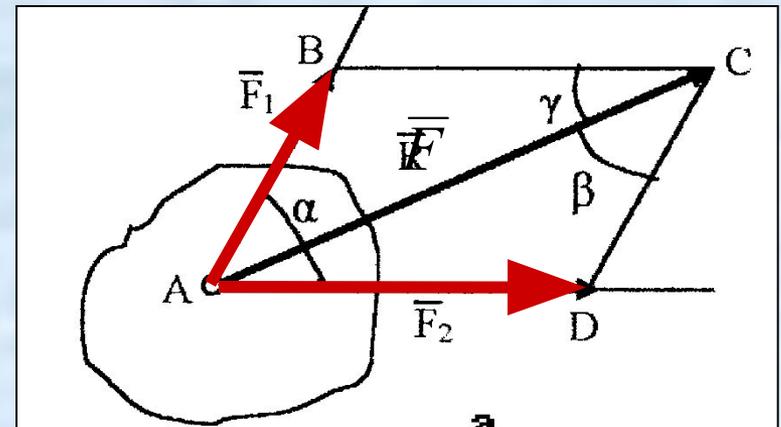
$$\cos \beta = R_y / R,$$

$$\cos \gamma = R_z / R.$$



Разложение сил

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

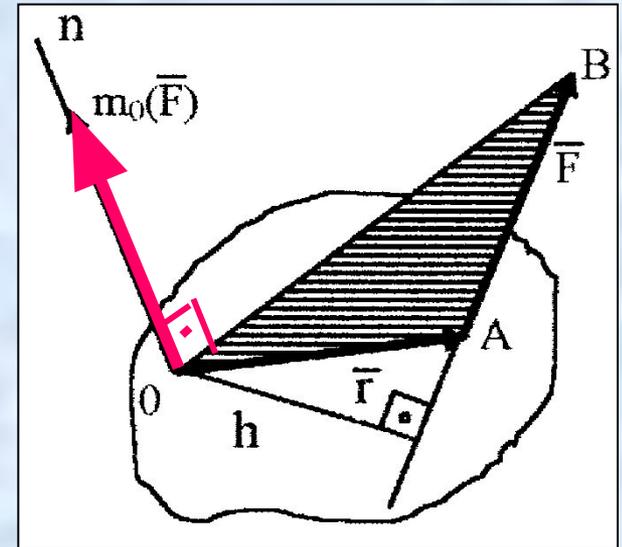


Момент силы относительно точки

Векторный момент силы относительно центра O - это приложенный в центре O вектор

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

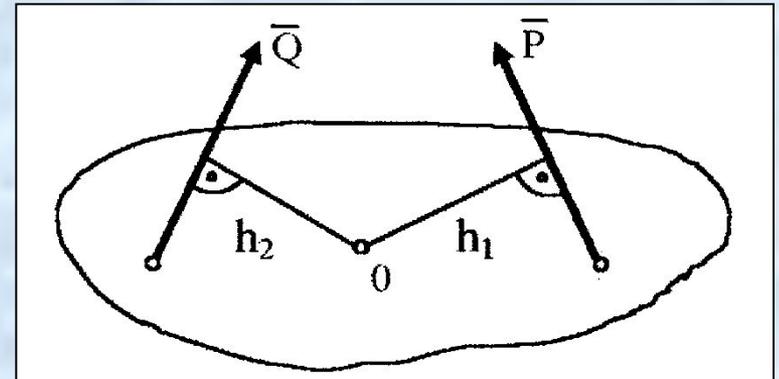
где $\vec{OA} = \vec{r}$ - радиус-вектор точки A , проведенный из центра O .



