Математика - это искусство называть разные вещи одним и тем же именем.

А. Пуанкаре

- **Дискре́тная матема́тика** — часть математики, изучающая дискретные — часть математики, изучающая дискретные математические структуры — часть математики, изучающая дискретные математические структуры, такие, как графы — часть математики, изучающая дискретные математические структуры, такие, как графы и утверждения в логике.

В контексте математики в целом дискретная математика часто

Исходные понятия теории множеств

Понятие множества, подмножества, собственного подмножества

Понятие множества является одним из наиболее общих и наиболее важных математических понятий. Оно было введено в математику немецким ученым Георгом Кантором (1845-1918). Следуя Кантору, понятие «множество» можно определить так:

Множество- совокупность объектов, обладающих определенным свойством, объединенных в единое целое. Объекты, составляющие множество, называются **элементами** множества.

- Множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами.

- Если элемент x принадлежит множеству A, то это обозначается:

$$x \in A$$

- Если каждый элемент множества B является также и элементом множества A, то говорят, что множество B является **подмножеством** множества A или включается в него: $B \subset A$.

Например, множество всех четных чисел является подмножеством множества всех целых чисел, а множество {0,1,2} – подмножеством множества {0,1,2,3}.

Пустое множество

Среди множеств выделяют особое множество - пустое множество. Пустое множество- множество, не содержащее ни одного элемента.

Вот что говорит о пустом множестве П.С. Александров: «Пустое множество, по определению, не содержит элементов; число элементов пустого множества есть нуль»

Необходимость рассмотрения пустого множества видна из того, что когда мы определяем тем или иным способом множество, то мы можем и не знать заранее, содержит ли оно хотя бы один элемент.

Например, вероятно, множество страусов, находящихся в данный момент за Полярным кругом, пусто; однако мы не можем этого утверждать с уверенностью, т.к. может быть какой-нибудь капитан и завез какого-нибудь страуса за Полярный круг.

Пустое множество является частью любого множества.

Это множество настолько важное, что для него даже придумали особый символ: $\varnothing$

Символ для пустого множества только один, потому что пустое множество единственно.

В самом деле, предположим, что существуют два разных пустых множества. Но что значит, что множества разные? Это значит, что в одном из них найдется элемент, который не принадлежит другому. Но в пустых множествах вообще элементов нет!

Определенные, конечные, бесконечные множества

Множество считается **определенным**, если указаны все его элементы. Эти элементы могут быть указаны с помощью некоторого общего признака или с помощью некоторого списка, где обозначены все элементы.

Последний способ возможен только в том случае, если множество имеет конечное число элементов.

Конечное множество - множество, состоящее из конечного числа элементов.

Основной характеристикой конечного множества является число его элементов. Теория конечных множеств изучает правила: как, зная количество элементов некоторых множеств, вычислить количество элементов других множеств, которые составлены из первых с помощью некоторых операций.

Бесконечное множество - непустое множество, не являющееся конечным.

Пример

Множество натуральных чисел является бесконечным.

Упорядоченное множество - множество, каждому элементу которого поставлено в соответствие некоторое число (номер этого элемента) от 1 до n, где n - число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа.

Каждое конечное множество можно сделать упорядоченным, если, например, переписать все элементы в некоторый список (a, b, c, d,...), а затем поставить в соответствие каждому элементу номер места, на котором он стоит в списке.

различные способы задания множеств

Пример: Множество учеников данного класса определяется их списком в классном журнале, множество всех стран на земном шаре - их списком в атласе, множество всех костей в человеческом теле - их списком в учебнике анатомии.

Но этот способ применим только к конечным множествам, но и то не ко всем.

Пример: Хотя множество всех рыб в океане конечно, вряд ли его можно задать списком.

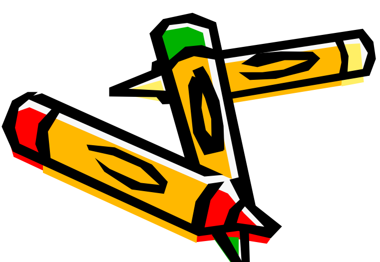
В тех случаях, когда множество нельзя задать при помощи списка, его задают путем указания некоторого **характеристического свойства**. Свойство является характеристическим для некоторого множества, если этому множеству принадлежат в точности те элементы, которые обладают данным свойством.

Пример: Свойство "быть квадратом целого числа" задает (бесконечное) множество всех квадратов целых чисел.

