

лекция № 6

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Числа (повторение)

Число – основное понятие

математики.

Геометрическая иллюстрация чисел: точки на числовой
прямой.

Изучали

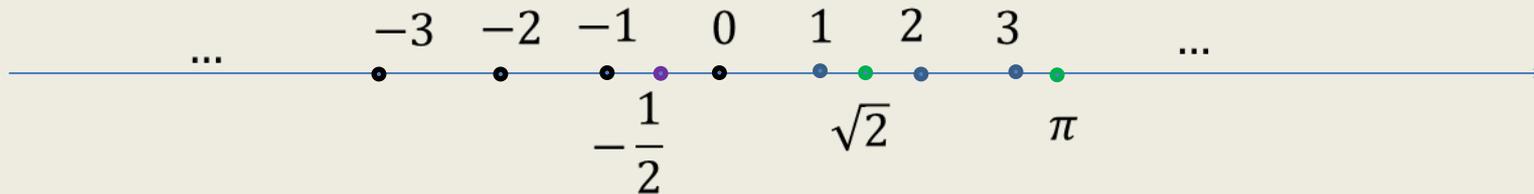
множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \dots\} = N$

множество целых чисел (к натуральным добавляют ноль и отрицательные)

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} = Z$$

множество рациональных чисел (к целым добавляют дробные $\frac{m}{n}$): Q

множество действительных чисел (к рациональным добавляют иррациональные): R .



Каждому действительному числу соответствует точка на прямой;

каждая точка представляет действительное число;

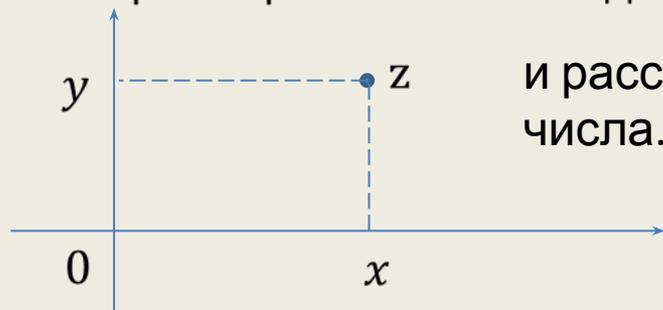
установлено **ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ** между двумя

множествами.

Определение множества комплексных

чисел

Чтобы расширить множество действительных чисел \mathbb{R} , надо с прямой выйти на



плоскость
и рассмотреть каждую точку плоскости как изображение числа.

Место точки на плоскости задают две (пара) координат x, y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Комплексное число – это упорядоченная пара действительных чисел $z = (x; y)$.

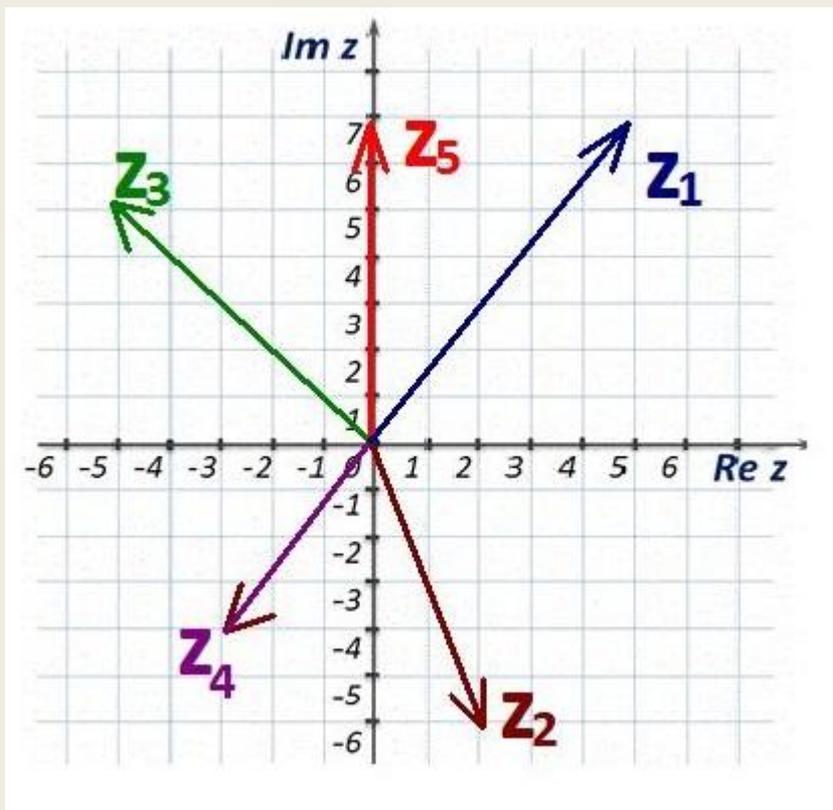
Действительные числа $a \in \mathbb{R}$ входят в множество комплексных чисел \mathbb{C} как координаты точек числовой прямой - пары вида $(a; 0)$.