Алгебраический момент силы относительно центра

$$m_0(\vec{F}) = \pm F h.$$

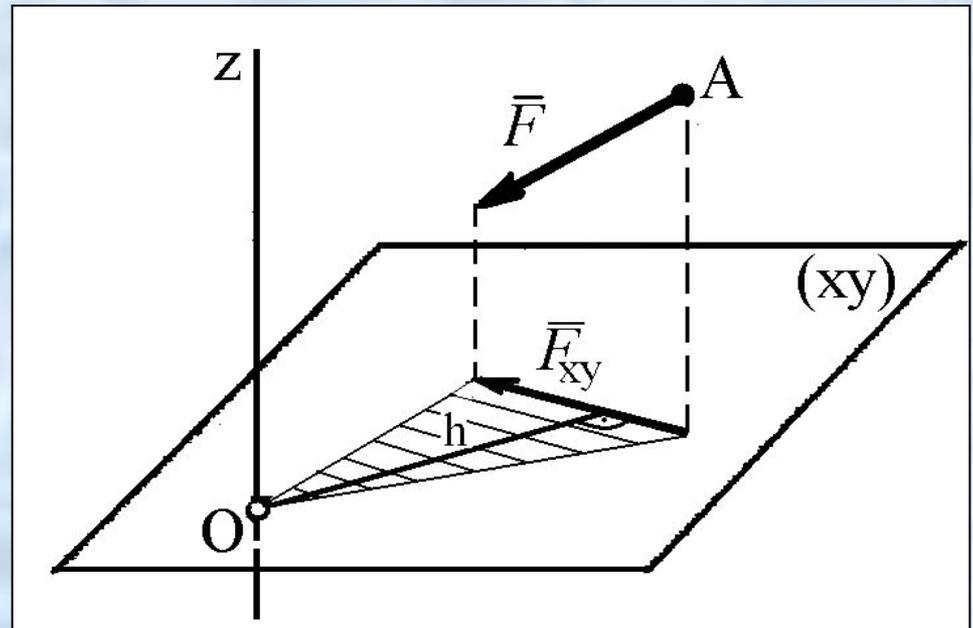
$$m_0(\vec{P}) = P h_1, \quad m_0(\vec{Q}) = -Q h_2$$



Момент силы относительно оси

- это момент проекции вектора силы на плоскость перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с этой плоскостью

$$m_z(\bar{F}) = \pm |F_{xy}| h$$



Пара сил, момент пары

Плоскость действия пары - плоскость, проходящая через линии действия сил пары

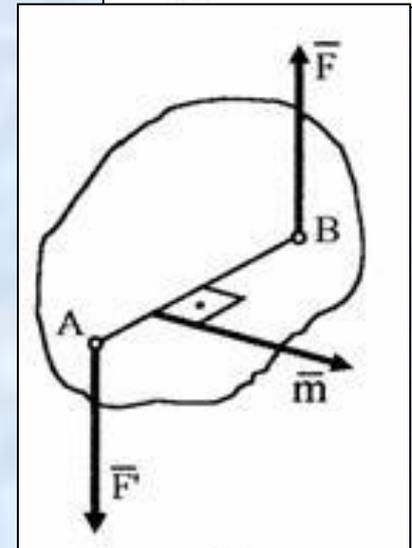
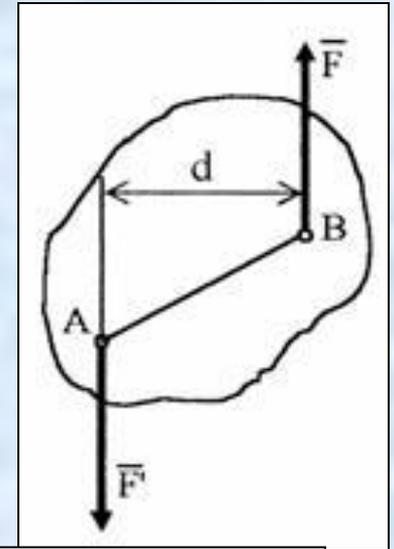
Алгебраический момент пары

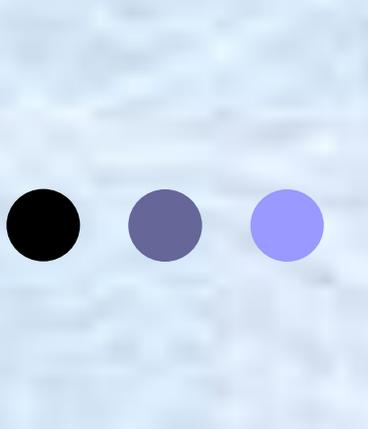
$$m = \pm F d$$

Плечо пары d - кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары

Векторный момент пары - это вектор \vec{m} , направленный перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки

