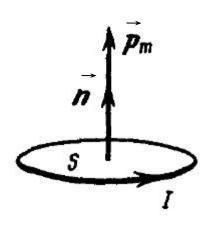
### Лекция 8 - 2019

- 1. Намагниченность вещества
- Вектор напряженности магнитного поля и его связь с векторами индукции и намагниченности.
- 3. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость вещества
- Теоремы о циркуляции векторов напряженности и намагниченности в интегральной и дифференциальной формах.
- 5. Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики.
- 6. Поле на границе раздела магнетиков

То, что мы знаем, - ограничено, а то, что не знаем, - бесконечно

П. Лаплас

#### Магнитный момент



$$\vec{p}_m = I S \vec{n}$$

Намагниченность – объемная плотность суммарного магнитного дипольного момента

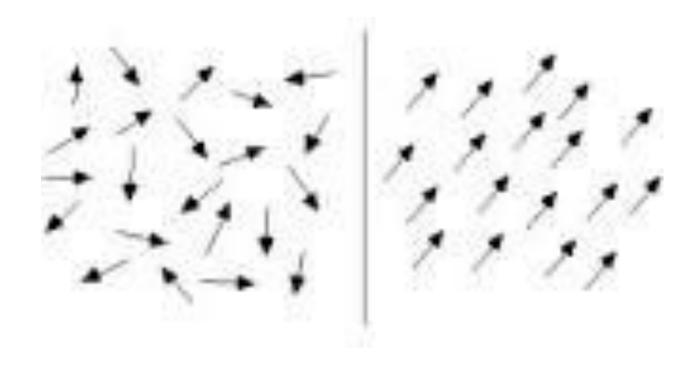
$$\vec{\mathbf{J}} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{P}}_{m i}$$

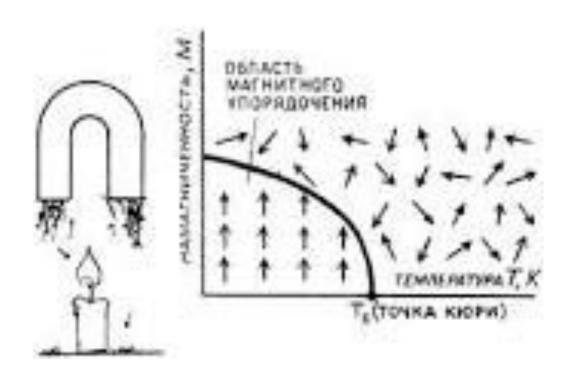
### Намагниченность вещества

$$\overline{\mathbf{J}} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\mathbf{p}_{m}} \overline{\mathbf{p}}_{m}$$

$$\vec{J} = n \langle \vec{p}_{m} \rangle$$
,

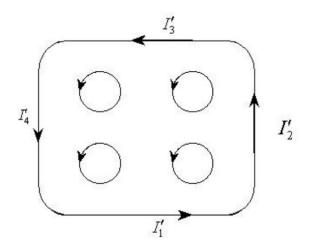
### Намагниченность веществ



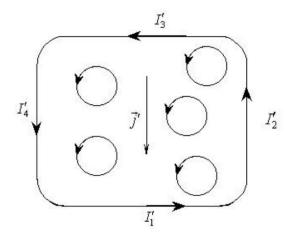


### Намагниченность веществ

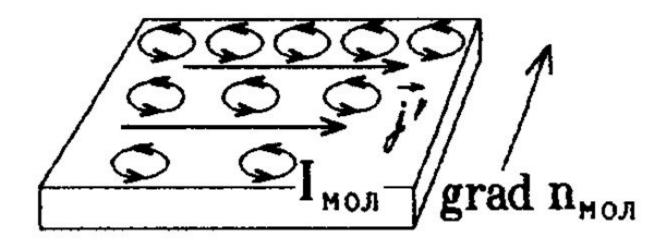
#### Однородная намагниченность

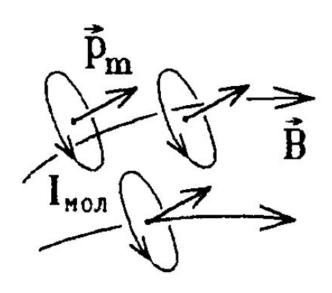


#### Неоднородная намагниченность



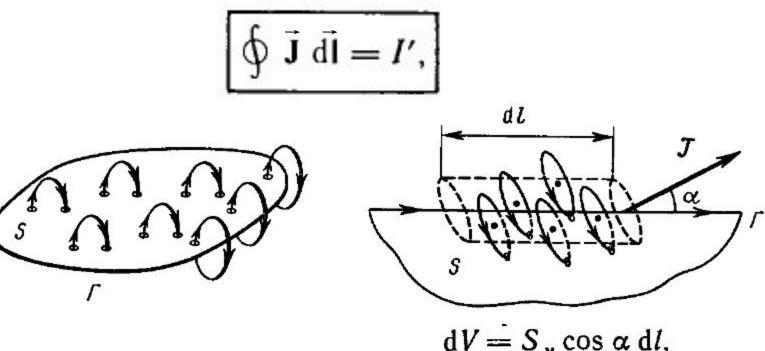
#### Неоднородная намагниченность





А.С. Чуев, 2019

#### Теорема о циркуляции вектора **J**



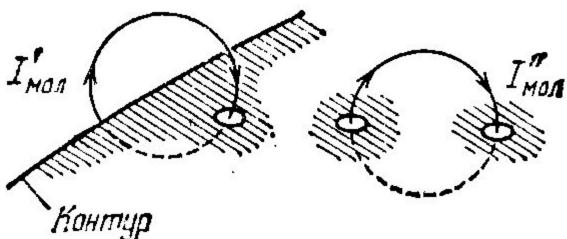
 $dV = S_u \cos \alpha dl$ ,

 $\mathrm{d}I' = I_{\mathrm{M}} n \, \mathrm{d}V$ , где n — концентрация молекул.  $dI' = I_{\alpha}S_{\alpha}n \cos \alpha dl = J \cos \alpha dl = J dl$ 

 $I_{M}S_{M} = p_{m}$  — магнитный момент отдельного молекулярного тока.  $I_{\,{}_{\,\!\!\!M}} S_{\,{}_{\,\!\!\!M}} n$  — магнитный момент единицы объема вещества.

$$I_{\scriptscriptstyle MOЛ}=I'$$

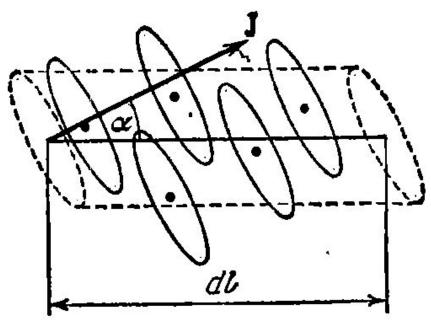
$$j_{MOR} = j'$$



$$\int_{S} \vec{\mathbf{j}}_{MOR} d\vec{\mathbf{S}} = \oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{J}} d\vec{\mathbf{I}}.$$

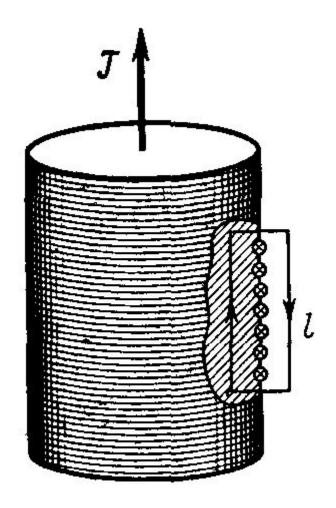
$$\int_{S} \vec{j}_{MOR} d\vec{S} = \int_{S} [\vec{\nabla} \vec{J}] d\vec{S}.$$

$$rot J = j'$$



А.С. Чуев, 2019

#### Граничное условие для вектора Ј

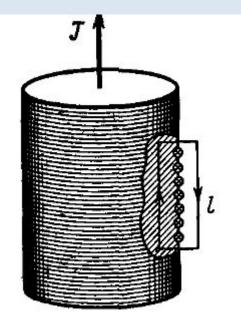


$$Il = i'l$$

$$i'=J$$
.

