



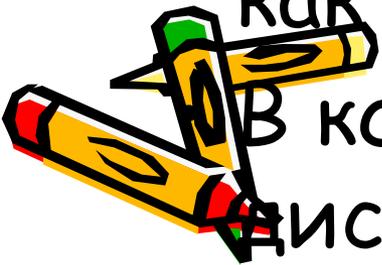
Математика - это  
искусство называть  
разные вещи одним и  
тем же именем.

А. Пуанкаре





- Дискрётная матемáтика — часть математики, изучающая дискретные — часть математики, изучающая дискретные математические структуры — часть математики, изучающая дискретные математические структуры, такие, как графы — часть математики, изучающая дискретные математические структуры, такие, как графы и утверждения в логике.



В контексте математики в целом дискретная математика часто



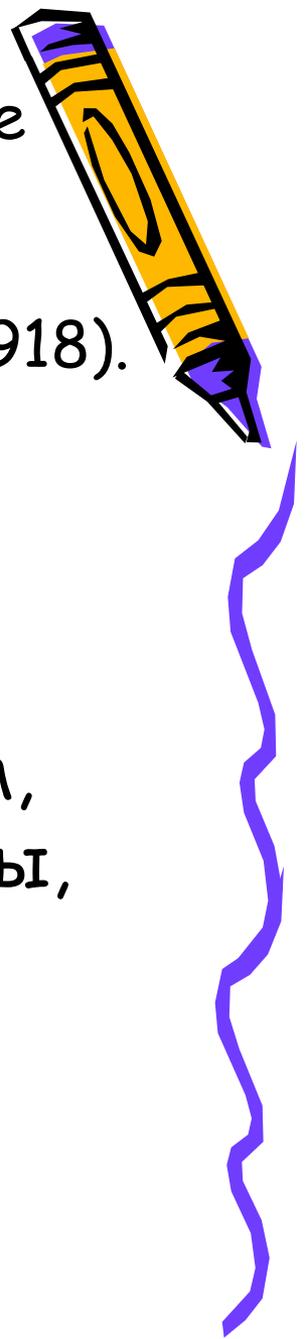
# Исходные понятия теории множеств

Понятие множества, подмножества,  
собственного подмножества



Понятие множества является одним из наиболее общих и наиболее важных математических понятий. Оно было введено в математику немецким ученым Георгом Кантором (1845-1918). Следуя Кантору, понятие «множество» можно определить так:

**Множество** - совокупность объектов, обладающих определенным свойством, объединенных в единое целое. Объекты, составляющие множество, называются **элементами** множества.

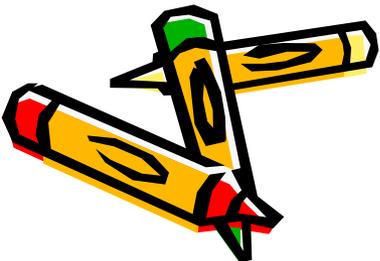


- Множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами.
- Если элемент  $x$  принадлежит множеству  $A$ , то это обозначается:

$$x \in A$$

- Если каждый элемент множества  $B$  является также и элементом множества  $A$ , то говорят, что множество  $B$  является **подмножеством** множества  $A$  или включается в него:  $B \subset A$ .

Например, множество всех четных чисел является подмножеством множества всех целых чисел, а множество  $\{0,1,2\}$  - подмножеством множества  $\{0,1,2,3\}$ .