Этот вектор называется **скользящим**





Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

СТАТИКА

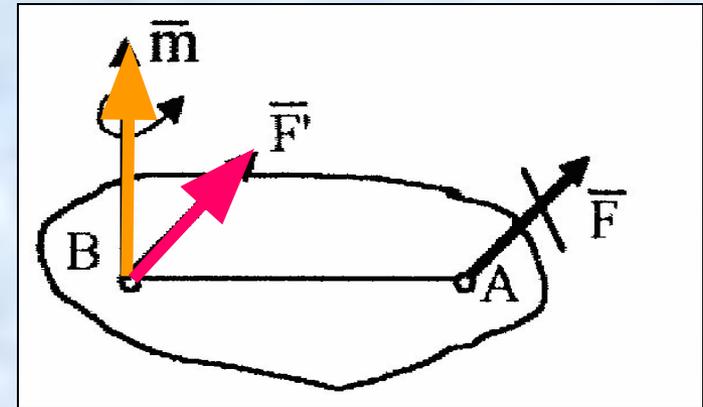
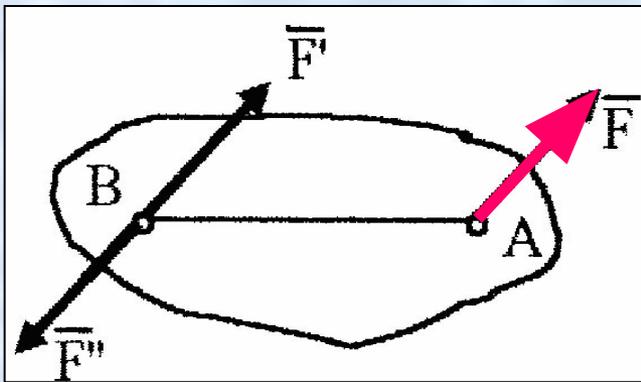
Введение в статику

ЛЕКЦИЯ 3

План:

- 3.1. Теорема о параллельном переносе силы.
- 3.2. Приведение системы сил к центру. Главный вектор и главный момент системы сил

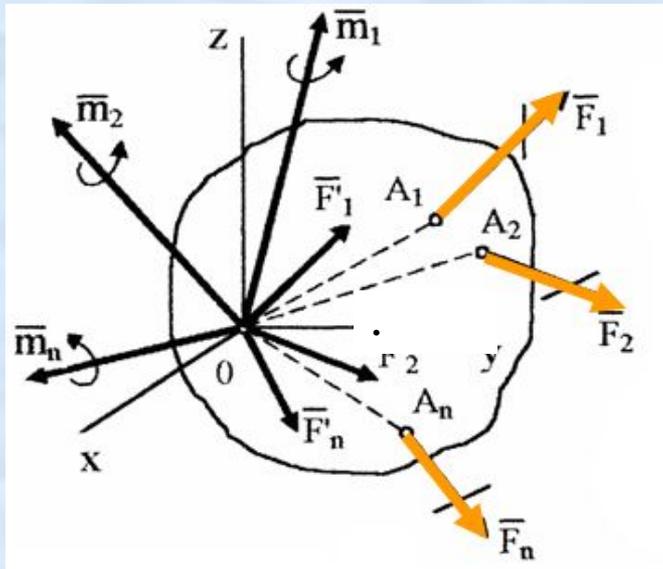
Теорема о параллельном переносе силы



Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя её действия, переносить из данной точки в новый произвольный центр, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно нового центра

Приведение системы сил к центру

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) = (\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n) + (\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n)$$



$$\bar{F}'_1 = \bar{F}_1, \text{ и т.д. } \bar{m}_1 = \bar{m}_0(\bar{F}_1) \text{ и т.д.}$$