$$\oint \vec{\mathbf{J}} \, d\vec{\mathbf{l}} = I'.$$

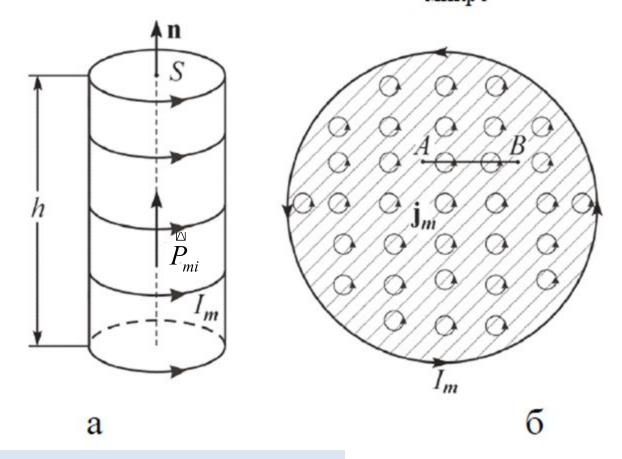
### Намагниченность численно равна поверхностной плотности тока намагничивания



$$i' = J$$
.

векторы і' и J взаимно перпендикулярны:

$$\vec{i}' \perp \vec{J}$$
.



$$\overset{\mathbb{N}}{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \overset{\mathbb{N}}{P_{mi}}$$

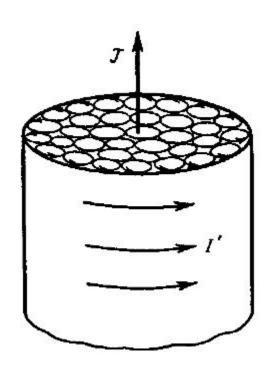
#### Циркуляция вектора **В**

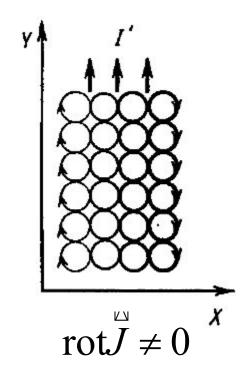
$$\oint_{L} \vec{\mathbf{B}} d\vec{\mathbf{1}} = \mu_0 (I_{\text{макро}} + I_{\text{микро}}).$$

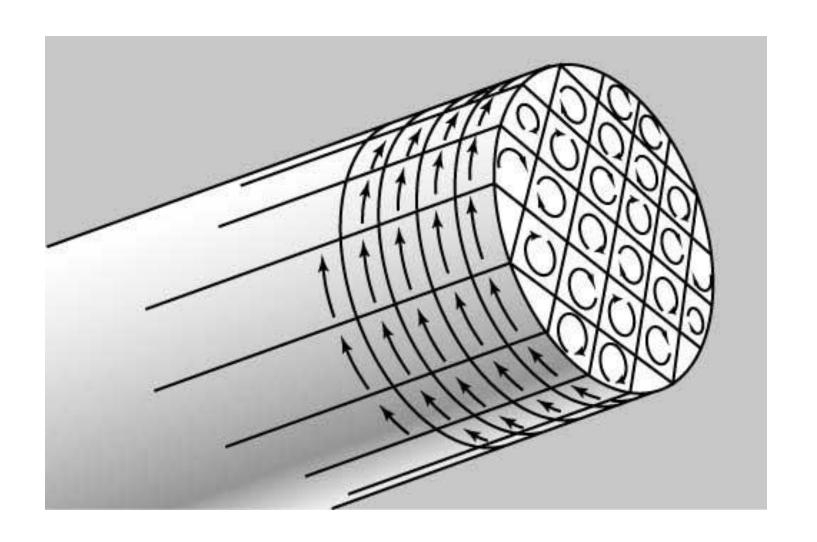
 $I_{
m Mикро}$  и  $I_{
m Mакро}$  — алгебраическая сумма макро- и микротоков сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур L.

$$\overrightarrow{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{B}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{B}'}.$$

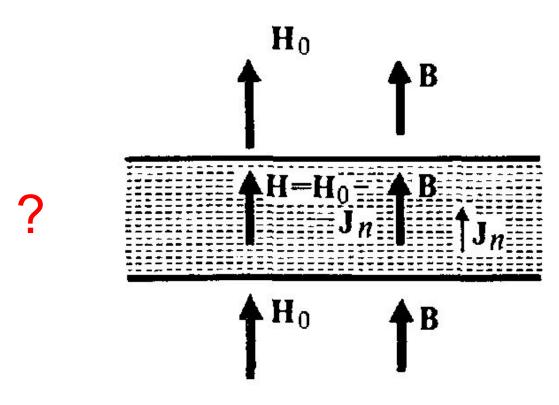
$$\oint \vec{\mathbf{B}} \, d\vec{\mathbf{S}} = 0.$$







# Реакция ферромагнетиков на внешнее однородное магнитное поле



149

Традиционное представление

Магнитное поле в присутствин ферромагнетика

А.С. Чуев, 2019

# Реакция ферромагнетиков на внешнее однородное магнитное поле

#### Из учебника Матвеева

Рассмотрим для примера постоянный магнит в виде плоской пластины конечной толщины и бесконечной площади (рис. 149). Постоянная намагниченность  $J_n$  направлена перпендикулярно поверхности постоянного магнита. Диа- и парамагнитные свойства постоянного магнита не учитываем.

Пусть вне постоянного магнита имеется магнитное поле с напряженностью  $H_0$ , направленной перпендикулярно его поверхности. Индукция поля одинакова как вне магнита, так и внутри него и равна  $B = \mu_0 H_0$ . Тогда [см. (38.31в)]  $\mu_0 H_0 = \mu_0 H + \mu_0 J_{\pi}$ . Отсюда напряженность поля внутри постоянного магнита равна (см. рис. 149):

$$H = H_0 - J_{\text{II}}$$

Однако на рис. 149 длины векторов *Н* показаны неизменными.

### Теорема о циркуляции вектора Н

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \, \vec{\mathbf{dI}} = \mu_0 (I + I'),$$

где I и I' — токи проводимости и намагничивания, охватываемые заданным контуром  $\Gamma$ .

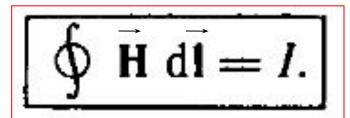
C

$$\oint \overrightarrow{\mathbf{J}} \, d\overrightarrow{\mathbf{I}} = I'.$$

учетом:

Можно записать: 
$$\oint \left(\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{J}\right)^{\overrightarrow{dI}} = I$$
.

$$\overrightarrow{\mathbf{H}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \overrightarrow{\mathbf{J}},$$



$$\oint \vec{\mathbf{H}} \, d\vec{\mathbf{l}} = I.$$

Из этого выражения, используя теорему Стокса  $Hdl=\int\limits_{S}rotHdS$ 

И соотношение:

$$I = \int_{S} j dS$$

Получим:

Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора Н:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

$$rot \overset{\bowtie}{H} = \overset{\bowtie}{j}$$

#### Связь между векторами Ј и Н.

$$J = \chi H$$
,

где χ — магнитная восприимчивость,

### Связь между В и Н.

$$H = \frac{B}{\mu_0} - J,$$

 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}$ , преобразуем в  $(1 + \chi) \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ . Отсюда

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H},$$

где µ — магнитная проницаемость среды.

$$\mu = 1 + \chi$$
.

# Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость веществ

$$J = \chi H$$

$$rac{B}{H} = H + J$$

$$B = \mu \mu_0 H = \mu_0 (H + J)$$

$$J = (\mu - 1)H$$

$$\chi = (\mu - 1)$$

#### Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики

$$\chi \le 0 \qquad \qquad \chi \ge 0 \qquad \qquad \chi \rangle \rangle 0$$

**Диамагнетиками** называются вещества, магнитные моменты атомов которых в отсутствии внешнего поля равны нулю, т.к. магнитные моменты всех электронов атома взаимно скомпенсированы (например инертные газы, водород, азот, NaCl и др.).

При внесении диамагнитного вещества в магнитное поле его атомы приобретают наведенные магнитные моменты. В пределах малого объема  $\Delta V$  изотропного диамагнетика наведенные магнитные моменты всех атомов одинаковы и направлены *противоположно вектору В*.

**Парамагнетиками** называются вещества, атомы которых имеют, в отсутствие внешнего магнитного поля, отличный от нуля магнитный момент.

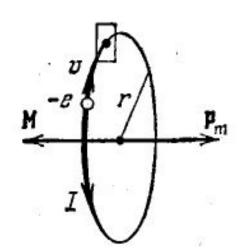
К *парамагнетикам* относятся многие щелочные металлы, кислород , оксид азота NO, хлорное железо FeCl<sub>2</sub> и др.

## Магнитная восприимчивость элементов и соединений при 20 °C ( $B = \mu_0(1 + \chi)H$ )

Вещество	$\chi, 10^{-6}$	Вещество	$\chi$ , $10^{-6}$
Алюминий	23	Серебро	-26,25
Висмут	-176	Стекло	-12,6
Вода	-9	Цинк	-12,3
Вольфрам	176	Эбонит	14,0
Золото	-36,7		
Калий	5,6	Газы	
Каменная соль	-12,6	Азот	0,013
Кварц	-15,1	Водород	-0,063
Кислород жидкий	3400	Воздух	0,38
Медь	-10,3	Гелий	-1,1
Платина	360	Кислород	1,9

# Орбитальный магнитный момент электрона в атоме

$$M = mvr$$



$$p_m = IS = ev\pi r^2$$

$$p_m = \frac{evr}{2}$$

Гиромагнитное соотношение

$$\frac{p_m}{M} = -\frac{e}{2m}$$

А.С. Чуев, 2019

#### Физическая природа диамагнетизма

За время dt вектор M получает приращение dM, равное

$$dM = N dt$$
.

Вектор dM, как и вектор N, перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы B и M; его модуль равен

$$|d\mathbf{M}| = \rho_m B \sin \alpha dt$$
,

где  $\alpha$  — угол между  $p_m$  и B.

За время dt плоскость, в которой лежит вектор  $\mathbf{M}$ , повернется вокруг направления  $\mathbf{B}$  на угол

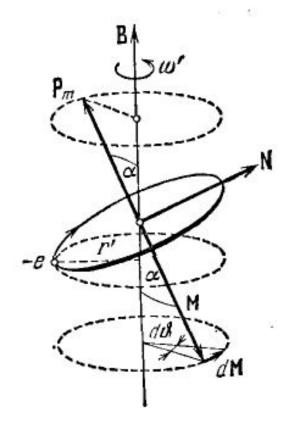
$$d\vartheta = \frac{|d\mathbf{M}|}{M\sin\alpha} = \frac{\rho_m B\sin\alpha \, dt}{M\sin\alpha} = \frac{\rho_m}{M} B \, dt.$$

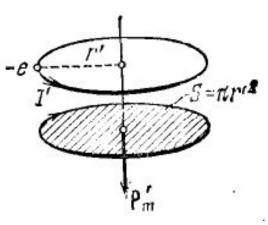
Разделив этот угол на время dt, найдем угловую скорость прецессии:

$$\omega_L = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p_m}{M} B.$$

Подставив значение (56.3) отношения магнитного и механического моментов электрона, получим

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}$$
. A.C. Yyes, 2019





$$\omega_L = \frac{eB}{2m} . \tag{57.1}$$

Частоту (57.1) называют частотой ларморовой прецессии или просто ларморовой частотой. Она не зависит ни от угла наклона орбиты по отношению к направлению магнитного поля, ни от радиуса орбиты или скорости электрона и, следовательно, для всех электронов, входящих в состав атома, одинакова.

#### Ферромагнетизм

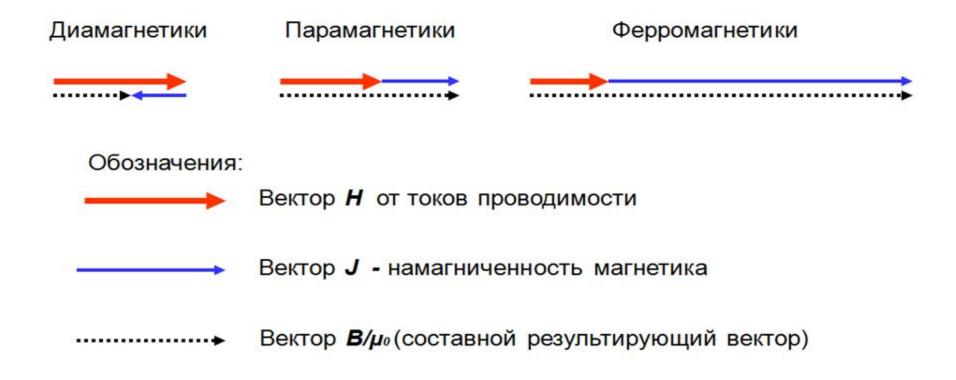
Особый класс магнетиков образуют вещества, способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. По своему наиболее распространенному представителю — железу они получили название ферромагнети ков. К их числу кроме железа принадлежат никель, кобальт, гадолиний, их сплавы и соединения, а также некоторые сплавы и соединения марганца и хрома с неферромагнитными элементами. Ферромагнетизм присущ всем этим веществам только в кристаллическом состоянии.

Ферромагнетики являются сильномагнитными веществами. Их намагниченность в огромное (до  $10^{10}$ ) число раз превосходит намагниченность диа- и парамагнетиков, принадлежащих к категории

слабомагнитных веществ.

Ферромагнитные свойства веществ обусловлены наличием собственного (спинового) момента у электронов атомов.

# Соотношения магнитных векторов внутри магнетиков

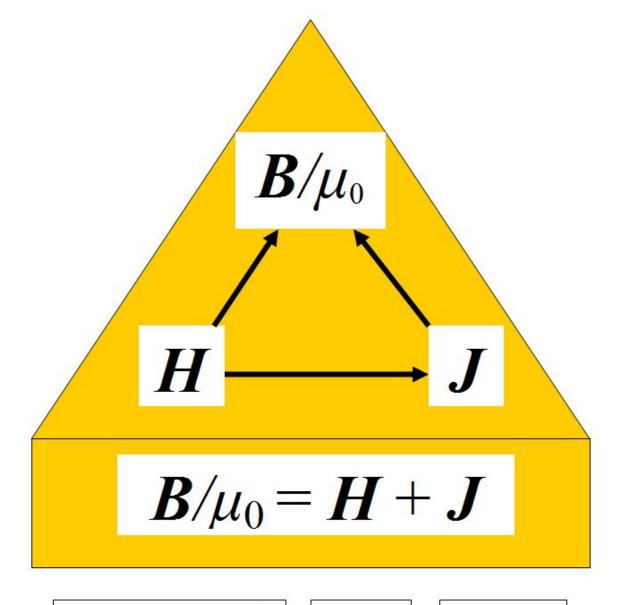


### Вектор В - суммарный вектор

$$B = \mu \mu_0 H = \mu_0 (H + J)$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \, d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 (I + I'),$$

