ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

КРУПИНА НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА

МОСКВА
2021

Системы линейных уравнений

В общем виде систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными можно записать:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Числа a_{ij} называются *коэффициентами системы* b_i – *свободными членами*; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *неизвестными*.

Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система называется ***однородной***, в противном случае она называется ***неоднородной***.

Решением системы линейных уравнений называется любая совокупность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которая будучи подставлена в систему вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращает все уравнения в верные тождества.

Система линейных уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение и ***несовместной***, если решений нет.

Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Система уравнений называется ***невырожденной***, если ее определитель отличен от нуля. Невырожденная система имеет единственное решение.

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Обозначим матрицу коэффициентов перед неизвестными: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

вектор неизвестных: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, вектор свободных членов: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

Тогда систему линейных уравнений можно записать в равносильной матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

Это равенство называется простейшим матричным уравнением. Такое уравнение решается следующим образом. Пусть матрица A – невырожденная (т.е. $|A| \neq 0$), тогда существует обратная матрица A^{-1}. Умножив на нее обе части уравнения, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, находим

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

<u>Пример.</u> Решить матричным методом систему уравнений: $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$

Составим матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4\text{-}9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = \text{-}25 - 10 + 5 = \text{-}30,$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{-}5;$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$ $A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \text{-}1;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10;$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19;$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$

$$A^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Находим матрицу X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение системы: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

Метод Крамера для решения систем линейных уравнений

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы*.

Теорема Крамера. *Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Это решение может быть найдено по формулам*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \ \text{где}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u> Решить систему уравнений методом Крамера: $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + (2-12) - (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28-48) - (42-32) = -20 - 10 = -30.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48) - (16-56) = -100 + 40 = -60.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32-42) + (16-56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

Решение произвольных систем линейных уравнений

Как было сказано выше, матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей системы*, а матрица

$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называется *расширенной матрицей системы*

Элементарные преобразования систем

1) Умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число
2) Сложение и вычитание уравнений
3) Перестановка уравнений системы местами.
4) Исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю

Метод Гаусса

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в том, что систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (системы называются эквивалентными, если множества их решений совпадают). Эти действия называются прямым ходом. Затем из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$, откуда получаем: $x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases}$, откуда получаем: z = 3; y = 2; x = 1.

Пример 1.6. Решить систему уравнений $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+\ x_3&=1,\\ 3x_1-\ x_2+2x_3&=1,\\ x_1+4x_2-\ x_3&=2 \end{aligned}\right\}$ по формулам Крамера.

Р е ш е н и е. Выпишем матрицу системы $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ и вычислим ее определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=2+6+12+1-16+9=14\neq 0.$

Значит, система имеет единственное решение. Для его нахождения вычисляем вспомогательные определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3,$ заменяя в определителе Δ 1, 2 и 3-й столбцы столбцом свободных членов:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}=14,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-14.$$

По формулам Крамера находим: $x_1=\dfrac{14}{14}=1;\ x_2=\dfrac{0}{14}=0;\ x_3=\dfrac{-14}{14}=-1.$

1.26. Вычислить определители, пользуясь свойствами определителей:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -5 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ 200 & -200 & 0 & 1600 \\ 19 & 20 & 31 & 190 \\ 1991 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} 365 & 275 & 569 \\ 3 & 3 & 3 \\ 362 & 272 & 565 \end{vmatrix}$; к) $\begin{vmatrix} 2401 & 1986 \\ 2402 & 1987 \end{vmatrix}$.

1.30. При каком значении α следующие определители равны нулю:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3-\alpha & 2 \\ 2 & -\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3-\alpha & 0 & 0 \\ 2 & -\alpha & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & \alpha \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & \alpha \end{vmatrix}$?

1.46. Пользуясь правилом Крамера, решить следующие системы уравнений:

а) $\left.\begin{array}{l} 3x+7y=2, \\ 2x+5y=1; \end{array}\right\}$; б) $\left.\begin{array}{r} 4x-3y-1=0, \\ x+3y-4=0; \end{array}\right\}$; в) $\left.\begin{array}{r} x_1+x_2=0, \\ 2x_1-x_2=3; \end{array}\right\}$;

г) $\left.\begin{array}{l} 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 2x_1-\ x_2-\ x_3=4, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11; \end{array}\right\}$; д) $\left.\begin{array}{l} x_1-\ x_2+\ x_3=-2, \\ 2x_1+\ x_2-2x_3=6, \\ x_1+2x_2+3x_3=2; \end{array}\right\}$;

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x+3y-6z=12 \\ 3x+2y+5z=-10; \\ 2x+5y-3z=6 \end{cases}$$

$$1)\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=4 \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1 \\ x_1-x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x-y+3z=0, \\ 2x+3y-z=0, \\ 3x+2y+2z=0. \end{cases}$$