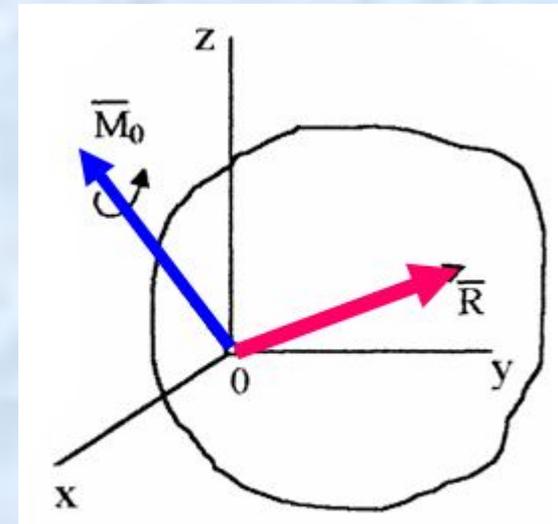
$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) = \bar{R}, \bar{M}_0$$

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k$$

$$\bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k)$$

\bar{R} - **главный вектор** системы сил;

\bar{M}_0 - **главный момент** системы сил относительно центра O



Приведение системы сил к центру

Частные случаи приведения системы сил к центру:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_0 \neq 0 \end{array} \right\} \text{данная система сил приводится к одной паре сил}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R} \neq 0 \\ \bar{M}_0 = 0 \end{array} \right\} \text{данная система сил приводится к одной силе, т. е. к равнодействующей}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_0 = 0 \end{array} \right\} \text{данная система сил будет уравновешенной}$$

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

СТАТИКА

Условия равновесия

ЛЕКЦИЯ 4

План:

- 4.1. Теорема Вариньона.
- 4.2. Условия равновесия различных систем сил.

ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

Пусть система сил
приводится к
равнодействующей

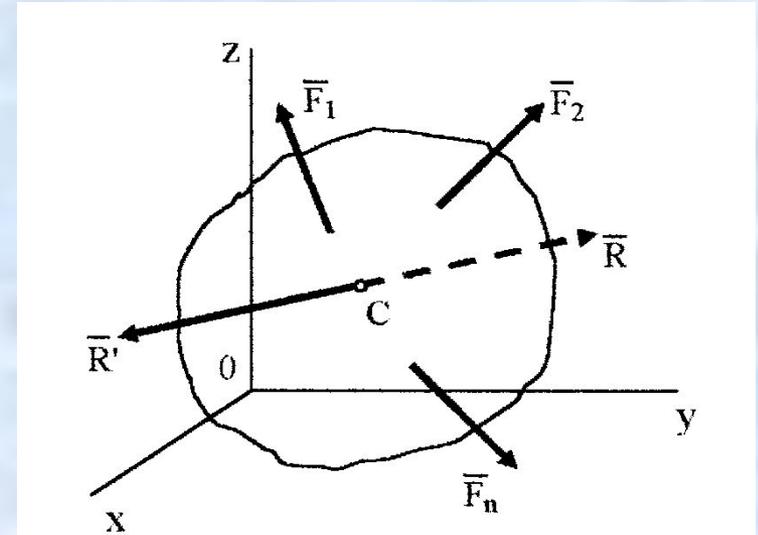
$$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n = \bar{R}$$

Приложим в точке C силу $\bar{R}' = \bar{R}$

Система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}'$
будет находиться в равновесии и для нее

$$\bar{M}_0 = 0 \quad \text{или} \quad \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) + \bar{m}_0(\bar{R}') = 0$$

$$-\bar{m}_0(\bar{R}') = \bar{m}_0(\bar{R}) = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k)$$



Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра O равен сумме моментов сил системы относительно того же центра

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

**Равновесие
пространственной
системы произвольно
расположенных сил**

$$\bar{R} = 0 \quad \bar{M}_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & \sum m_x(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & \sum m_y(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{kz} &= 0, & \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

**Равновесие
пространственной
системы параллельных
сил**

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

*В случае, когда все
действующие на тело силы
параллельны оси z*

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие системы сходящихся сил

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k = 0$$

в геометрической форме: необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из векторов сил, был замкнутым