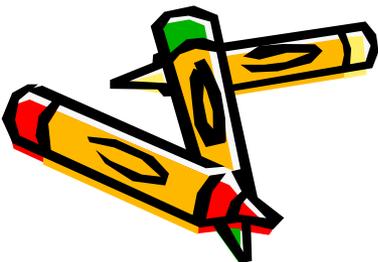
# Пустое множество

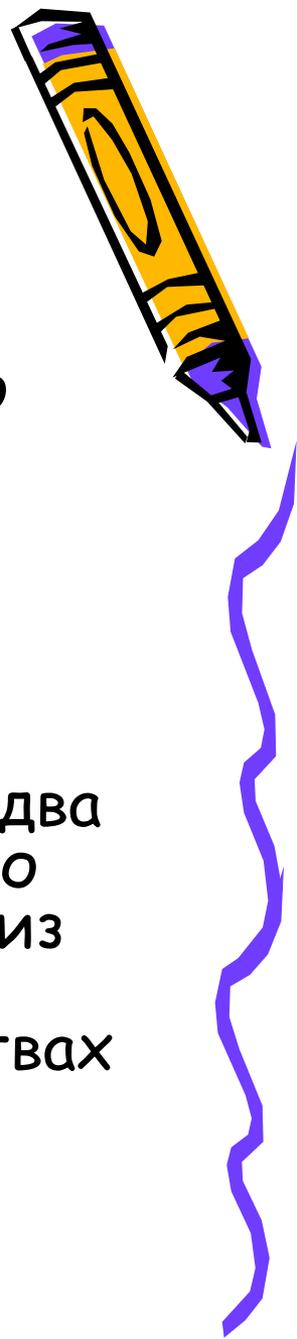
Среди множеств выделяют особое множество - пустое множество. Пустое множество - множество, не содержащее ни одного элемента.

Вот что говорит о пустом множестве П.С. Александров: «Пустое множество, по определению, не содержит элементов; число элементов пустого множества есть нуль»

Необходимость рассмотрения пустого множества видна из того, что когда мы определяем тем или иным способом множество, то мы можем и не знать заранее, содержит ли оно хотя бы один элемент.

Например, вероятно, множество страусов, находящихся в данный момент за Полярным кругом, пусто; однако мы не можем этого утверждать с уверенностью, т.к. может быть какой-нибудь капитан и завез какого-нибудь страуса за Полярный круг.





Пустое множество является частью любого множества.

Это множество настолько важное, что для него даже придумали особый символ:  $\emptyset$

Символ для пустого множества только один, потому что пустое множество единственно.

В самом деле, предположим, что существуют два разных пустых множества. Но что значит, что множества разные? Это значит, что в одном из них найдется элемент, который не принадлежит другому. Но в пустых множествах вообще элементов нет!



# Определенные, конечные, бесконечные множества



Множество считается **определенным**, если указаны все его элементы. Эти элементы могут быть указаны с помощью некоторого общего признака или с помощью некоторого списка, где обозначены все элементы.

Последний способ возможен только в том случае, если множество имеет конечное число элементов.

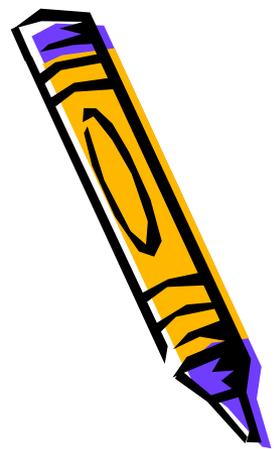
**Конечное** множество - множество, состоящее из конечного числа элементов.

Основной характеристикой конечного множества является число его элементов. Теория конечных множеств изучает правила: как, зная количество элементов некоторых множеств, вычислить количество элементов других множеств, которые составлены из первых с помощью некоторых операций.

**Бесконечное** множество - непустое множество, не являющееся конечным.



# Пример



Множество натуральных чисел является бесконечным.

Упорядоченное множество - множество, каждому элементу которого поставлено в соответствие некоторое число (номер этого элемента) от 1 до  $n$ , где  $n$  - число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа.

Каждое конечное множество можно сделать упорядоченным, если, например, переписать все элементы в некоторый список  $(a, b, c, d, \dots)$ , а затем поставить в соответствие каждому элементу номер места, на котором он стоит в списке.