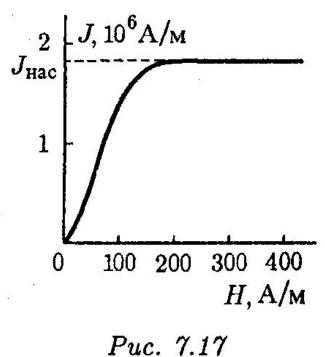
$$\operatorname{rot} B = \mu \mu_0 j = \mu_0 (j + j')$$



$$\vec{B}/\mu_0=(1+\chi)\vec{H}=\mu\vec{H}$$

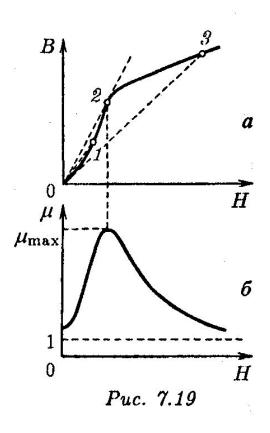
$$\vec{J}=\chi\vec{H}$$

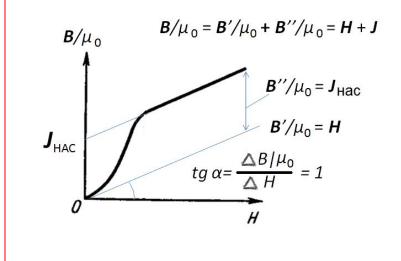
$$(1+\chi)=\mu$$



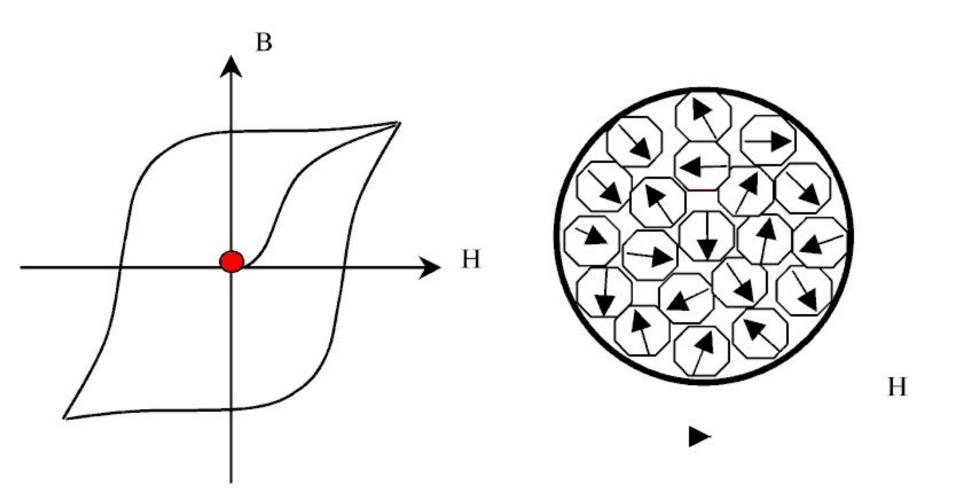
 $B_{\rm r}$ HPuc. 7.18

0-1 основная кривая намагничивания



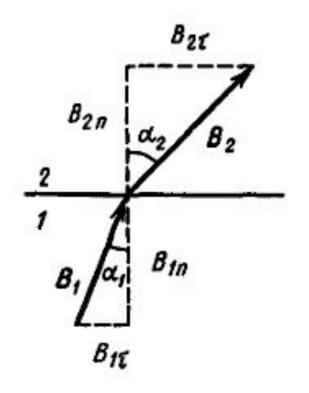


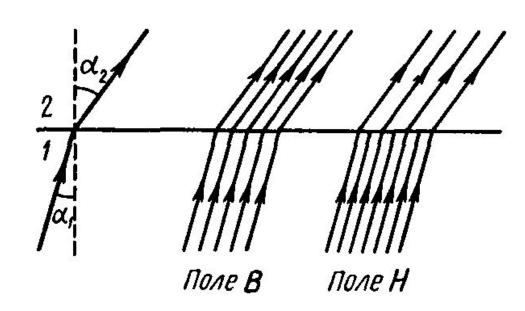
 $B=\mu_0(H+J)$ . Поэтому по достижении насыщения B продолжает расти с H по линейному закону:  $B=\mu_0H+{\rm const}$ , где  ${\rm const}=\mu_0J_{\rm nac}$ .



# Классическое представление о поведении векторов *H* и *B* на границе

#### двух сред

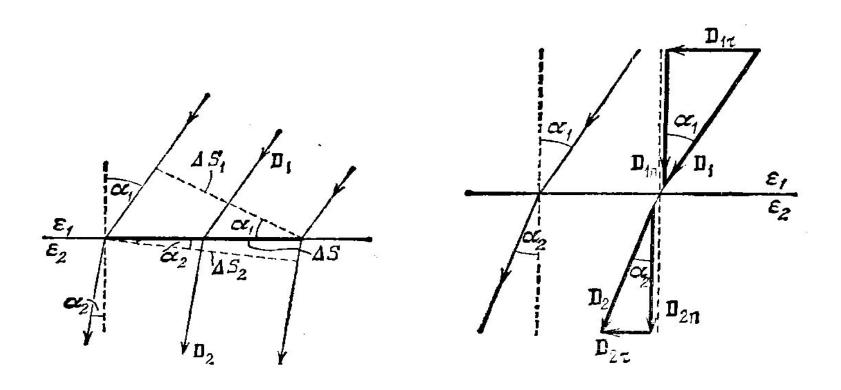




$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_{1}}{\operatorname{tg}\alpha_{2}} = \frac{B_{1\tau}/B_{1n}}{B_{2\tau}/B_{2n}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_{1}}{\operatorname{tg}\alpha_{2}} = \frac{\mu_{1}}{\mu_{2}}$$

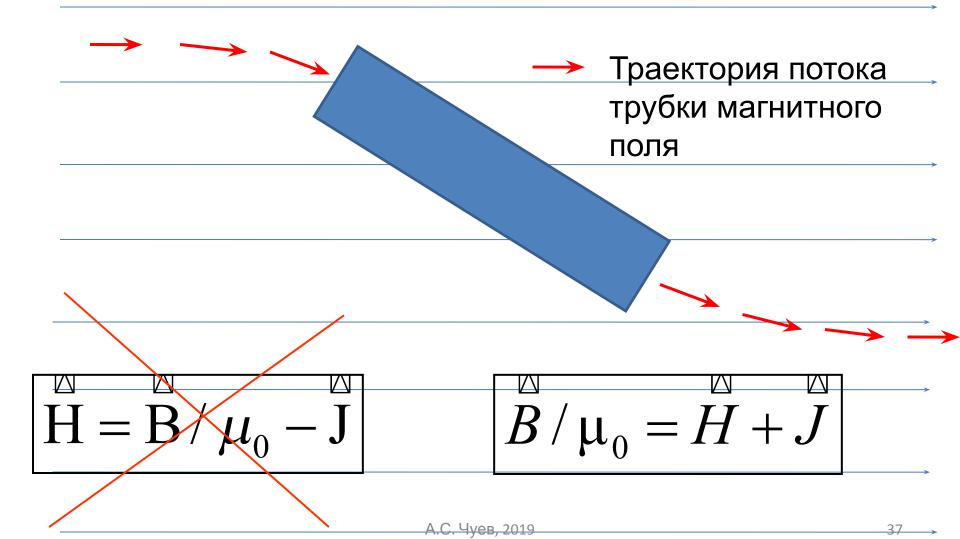
# Для сравнения: классическое представление о поведении вектора **D** на границе двух сред



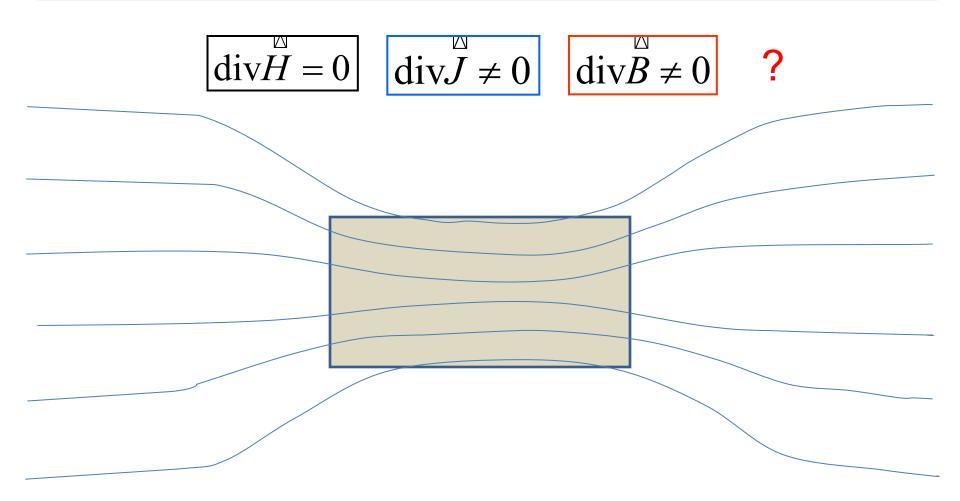
Закон преломления векторов электрической индукции **D** и магнитной индукции **B** оказывается одинаковым!!!

# ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ ЛЕКЦИИ

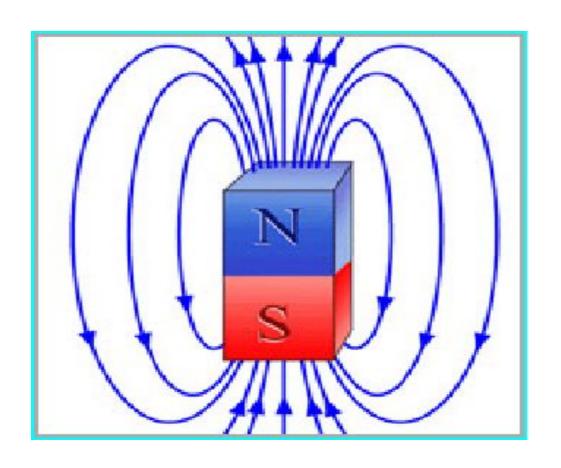
### вектор ${m B}$ (точнее, ${m B}/\mu_o$ ) составной, он включает в себя векторы ${m H}$ и ${m J}$



## Реакция ферромагнетиков на внешнее однородное магнитное поле



#### Внешнее магнитное поле намагниченных тел



#### Внешнее магнитное поле цилиндрического магнита (намагниченного стержня)

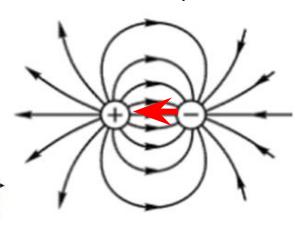
$$p_{m} = J \cdot V_{M}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3e_r(e_r \cdot p_m) - p_m}{r^3}$$

Есть ли поле H?

$$\frac{B}{\mu_0} = \frac{V_M}{4/3 \pi r^3} \left( \frac{B}{e_r} (e_r \cdot J) - \frac{J}{3} \right)$$

#### Линии вектора *Е*



$$\vec{p}_e = q\vec{l}$$

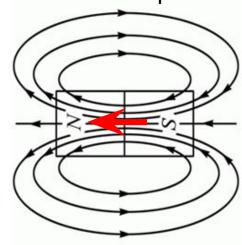
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

$$\vec{p}_e' = -\vec{p}_e$$

$$\vec{p}'_e = -\vec{p}_e \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{\vec{p}'_e - 3\vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{p}'_e)}{r^3}$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{p_e}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

#### Линии вектора *В*



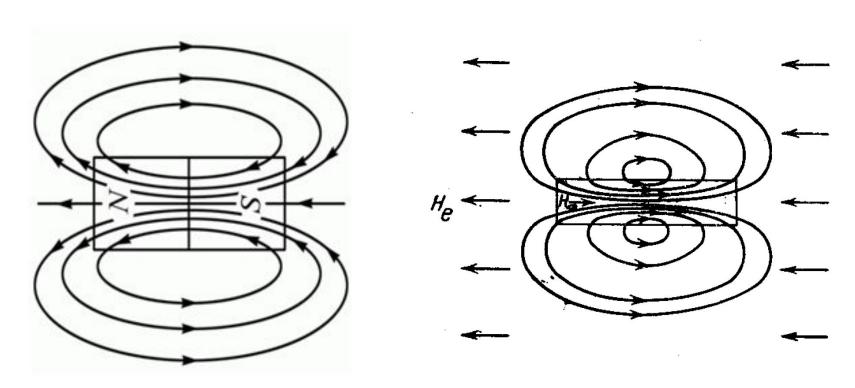
$$\vec{p}_m = IS\vec{n}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{\vec{p}_m \times \vec{e}_r}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{p}_m) - \vec{p}_m}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

# Магнитное поле свободного диполя и диполя, находящегося во внешнем поле $H_e$ большой совокупности диполей



Размагничивающее поле

$$H_{\otimes} = H_{\tau} = -NJ$$

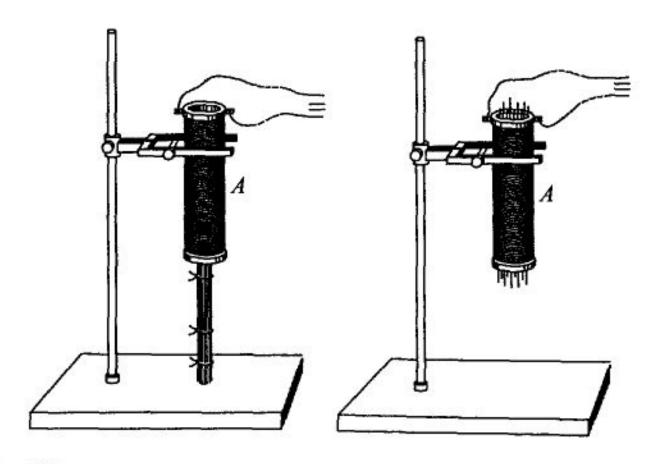
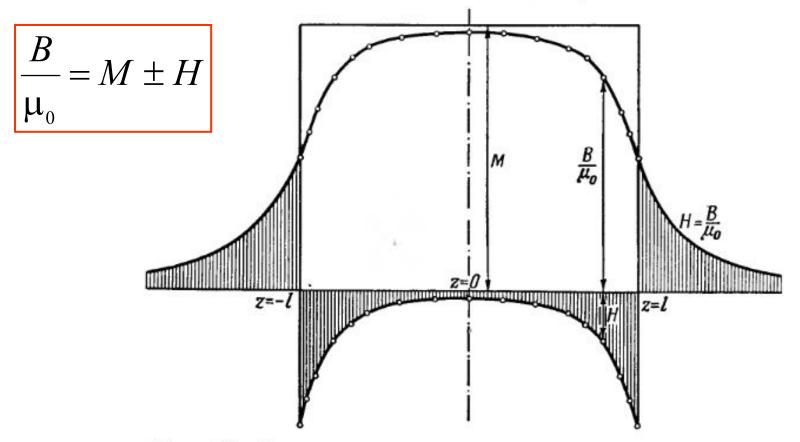


Рис 162. Железные проволоки порознь намагничиваются сильнее, чем толстый стержень, составленный из этих проволок

Внешнее поле намагниченных проволок ослабляет внутреннее магнитное поле соседних с ними проволок