Для комплексных чисел определены

действия:

1. Сравнение: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1; y_1) = (x_2; y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$
2. Сложение: $z_1 + z_2 = (x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$;
3. Умножение на действительное число a : $a \cdot z = (a \cdot x; a \cdot y)$
4. Умножение: $z_1 \cdot z_2 = (x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2; x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$;

Сложение комплексных чисел



$$z_1 = (5; 7)$$

$$z_2 = (2; -6)$$

$$z_3 = (-5; 5)$$

$$z_4 = (-3; -4)$$

$$z_5 = (0; 7)$$

$$z_2 + z_5 = (2; -6) + (0; 7) = (2; 1)$$

$$z_4 + z_5 = (-3; -4) + (0; 7) = (-3; 3)$$

Обозначить точками на чертеже значения сумм комплексных чисел и подписать.

Понятие мнимой единицы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Комплексное число $(0; 1)$ наз. МНИМАЯ ЕДИНИЦА и обозначают: i :

$$i = (0; 1)$$

Вычислим $i^2 = i \cdot i$ по правилу умножения для комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2; x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1);$$

$$i^2 = i \cdot i = (0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1; 0) = -1 !!!$$

$$i^2 = -1 \Rightarrow \sqrt{-1} = i \text{ и } -i,$$

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

Алгебраическая форма записи комплексного числа

С помощью мнимой единицы $i = (0; 1)$ любое комплексное число можно написать

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; y) = x(1; 0) + y(0; 1) =$$

$$= x + iy$$

Алгебраическая форма записи комплексного числа

x наз.
действительная часть комплексного числа,
или $\text{Re}z$;

y наз.
мнимая часть комплексного числа,
или $\text{Im}z$;

В *алгебраической* форме записи операции сложения, вычитания, умножения выполняют по **обычным правилам действий с многочленами** (учитывая $i^2 = -1$).

Выполнить действия в алгебраической форме записи,

выделить у результата **действительную часть** x и **мнимую часть** y :

$$(1 + i) + (-4 + 7i) = -3 + 8i; x = \quad ; y = \quad ;$$

$$(2 + 3i) - (1 - 4i) = 1 + 7i; x = \quad ; y = \quad$$

$$\begin{aligned} (2 + 3i) \cdot (1 - 4i) &= 2 - 8i + 3i - 12i^2 = 2 - 8i + 3i - 12 \cdot (-1) = \\ &= 2 - 8i + 3i + 12 = \mathbf{14 - 5i}; x = \quad ; y = \quad \end{aligned}$$

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = \mathbf{2i}; x = 0; y = \quad$$

$$(1 + 2i) \cdot (3 - i) = 3 - i + 6i - 2i^2 = 3 + 5i - 2 \cdot (-1) = 3 + 5i + 2 = \mathbf{5 + 5i};$$

$$x = \quad ; y = \quad$$

Сопряженное число

Если задано комплексное число $z = x + iy$, то число $\bar{z} = x - iy$ наз. сопряженное.

У сопряженного числа знак мнимой части меняется на противоположный.

ПРИМЕ $z = 1 + 4i; \bar{z} = 1 - 4i$

Р.

$$z = 1 - 4i; \bar{z} = 1 - (-4i) = 1 + 4i$$

$$z = 1 + i; \bar{z} = 1 - i$$

$$z = 1 - i; \bar{z} = 1 + i$$

ВОПРОС: какое число сопряженное для $\bar{z} = x - iy$?

$$\overline{(\bar{z})} = x - (-iy) = x + iy = z \Rightarrow z \text{ и } \bar{z} - \text{взаимно - сопряженные числа.}$$

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = (\text{учитывая } i^2 = -1) \\ &= x^2 - (-1)y^2 = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

действительное число!!! (не содержит мнимую единицу i)

Свойство $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ используют для упрощения **деления** комплексных чисел в алгебраической форме записи

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2} + i \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

если числитель и знаменатель умножить на число, сопряженное знаменателю, то получим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2} = \frac{1}{(x_2)^2 + (y_2)^2} \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2$$

два умножения
вместо
деления!

Выполнить действия в алгебраической форме записи,

выделить у результата **действительную часть** x и **мнимую часть** y :

$$\begin{aligned} \frac{2 + 4i}{1 + i} &= \frac{(2 + 4i) \cdot (1 - i)}{(1 + i) \cdot (1 - i)} = \frac{2 - 2i + 4i - 4i^2}{1 - i^2} = \frac{2 + 2i + 4}{1 + 1} = \frac{6 + 2i}{2} = \\ &= \frac{6}{2} + \frac{2}{2}i = 3 + 1 \cdot i = 3 + i; \quad x = 3; y = 1; \end{aligned}$$

$$\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \frac{1 + 2i + i^2}{1 - i^2} = \frac{1 + 2i - 1}{1 + 1} = \frac{2i}{2} = i; \quad x = 0; y = 1;$$

Можно найти в электронной библиотеке
КАИ:

**Исхаков Э.М. Комплексные числа и элементы теории функций
комплексного переменного : учеб. пособие / Э.М. Исхаков, С.Б.
Шабалина, С.И. Дорофеева.- 2-е изд., стер. .- Казань: Изд-во КГТУ им.
А.Н. Туполева, 2002.**

(Только

§1.)

<http://e-library.kai.ru/reader/hu/flipping/Resource-2074/751586.pdf/index.html>