## различные способы задания множеств

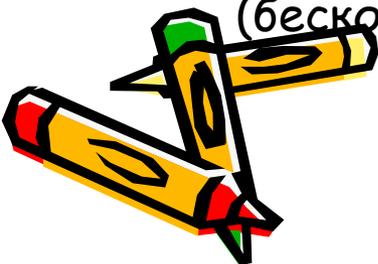
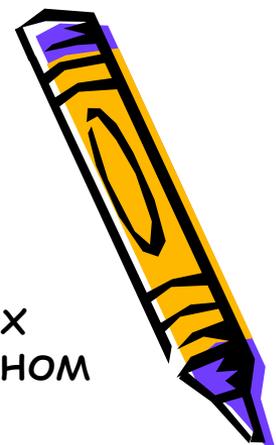
**Пример:** Множество учеников данного класса определяется их списком в классном журнале, множество всех стран на земном шаре - их списком в атласе, множество всех костей в человеческом теле - их списком в учебнике анатомии.

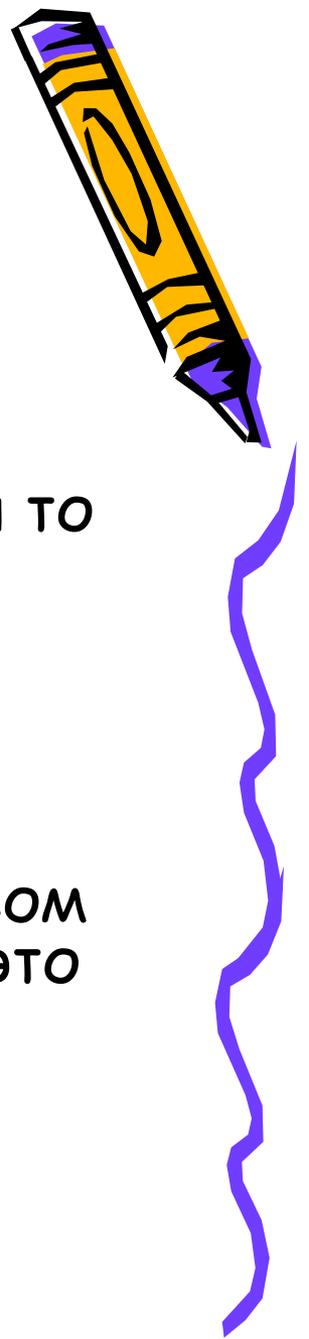
Но этот способ применим только к конечным множествам, но и то не ко всем.

**Пример:** Хотя множество всех рыб в океане конечно, вряд ли его можно задать списком.

В тех случаях, когда множество нельзя задать при помощи списка, его задают путем указания некоторого **характеристического свойства**. Свойство является характеристическим для некоторого множества, если этому множеству принадлежат в точности те элементы, которые обладают данным свойством.

**Пример:** Свойство "быть квадратом целого числа" задает (бесконечное) множество всех квадратов целых чисел.





Задание множеств их характеристическим свойством иногда приводит к осложнениям:

Может случиться, что два различных характеристических свойства задают одно и то же множество, т. е. всякий элемент, обладающий одним свойством, обладает и другим, и наоборот.

**Пример:** Множество толстокожих животных, имеющих два бивня, совпадает со множеством толстокожих животных, имеющих хобот, - это множество слонов.



Множества  $A$  и  $B$  равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

Пример: Равными являются все пустые множества.

Равенство множеств  $A$  и  $B$  записывают в виде  $A=B$ . Отношение "=" называется **отношением равенства**.

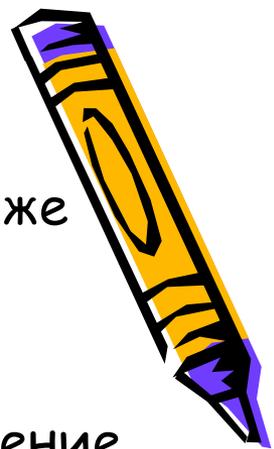
Множество  $A$  называют подмножеством множества  $B$ , если каждый элемент множества  $A$  является в то же время элементом множества  $B$ .

То, что множество  $A$  является подмножеством множества  $B$  обозначают так  $A \subset B$

Данное отношение называется **отношением включения**.