в аналитической форме:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0, \text{ или}$$

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0$$

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие плоской системы произвольных сил

①

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_O(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{kx} &= 0 \end{aligned}$$

ось Ox , **не**
перпендикулярна
прямой AB

③

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned}$$

центры A , B и C ,
не лежат
на одной прямой

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие плоской системы параллельных сил

$$\begin{aligned}\sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_0(\bar{F}_k) &= 0\end{aligned}$$

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны оси Oy

$$\begin{aligned}\sum m_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) &= 0\end{aligned}$$

точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной векторам сил.

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

СТАТИКА

Условия равновесия

ЛЕКЦИЯ 5

План:

- 5.1. Равновесие систем тел.
- 5.2. Равновесие тела при наличии трения

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ ТЕЛ

Внутренние связи – это связи, соединяющие части конструкции

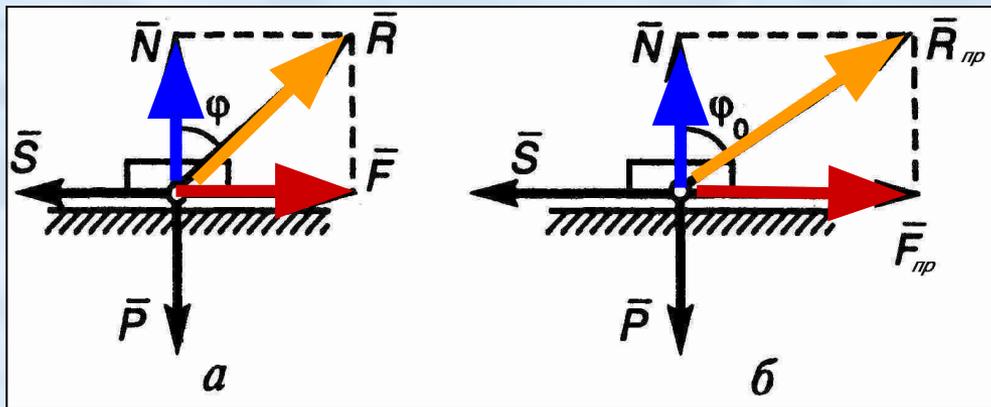
*Два способа решения задач
на равновесие составной конструкции:*

1 способ. Рассматривают равновесие всей конструкции как единое целое (не учитывая реакции внутренних связей) и дополнительно равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции с учетом реакций внутренних связей.

2 способ. Конструкцию расчленяют на части и рассматривают равновесие каждой части, учитывая при этом реакции внутренних связей. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Сцепление и трение скольжения



Условие
равновесия:

$$S \leq f_0 N$$

$$\bar{F}_{\text{ТР}} = -\bar{S}$$

ϕ_0 - угол трения покоя

$$0 \leq F_{\text{ТР}} \leq F_{\text{ПР}}$$

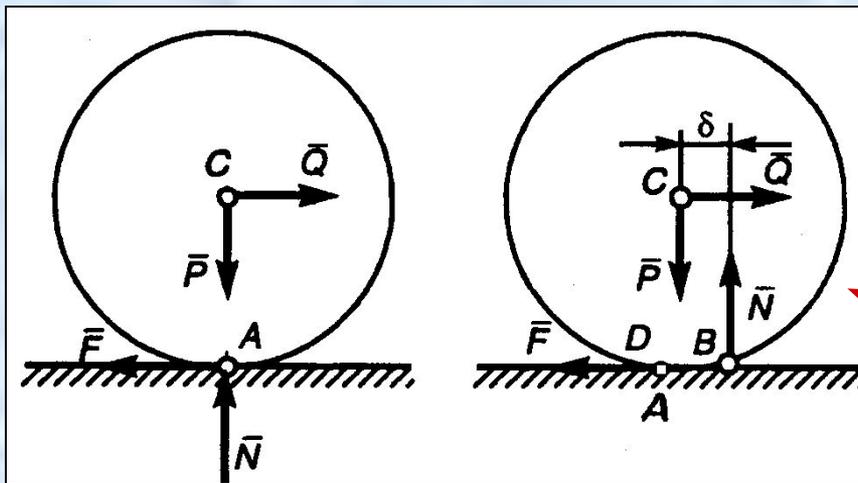
$$\text{tg} \phi_0 = F_{\text{ПР}} / N.$$