Задание множеств их характеристическим свойством иногда приводит к осложнениям:

Может случиться, что два различных характеристических свойства задают одно и то же множество, т. е. всякий элемент, обладающий одним свойством, обладает и другим, и обратно.

Пример: Множество толстокожих животных, имеющих два бивня, совпадает со множеством толстокожих животных, имеющих хобот, - это множество слонов.



Множества A и B равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

Пример: Равными являются все пустые множества.

Равенство множеств A и B записывают в виде A=B. Отношение "=" называется **отношением равенства.**

Множество A называют подмножеством множества B, если каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B.

То, что множество A является подмножеством множества B обозначают так $A \subset B$

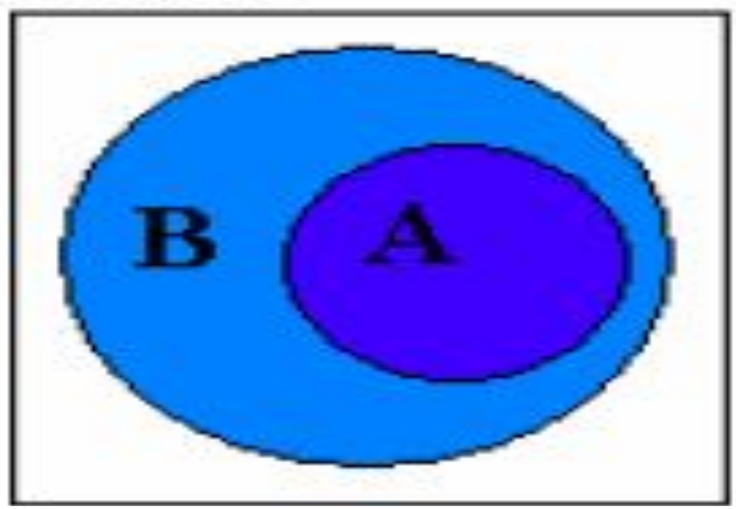
Данное отношение называется **отношением включения**.

Таким образом, подмножеством данного множества B является и само множество B.

Пустое множество, по определению, считают подмножеством всякого множества.

На диаграмме Эйлера-Венна

- утверждение "множество А является подмножеством множества В" изображают так



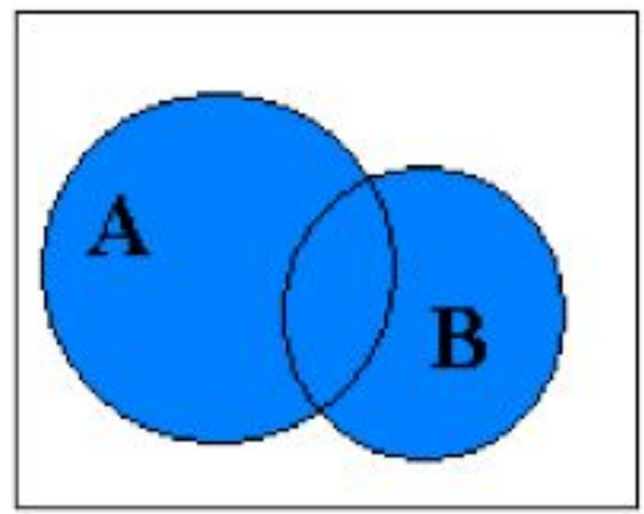
Основные теоретико-множественные операции

1. Объединение
2. Пересечение
3. Разность
4. Дополнение.

Объединение

Суммой, или объединением произвольного конечного или бесконечного множества множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А, В.

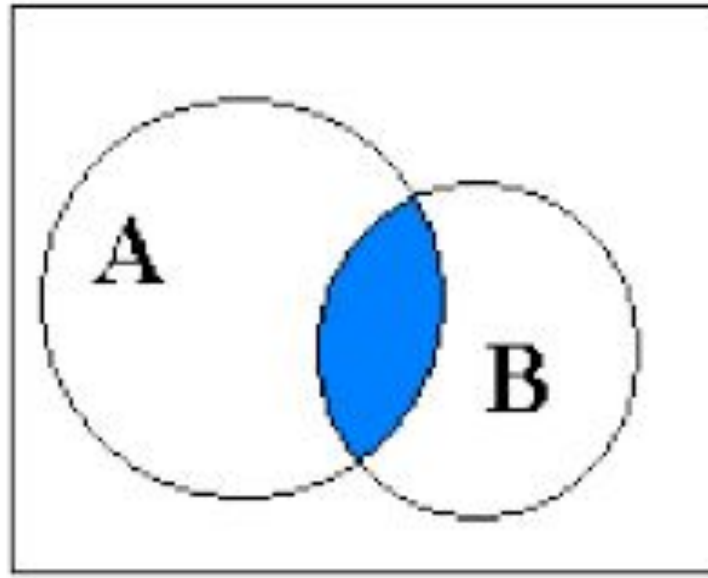
Объединением двух множеств называется новое множество



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

Пересечение

Пересечением любого конечного или бесконечного множества множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно.