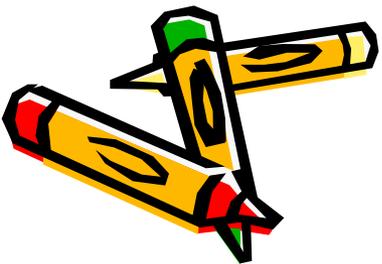
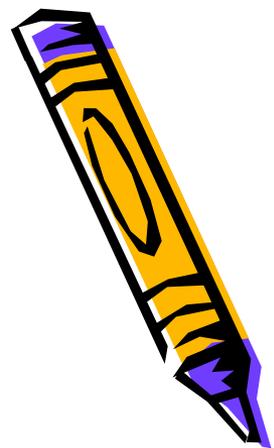
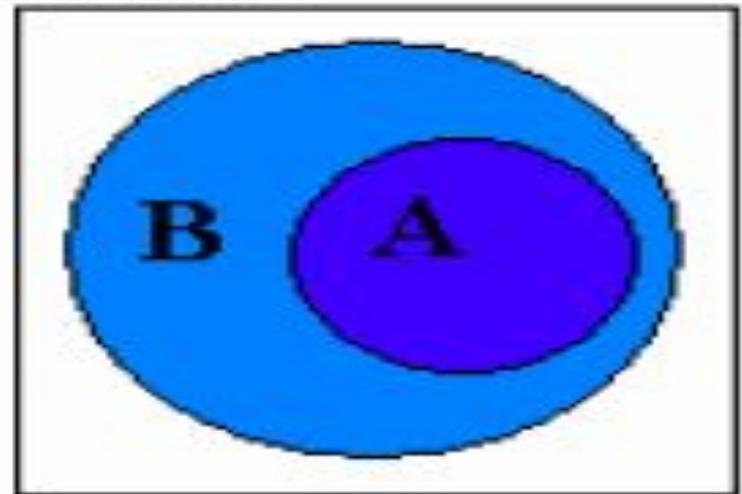
Таким образом, подмножеством данного множества  $B$  является и само множество  $B$ .

Пустое множество, по определению, считают подмножеством всякого множества.



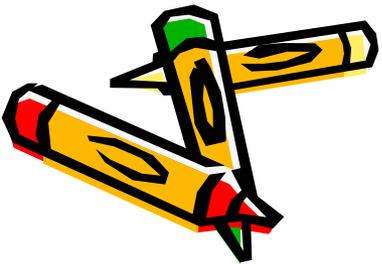
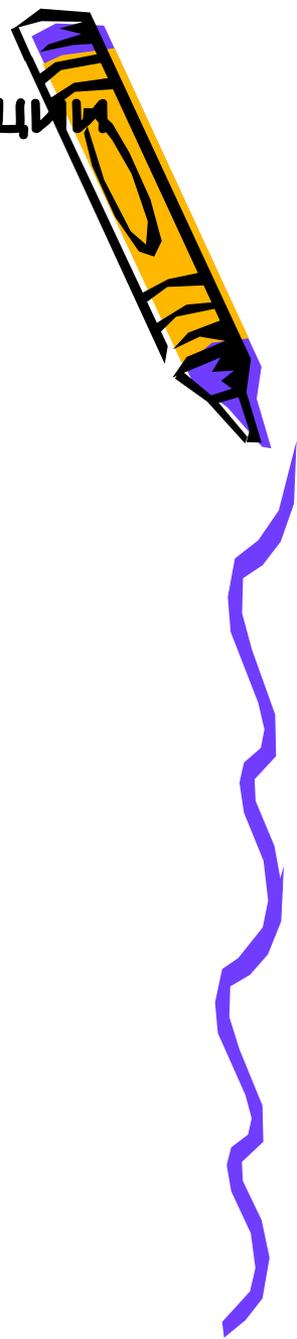
# На диаграмме Эйлера-Венна

- утверждение "множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ " изображают так