$$F_{\text{ПР}} = f_0 N$$

$$\text{tg} \phi_0 = f_0.$$

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Трение качения



(\bar{Q}, \bar{F}) – пара сил

(\bar{N}, \bar{P}) – пара сил

$$\Sigma m_A(\bar{F}_k) = 0$$

$$N\delta - Q_{\text{ПР}}R = 0$$

$$Q_{\text{ПР}} = (\delta / R) N.$$

Условие равновесия:

$$Q \leq \frac{\delta}{R} N$$

$$Q \leq f_0 N$$

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

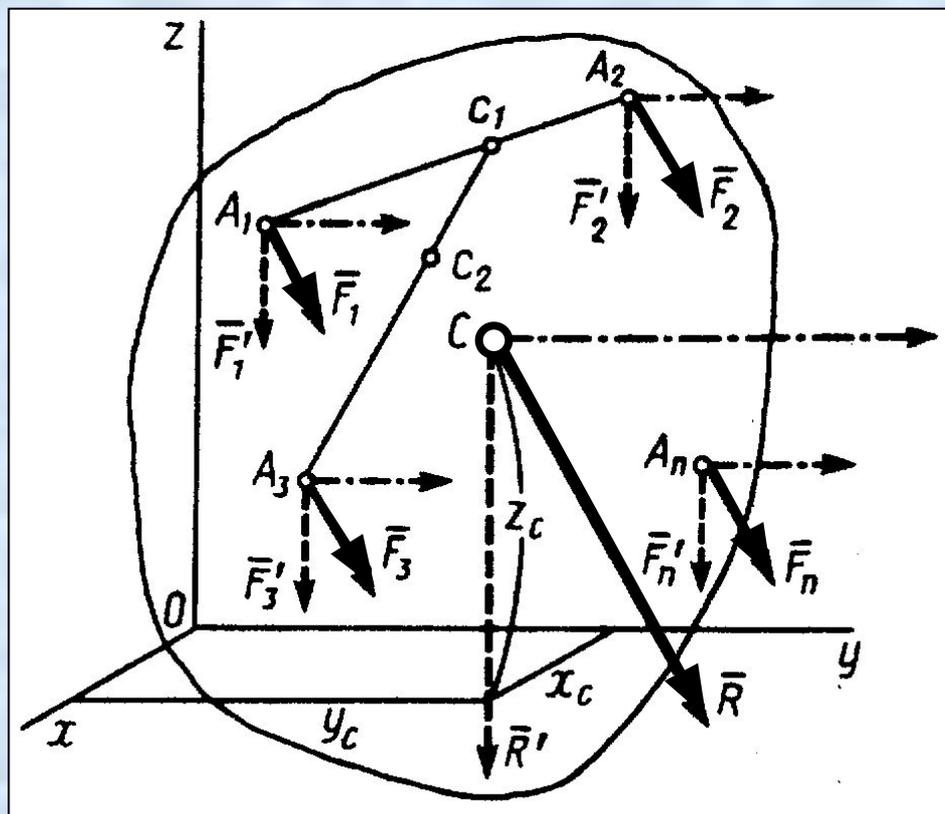
ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

ЛЕКЦИЯ 5

План:

- 6.1. Центр параллельных сил
- 6.2. Центр тяжести твердого тела

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ



$$m_y(\bar{R}') = \sum m_y(\bar{F}'_k) = R \cdot x_C$$

$$R x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n$$

$$R x_C = \sum F_k x_k.$$

Координаты центра
параллельных сил:

$$x_c = \frac{\sum F_k x_k}{R}$$

$$y_c = \frac{\sum F_k y_k}{R}$$

$$z_c = \frac{\sum F_k z_k}{R}$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

