лекция № 6

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Числа (повторение)

Число – основное понятие математики.

Геометрическая иллюстрация чисел: точки на числовой прямой.

Изучали:

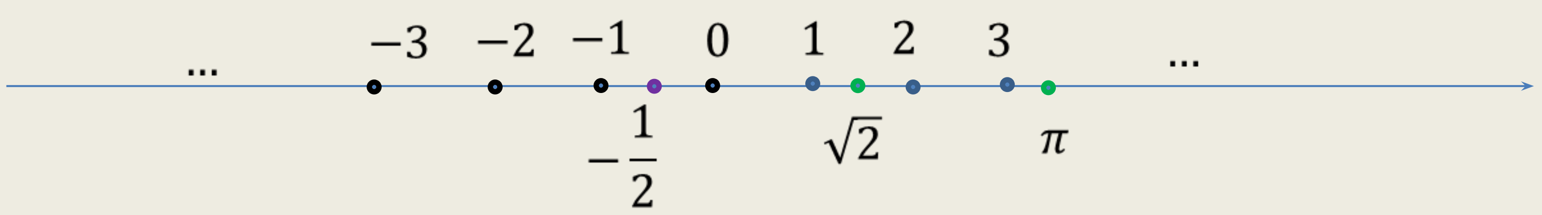
множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \dots\} = N$

множество целых чисел (к натуральным добавляют ноль и отрицательные)

$$\{0, \pm 1, \pm 2\,, \pm 3, \dots\} = Z$$

множество рациональных чисел (к целым добавляют дробные $\frac{m}{n}$): Q

множество действительных чисел (к рациональным добавляют иррациональные) : R.

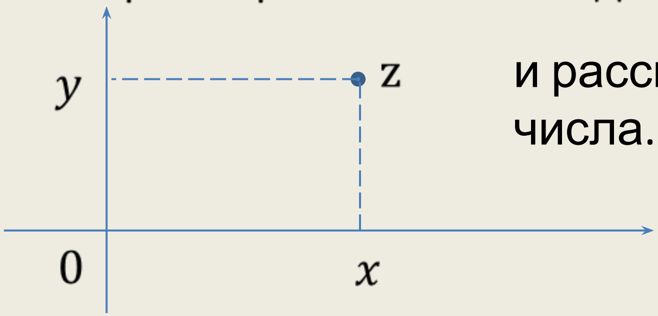


Каждому действительному числу соответствует точка на прямой;

каждая точка представляет действительное число;
установлено ***ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ*** между двумя множествами.

Определение множества комплексных чисел

Чтобы расширить множество действительных чисел R, надо с прямой выйти на плоскость



и рассмотреть каждую точку плоскости как изображение числа.

Место точки на плоскости задают две (пара) координат x, y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Комплексное число – это упорядоченная пара действительных чисел $z = (x; y)$.

Действительные числа $a \in R$ входят в множество комплексных чисел C как координаты точек числовой прямой - пары вида $(a; 0)$.

Для комплексных чисел определены действия:

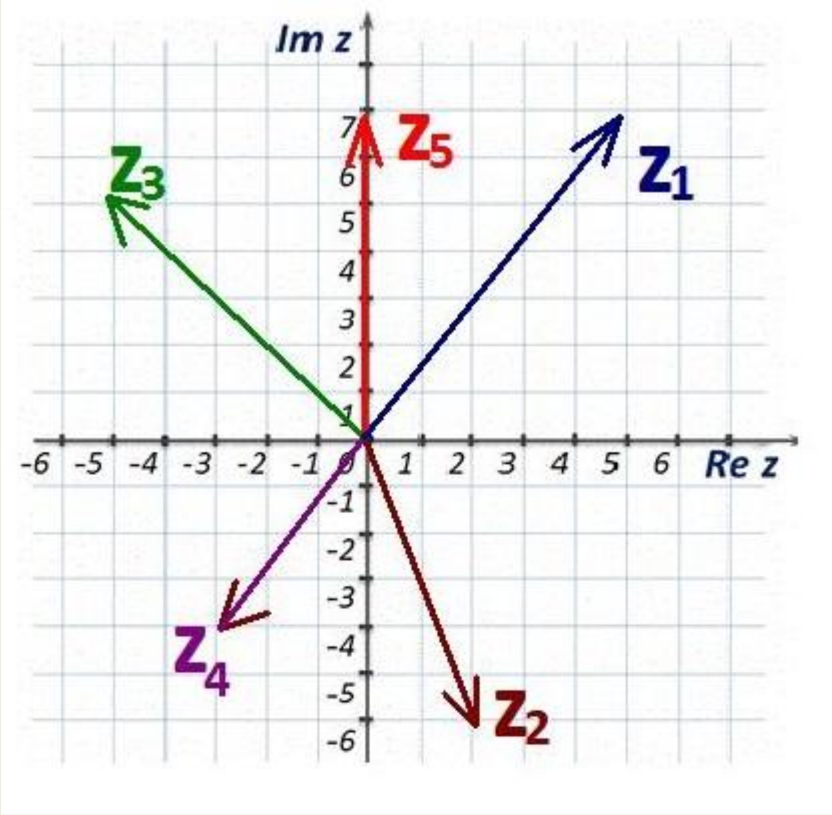
1. Сравнение: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1;\ y_1) = (x_2; y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

2. Сложение: $z_1 + z_2 = (x_1;\ y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$;

3. Умножение на действительное число a: $a \cdot z = (a \cdot x; a \cdot y)$

4. Умножение: $z_1 \cdot z_2 = (x_1;\ y_1) \cdot (x_2;\ y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2; x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$;

Сложение комплексных чисел



$Z_1 = (5; 7)$

$Z_2 = (2; -6)$

$Z_3 = (-5; 5)$

$Z_4 = (-3; -4)$

$Z_5 = (0; 7)$

$Z_2 + Z_5 = (2; -6) + (0; 7) = (2; 1)$

$Z_4 + Z_5 = (-3; -4) + (0; 7) = (-3; 3)$

Обозначить точками на чертеже значения сумм комплексных чисел и подписать.