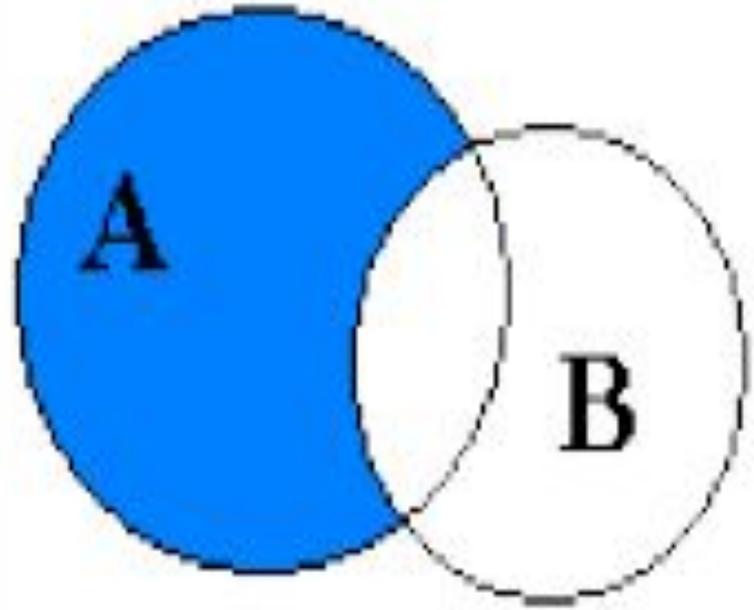


Пересечением двух множеств называется новое множество

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Разность

Разностью между множеством В и множеством А называется множество всех элементов из В, не являющихся элементами множества А.



Разностью двух множеств называется новое множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Дополнение

- Если класс объектов, на которых определяются различные множества обозначить (Универсум), то *дополнением* множества называют разность

$$\overline{A} = \Omega \setminus A$$

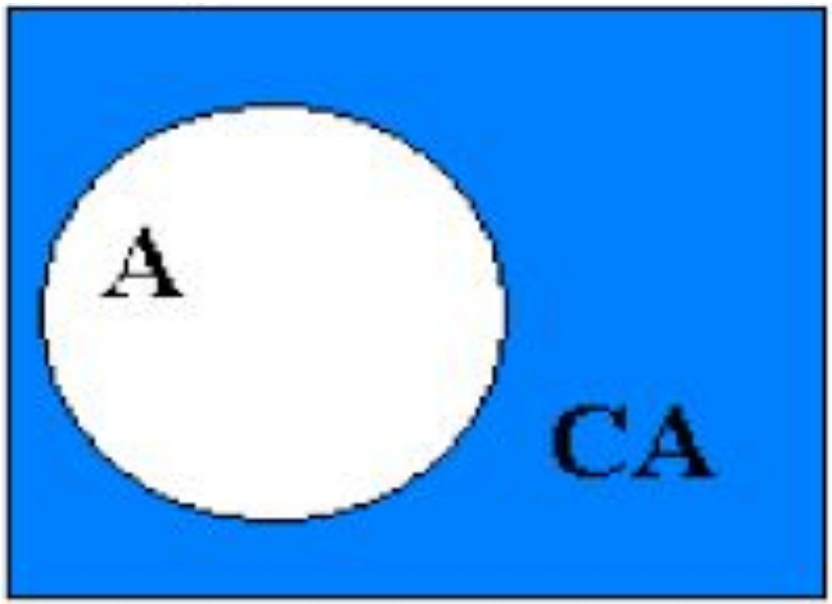
Дополнением множества А до универсума Ω называется разность

где А является подмножеством универсального множества

$$\Omega$$

Дополнение множества обозначается через СА.

