

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

КРУПИНА НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА

МОСКВА
2021

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Обозначим матрицу коэффициентов перед неизвестными: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

вектор неизвестных: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, вектор свободных членов: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

Тогда систему линейных уравнений можно записать в равносильной матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

Это равенство называется простейшим матричным уравнением. Такое уравнение решается следующим образом. Пусть матрица \mathbf{A} – невырожденная (т.е. $|\mathbf{A}| \neq 0$), тогда существует обратная матрица \mathbf{A}^{-1} . Умножив на нее обе части уравнения, получим $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$. Поскольку $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$, находим

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Пример. Решить матричным методом систему уравнений:
$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу A^{-1} :

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Находим матрицу X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение системы: $x = 1; y = 2; z = 3.$

Метод Крамера для решения систем линейных уравнений

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных,

называется *определителем системы*.

Теорема Крамера. Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Это решение может быть найдено по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad \text{где}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Пример. Решить систему уравнений методом Крамера:
$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

Элементарные преобразования систем

- 1) Умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число
- 2) Сложение и вычитание уравнений
- 3) Перестановка уравнений системы местами.
- 4) Исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю

Метод Гаусса

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в том, что систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (системы называются эквивалентными, если множества их решений совпадают). Эти действия называются прямым ходом. Затем из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases} \quad , \text{откуда получаем: } x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса
$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } z = 3; y = 2; x = 1.$$

Пример 1.6. Решить систему уравнений
$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ по формулам}$$

Крамера.

Решение. Выпишем матрицу системы $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ и вычислим ее

$$\text{определитель } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 12 + 1 - 16 + 9 = 14 \neq 0.$$

Значит, система имеет единственное решение. Для его нахождения вычисляем вспомогательные определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, заменяя в определителе Δ 1, 2 и 3-й столбцы столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

По формулам Крамера находим: $x_1 = \frac{14}{14} = 1$; $x_2 = \frac{0}{14} = 0$; $x_3 = \frac{-14}{14} = -1$.

1.26. Вычислить определители, пользуясь свойствами определителей:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -5 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\text{ж)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\text{з)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ 200 & -200 & 0 & 1600 \\ 19 & 20 & 31 & 190 \\ 1991 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\text{и)} \begin{vmatrix} 365 & 275 & 569 \\ 3 & 3 & 3 \\ 362 & 272 & 565 \end{vmatrix};$$

$$\text{к)} \begin{vmatrix} 2401 & 1986 \\ 2402 & 1987 \end{vmatrix}.$$

1.30. При каком значении α следующие определители равны нулю:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3-\alpha & 2 \\ 2 & -\alpha \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 3-\alpha & 0 & 0 \\ 2 & -\alpha & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & \alpha \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & \alpha \end{vmatrix}?$$

1.46. Пользуясь правилом Крамера, решить следующие системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 7y = 2, \\ 2x + 5y = 1; \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 4x - 3y - 1 = 0, \\ x + 3y - 4 = 0; \end{cases}; \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 3; \end{cases};$$

$$\text{г) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}; \quad \text{д) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases};$$

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10; \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y + 3z = 0, \\ 2x + 3y - z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$$