Понятие мнимой единицы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Комплексное число $(0; 1)$ наз. МНИМАЯ ЕДИНИЦА и обозначают: i :

$$\boxed{i = (0; 1)}$$

Вычислим $i^2 = i \cdot i$ по правилу умножения для комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1;\, y_1) \cdot (x_2;\, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2; x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)\,;$$

$$i^2 = i \cdot i = (0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1; 0) = -1 \text{ !!!}$$

$$\boxed{i^2 = -1} \quad \Rightarrow \sqrt{-1} = i \text{ и } -i\,,$$

$$\boxed{\sqrt{-1} = \pm i}$$

Алгебраическая форма записи комплексного числа

С помощью мнимой единицы $i = (0;1)$ любое комплексное число можно напис

$$\mathrm{z} = (x;y) = (x;0) + (0;y) = x(1;0) + y(0;1\,) =$$

$$= x + iy$$

Алгебраическая форма записи комплексного числа

x наз. ***действительная часть*** комплексного числа, или $\mathrm{Re}z$;

y наз. ***мнимая часть*** комплексного числа, или $\mathrm{Im}z$;

В ***алгебраической*** форме записи операции **сложения, вычитания, умножения** выполняют по **обычным правилам действий с многочленами** (учитывая $i^2 = -1$).

Выполнить действия в алгебраической форме записи,

выделить у результата ***действительную часть*** x и ***мнимую часть*** y :

$$(1+i)+(-4+7i) = \mathbf{-3}+\mathbf{8}i;\ x = \quad ;\ y = \quad ;$$

$$(2+3i)-(1-4i) = \mathbf{1}+\mathbf{7}i;\quad x = \quad ;\ y =$$

$$(2+3i)\cdot(1-4i) = 2-8i+3i-12i^2 = 2-8i+3i-12\cdot(-1) =$$

$$= 2-8i+3i+12 = \mathbf{14}\ \mathbf{-5}i;\quad x = \quad ;\ y =$$

$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = \mathbf{2}i;\ x = 0\ ;\ y =$$

$$(1+2i)\cdot(3-i) = 3-i+6i-2i^2 = 3+5i-2\cdot(-1) = 3+5i+2 = \mathbf{5}+\mathbf{5}i;$$

$$x = \quad ;\ y =$$

Сопряженное число

Если задано комплексное число $z = x + iy$, то число $\overline{z} = x - iy$ наз. сопряженное .

У сопряженного числа знак мнимой части меняется на противоположный.

ПРИМЕР. $z = 1 + 4i;\ \overline{z} = 1 - 4i$

$$z = 1 - 4i;\ \overline{z} = 1 - (-4i) = 1 + 4i$$

$$z = 1 + i;\quad \overline{z} = 1 - i$$

$$z = 1 - i;\quad \overline{z} = 1 + i$$

ВОПРОС: какое число сопряженное для $\overline{z} = x - iy$?

$\overline{(\overline{z})} = x - (-iy) = x + iy = z \Rightarrow z$ и $\overline{z}$ - взаимно – сопряженные числа.

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = (\text{ учитывая } i^2 = -1)$$

$$= x^2 - (-1)y^2 = x^2 + y^2$$

действительное число!!!(не содержит мнимую единицу i)

Свойство $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$ используют для упрощения ***деления*** комплексных чисел в алгебраической форме записи

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2} + i\frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

если числитель и знаменатель умножить на число, сопряженное знаменателю, то получим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{(x_2)^2 + (y_2)^2} = \frac{1}{(x_2)^2 + (y_2)^2} \cdot z_1 \cdot \overline{z_2}$$

два умножения вместо деления!

Выполнить действия в алгебраической форме записи, выделить у результата ***действительную часть*** x и ***мнимую часть*** y :

$$\frac{2+4i}{1+i} = \frac{(2+4i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{2-2i+4i-4i^2}{1-i^2} = \frac{2+2i+4}{1+1} = \frac{6+2i}{2} =$$

$$= \frac{6}{2} + \frac{2}{2}i = 3 + 1 \cdot i = 3 + i; \quad x = 3; y = 1;$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i; \quad x = 0; \ y = 1;$$

Можно найти в электронной библиотеке КАИ:

Исхаков Э.М. Комплексные числа и элементы теории функций комплексного переменного : учеб. пособие / Э.М. Исхаков, С.Б. Шабалина, С.И. Дорофеева.- 2-е изд., стер. .- Казань: Изд-во КГТУ им. А.Н. Туполева, 2002.

(Только §1.)

http://e-library.kai.ru/reader/hu/flipping/Resource-2074/751586.pdf/index.html