На диаграмме Эйлера-Венна дополнение множества A выглядит так



На факультете учатся студенты, принимающие участие в художественной самодеятельности и студенты, не принимающие участие в художественной самодеятельности. Пусть А – множество всех студентов факультета; В – множество студентов факультета, принимающих участие в художественной самодеятельности. Тогда объединением $(A \cup B)$ этих множеств будет …

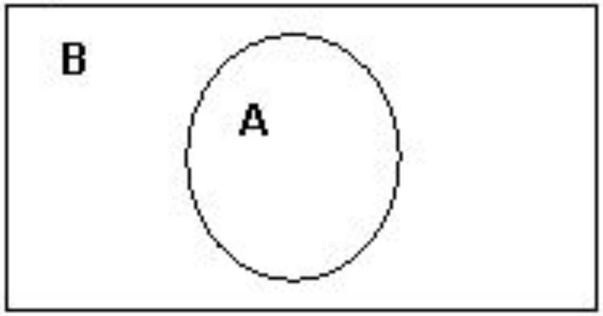
множество студентов факультета, не принимающих участия в художественной самодеятельности

пустое множество

множество студентов факультета, принимающих участие в художественной самодеятельности

множество всех студентов факультета

Пусть A и B - множества, изображенные на рисунке:



Тогда объединением этих множеств является …

$A \setminus B$

B

A

$\varnothing$

Заданы множества $B = \{3,4,5\}$ и $C = \{4,5,6\}$, тогда для них верным утверждением будет …

«Множество В является бесконечным»

«Множества В и С не равны»

«Множество В является подмножеством множества С»

«Множество С является подмножеством множества В»

Заданы множества $M = \{1,2,3\}$ и $N = \{1,2,3\}$, тогда для них <u>**неверным**</u> утверждением будет …

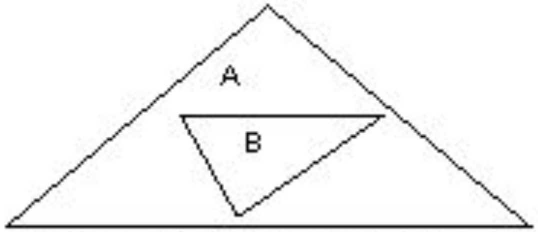
«Множества M и N равны»

«Множество N есть подмножество множества M»

«Множество M есть подмножество множества N»

«Множество M не равно множеству N»

Пусть А и В - множества, изображенные на рисунке:



Тогда объединением этих множеств является …

A

∅

B

A\B

На факультете учатся студенты, принимающие участие в художественной самодеятельности и студенты, не принимающие участие в художественной самодеятельности. Пусть А – множество всех студентов факультета; В – множество студентов факультета, принимающих участие в художественной самодеятельности. Тогда пересечением $\left(A \cap B\right)$ этих множеств будет …

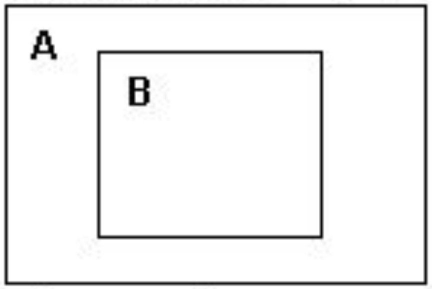
множество всех студентов факультета

множество студентов факультета, не принимающих участия в художественной самодеятельности

пустое множество

множество студентов факультета, принимающих участие в художественной самодеятельности

Пусть A и B - множества, изображенные на рисунке:



Тогда объединением этих множеств является …

A\B

∅

A

B

Алгебраические свойства операций над множествами

- Т. 1.1. Для любых подмножеств A, B и C универсального множества U справедливы следующие тождества:
- $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.
- $A\cup B=B\cup A$. $A\cap B=B\cap A$
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $A\cup\varnothing=A$. $A\cap U=A$
- $A\cup\neg A=U$ $A\cap\neg A=\varnothing$

Т 1.2. Для любых подмножеств A и B универсального множества U справедливы следующие утверждения:

6. Если для всех A имеет место $A \cup B = A$, то $B = \varnothing$

$6'$ Если для всех A имеет место $A \cap B = A$, то $B = U$.

7. $7'$ Если $A \cup B = U$ и $A \cap B = \varnothing$, то $B = \overline{A}$.

8. $8'$. $\overline{\overline{A}} = A$

9. $\overline{\varnothing} = U$. $9'$. $\overline{U} = \varnothing$

10. $A \cup A = A$. $10'$. $A \cap A = A$.

11. $A \cup U = U$. $11'$. $A \cap \varnothing = \varnothing$ - законы поглощения.

12. $A \cup (A \cap B) = A$. $12'$. $A \cap (A \cup B) = A$

13. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. $13'$. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. - законы де Моргана