# Картина магнитного поля намагниченного стержня (по Зоммерфельду). Поле вектора H создается магнитными зарядами.



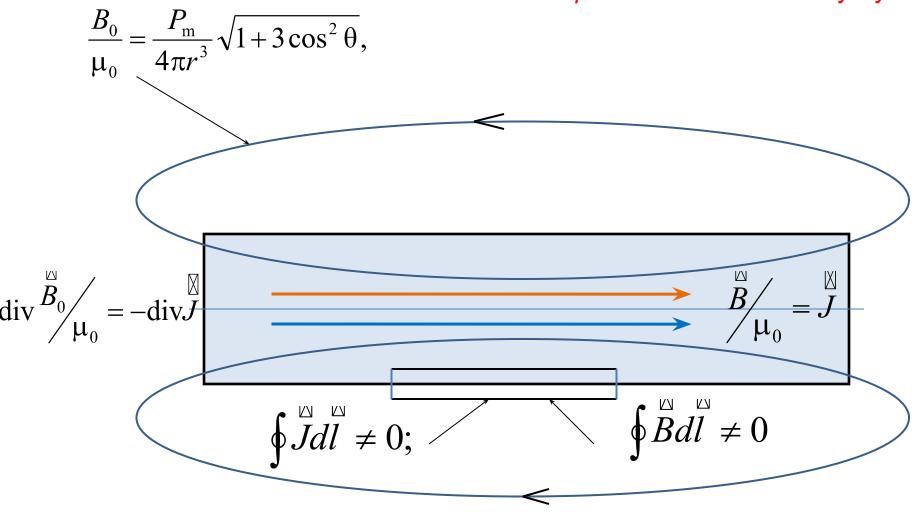
Фиг. 15. Распределение поля и намагниченности однородно намагниченного стержня.

### Иное изображение намагниченности **М** и магнитного поля **В** намагниченного



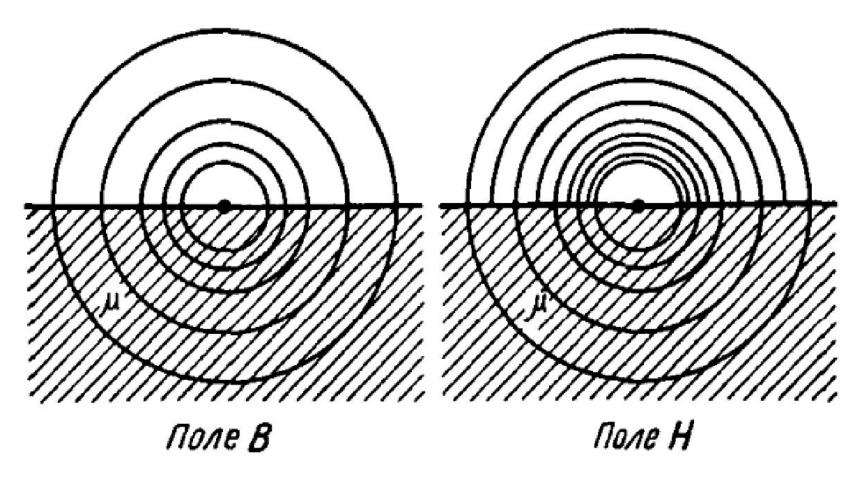
Получается, что намагниченность части пространства внутри вещества противоположна намагниченности пространства, свободного от вещества. И картина становится в какой-то степени похожей на зоммерфельдовскую.

#### Предположительно по Чуеву



Приводимое изображение противоречит известному соотношению  $div \mathbf{B} = 0$ 

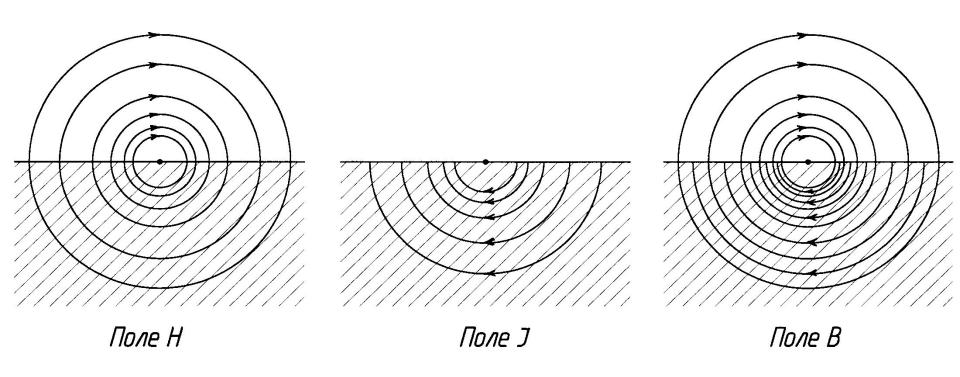
#### Парадокс изображения магнитных полей



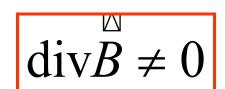
$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I[dl, r]}{r^3}$$

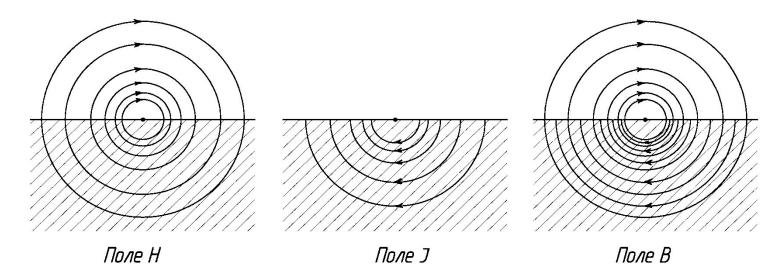
Закон Б-С-Л не выполняется

## Верные изображения магнитных полей от проводника с током на границе 2-х сред

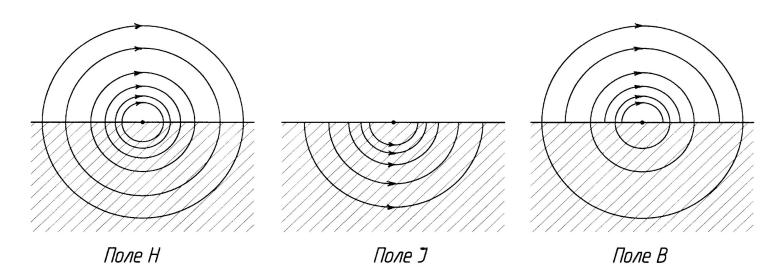


Несоответствие сегодняшней теории:





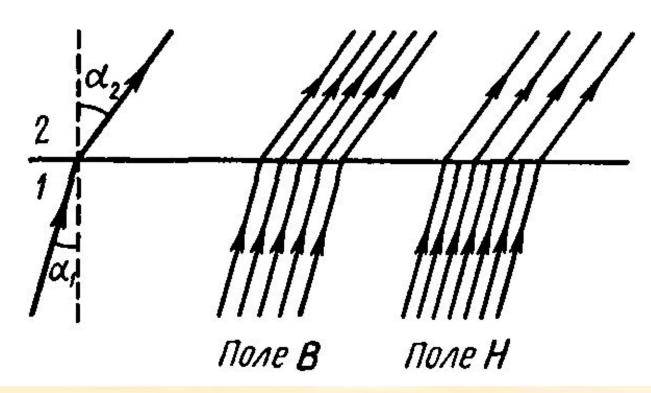
Магнитные поля от проводника с током на границе вакуум-парамагнетик и вакуум-ферромагнетик



Магнитные поля от проводника с током на границе вакуум-диамагнетик

А.С. Чуев, 2019

## Вектор *H* не может прерываться и преломляться на границе двух сред



В данном случае становится невыполнимой известная на практике теорема о циркуляции вектора *Н* 

# Парадокс изображения магнитных векторов в теле кольцевого магнита с щелевым зазором

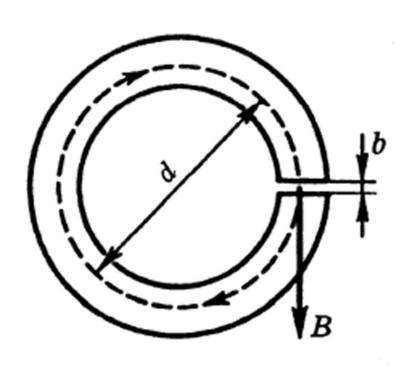


Рис. 7.22

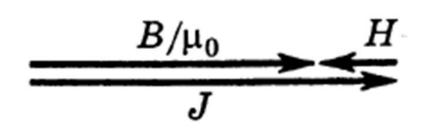


Рис. 7.23

7.6. Постоянный магнит имеет вид кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца равен d. Ширина зазора b, маг-

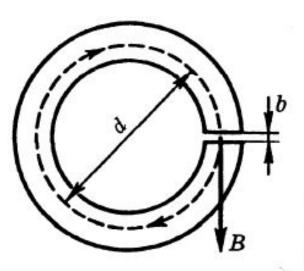


Рис. 7.22

нитная индукция поля в зазоре В. Пренебрегая рассеянием поля на краях зазора, найти модули векторов Н и Ј внутри вещества.