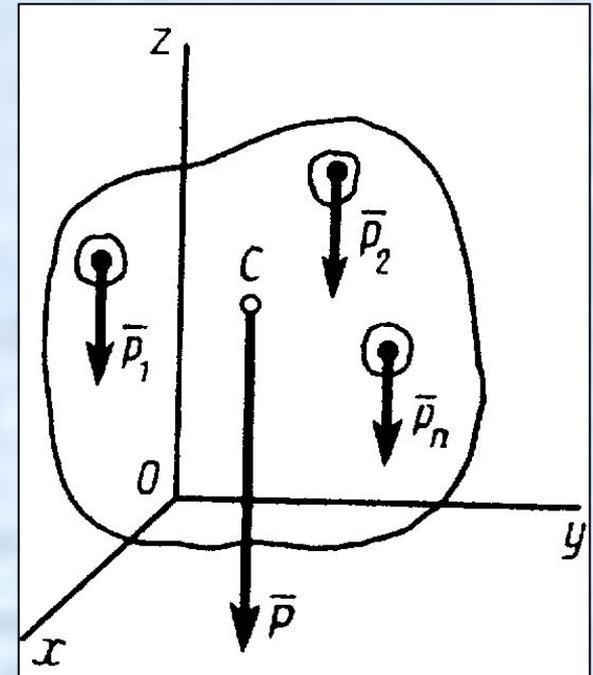
Силовое поле – это область, в которой на каждую материальную точку действует сила, зависящая от положения этой точки,

Поле тяжести вблизи земной поверхности можно назвать **однородным полем тяжести**.

Модуль равнодействующей сил тяжести называется **весом тела P**

Координаты центра тяжести:

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P} \quad y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P} \quad z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}$$



ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Центр тяжести некоторых однородных тел

1 Для однородного объемного твердого тела (вес пропорционален объему):

$$x_C = \frac{\sum V_k x_k}{V} \quad y_C = \frac{\sum V_k y_k}{V} \quad z_C = \frac{\sum V_k z_k}{V}$$

2. Для тела, представляющего собой однородную пластину (вес пропорционален площади):

$$x_C = \frac{\sum S_k x_k}{S} \quad y_C = \frac{\sum S_k y_k}{S} \quad z_C = \frac{\sum S_k z_k}{S}$$

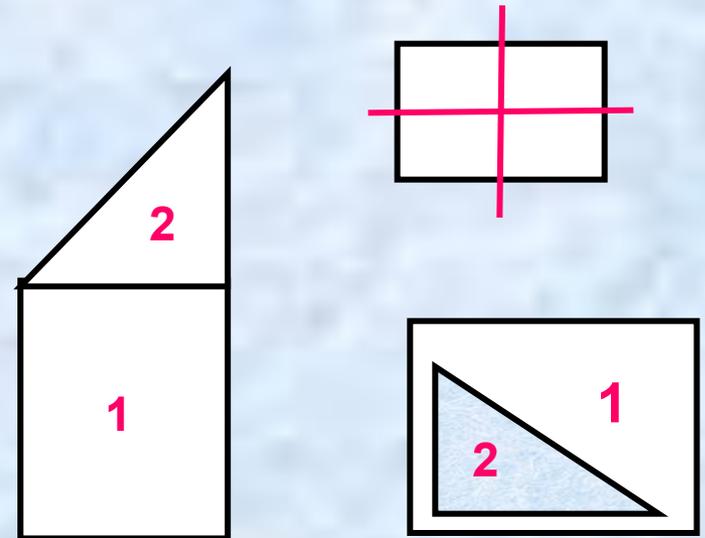
3. Координаты центра тяжести тонкого прямого стержня (вес пропорционален длине):

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L} \quad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L} \quad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L}$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Способы нахождения положения центров тяжести тел сложной формы:

- Способ симметрии
- Способ разбиения
- Способ дополнения
- Способ интегрирования



$$x_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV,$$

$$y_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV,$$

$$z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV.$$