Решение. Воспользовавшись теоремой о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  по пунктирной окружности диаметром d (рис. 7.22) и учитывая, что токов проводимости нет, запишем

$$(\pi d - b)H_{\tau} + bB/\mu_0 = 0,$$

где  $H_{\tau}$  — проекция вектора **H** на направление обхода контура (оно взято совпадающим с направлением вектора **B** в зазоре). Отсюда

$$H_{\tau} = -\frac{bB}{\mu_0 \left(\pi d - b\right)} \approx -\frac{bB}{\mu_0 \pi d}.$$
 (1)

Знак минус показывает, что направление вектора  ${\bf H}$  внутри вещества магнита противоположно вектору  ${\bf B}$  в той же точке. Заметим, что при  $b \to 0$  и  $H \to 0$ .

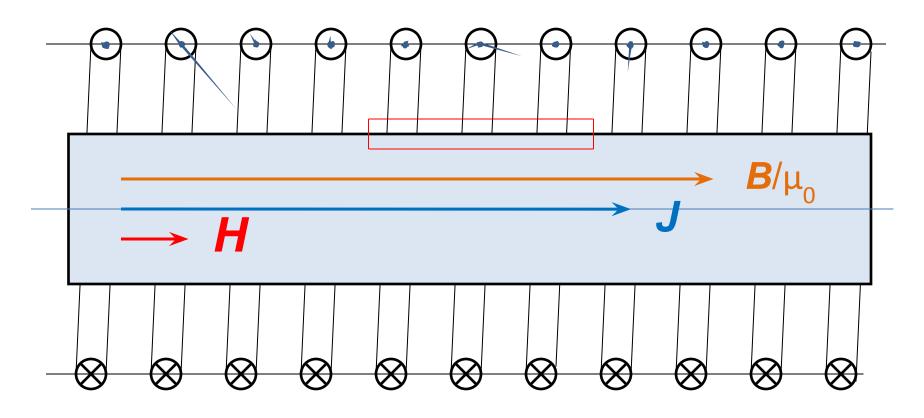
Модуль намагниченности **J** найдем по формуле (7.11), используя результат (1):

$$J = \frac{B/\mu_0}{1 - b/\pi d} \approx \frac{B}{\mu_0}.$$

Соотношение между векторами  $B/\mu_0$ , H и J в любой точке вещества магнита показано на рис. 7.23.

Рис. 7.23

Катушка индуктивности с током, внутри намагничиваемый стержень. Внутри стержня поле **H** и поле намагниченности **J**.



Поле  $B/\mu_0$  суммарное поле внутри стержня.

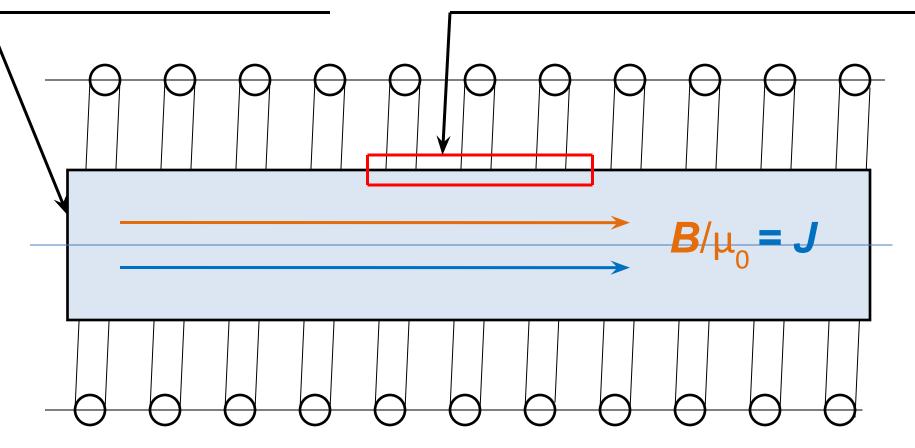
A.С. Чуев, 2019

$$\operatorname{div} J = -\operatorname{div} B / \mu_0$$

$$\oint H dl = 0; \oint J dl \neq 0; \oint B dl \neq 0$$

$$\oint Jdl \neq 0;$$

$$\oint Bdl \neq 0$$

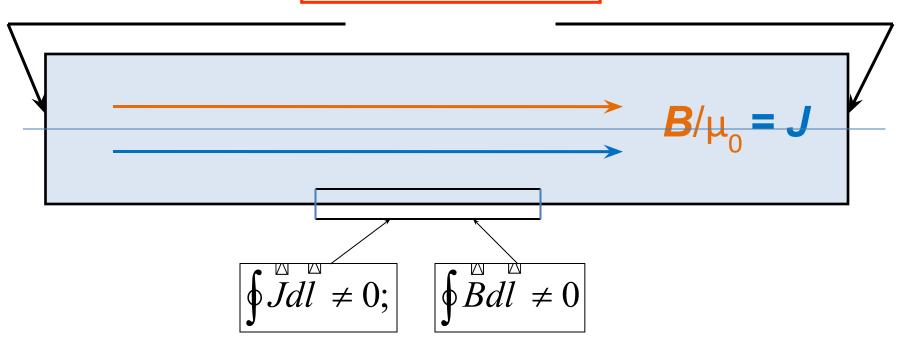


Ток катушки выключен, внутри стержня поле намагниченности  $\boldsymbol{J}$ 

$$\frac{B}{\mu_0} = H + J$$

#### Магнитное поле внутри намагниченного стержня

$$\operatorname{div} B/\mu_0 = -\operatorname{div} J$$



Поле вне стержня: 
$$\frac{B_0}{\mu_0} = \frac{P_{\rm m}}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2{\theta}},$$

А.С. Чуев, 2019

$$H + J = \frac{B}{\mu_0}$$

$$\frac{\stackrel{\bowtie}{B}}{\mu\mu_0} + \stackrel{\boxtimes}{J} = \frac{\stackrel{\bowtie}{B}}{\mu_0}; \qquad \qquad \stackrel{\bowtie}{B} + \mu\mu_0 \stackrel{\bowtie}{J} = \mu \stackrel{\bowtie}{B};$$

$$\overset{\bowtie}{B} + \mu \mu_0 \overset{\bowtie}{J} = \mu \overset{\bowtie}{B};$$

$$\mu\mu_0 \overset{\bowtie}{J} = (\mu - 1)\overset{\bowtie}{B};$$

Преобразуем в выражение:

$$\frac{\mu \bar{J}}{\mu - 1} = \frac{\bar{B}}{\mu_0}$$

Для ферромагнетиков  $\mu >> 1$ ,

$$\mu >> 1$$
,

тогда

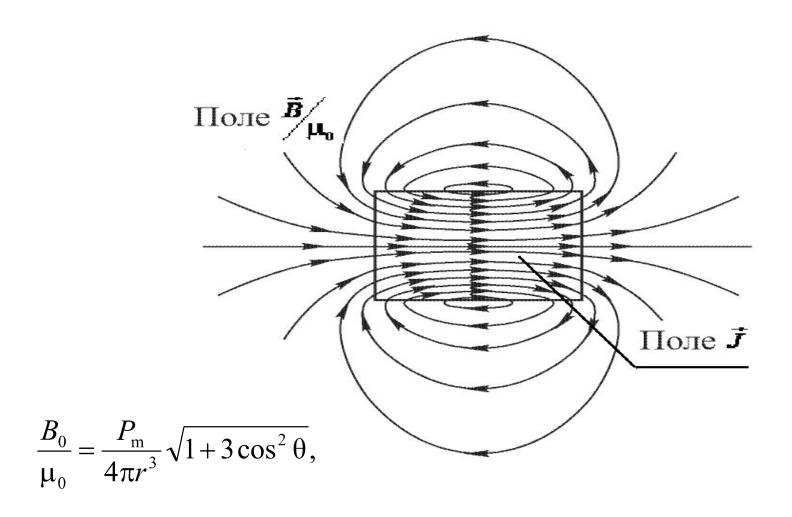
$$\mu \approx \mu - 1$$

и на торцах намагниченного стержня

$$J \approx \frac{B}{\mu_0}$$

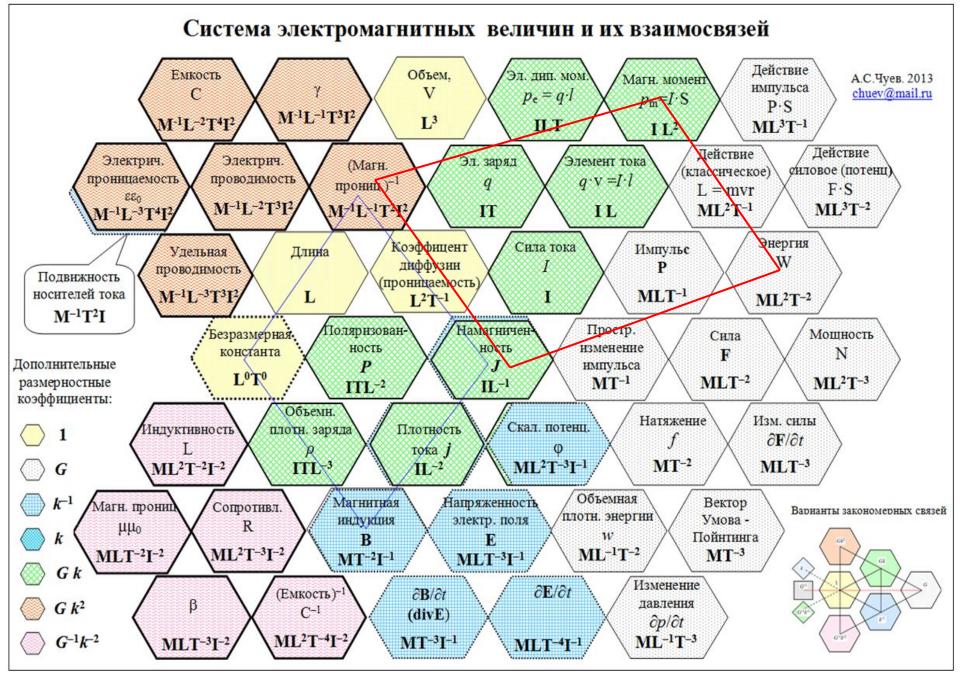
**вектор** *H* **отсутствует** . А.С. Чуев, 2019

### В отсутствие токов проводимости на торцах магнита поле намагниченности переходит во внешнее поле $B/\mu_{\scriptscriptstyle 0}$



Примечания Чуева, выделены рамкой красного цвета 
$$\vec{D} = \frac{\sum \vec{p}_{\rm e}^{\rm вирт}}{V}$$
 
$$D_{\rm n1} = D_{\rm n2} \; ; \quad D_{\tau 1} = D_{\tau 2} \; .$$
 
$$Ha границе двух диэлектриков, возможно 
$$\oint \vec{E} {\rm d}\vec{l} \neq 0 \quad _{\rm H} \quad {\rm rot} \vec{E} \neq 0$$
 
$$Ha полюсах магнита и в отсутствии токов проводимости 
$$\vec{div} \vec{B}/\mu_0 = -{\rm div} \vec{J}$$$$$$

Соотношения, выделенные рамкой красного цвета, не являются общепризнанными.



### Пример из ДЗ

$$\oint_{L} (\vec{H}, d\vec{l}) = I \qquad \oint_{L} (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_{S} (\vec{j}, d\vec{s})$$

$$H2\pi r_{a} = j(\pi r_{a}^{2} - \pi R^{2})$$

$$\vec{B} = \mu u_{o} H$$

/in⊗

J H B

J H B

$$B = \mu \mu_0 H$$

$$\vec{J}=\chi\vec{H}$$

$$\chi = \mu - 1$$

$$\oint_L (\vec{J}, d\vec{l}) = I'.$$

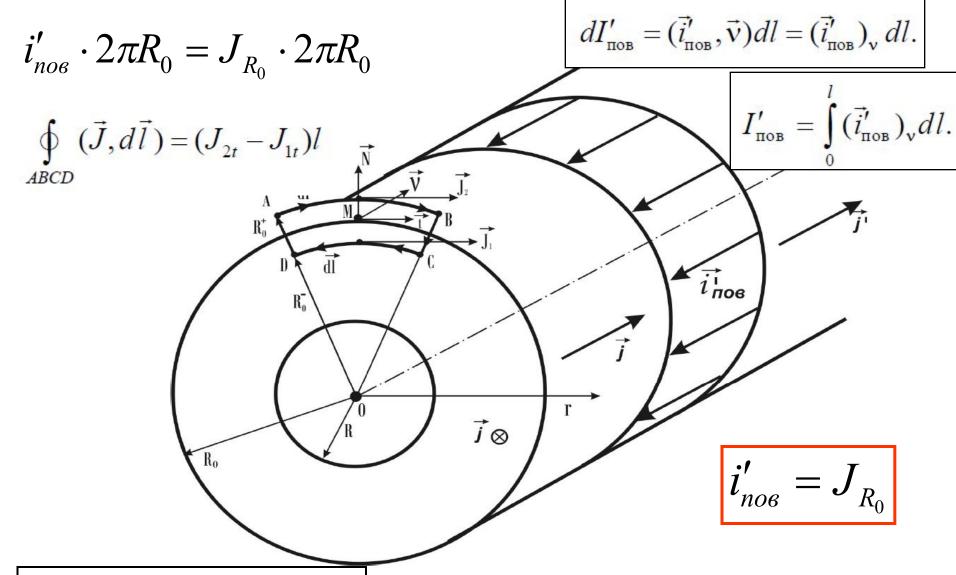
$$\operatorname{rot} \vec{J} = \vec{j}'$$

$$\oint B dl = \mu \mu_0 \sum I = \mu_0 \sum (I + I')$$

BHJ

 $\mu(r)$ 

 $\vec{i}_{\mathsf{пов}}$ 



$$I'_{cym} = \int_{0}^{2\pi R_0} i'_{noe} dl + \int_{S} j' dS = 0$$

Проверка правильности решения

 $\vec{N}$  — единичный вектор нормали к элементу поверхности раздела двух магнетиков (в рассматриваемой задаче это поверхность раздела «магнетик — вакуум») в окрестности точки наблюдения M,  $\vec{t}$  — единичный вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности раздела в точке наблюдения; единичный вектор  $\vec{v}$  также лежит в этой касательной плоскости и является ортогональным к вектору нормали N и выбранному касательному направлению — вектору  $\vec{t}$ . Легко заметить, что в условиях рассматриваемой задачи вектор  $\vec{v}$  перпендикулярен плоскости элементарного контура ABCD и обусловливает положительное направление обхода этого контура, циркуляция вектора намагниченности  $\vec{J}$  по которому лежит в основе вывода локального соотношения для касательных компонент вектора  $\hat{J}$  на границе раздела двух магнетиков. Это соотношение выполняется в каждой точке поверхности раздела S.

### Конец лекции 8