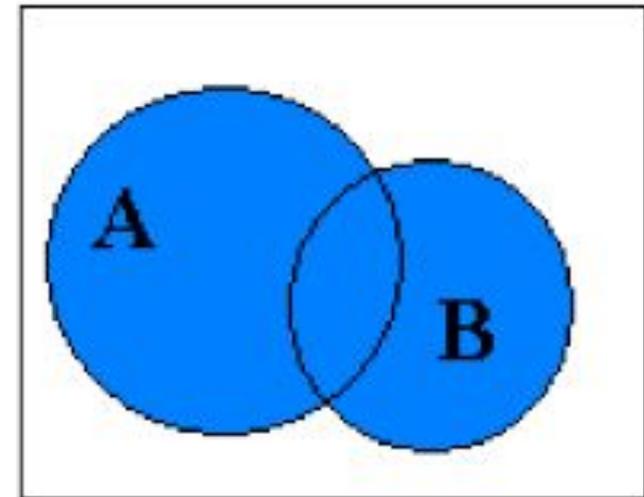
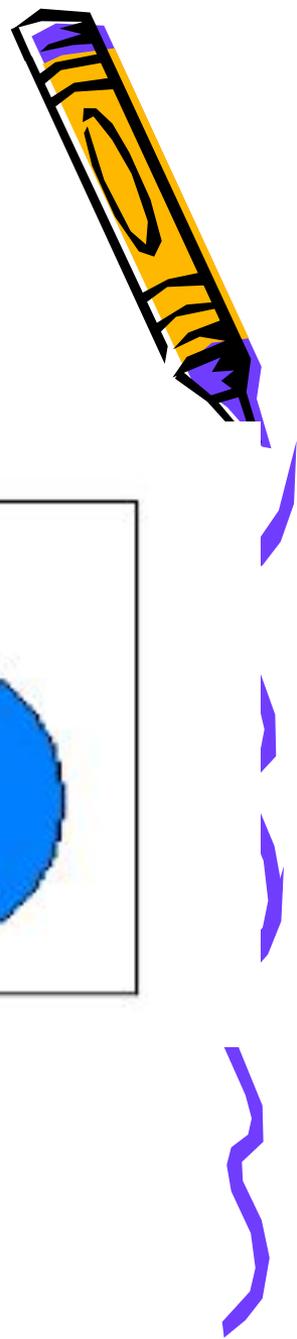
# Основные теоретико-множественные операции

1. Объединение
2. Пересечение
3. Разность
4. Дополнение.



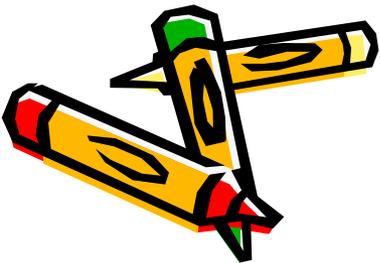
# Объединение

Суммой, или объединением произвольного конечного или бесконечного множества множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $A$ ,  $B$ .



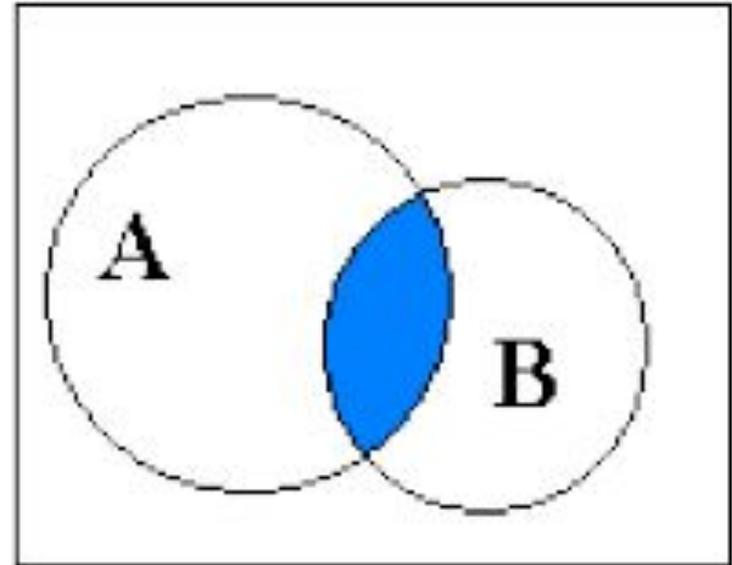
Объединением двух множеств называется новое множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$



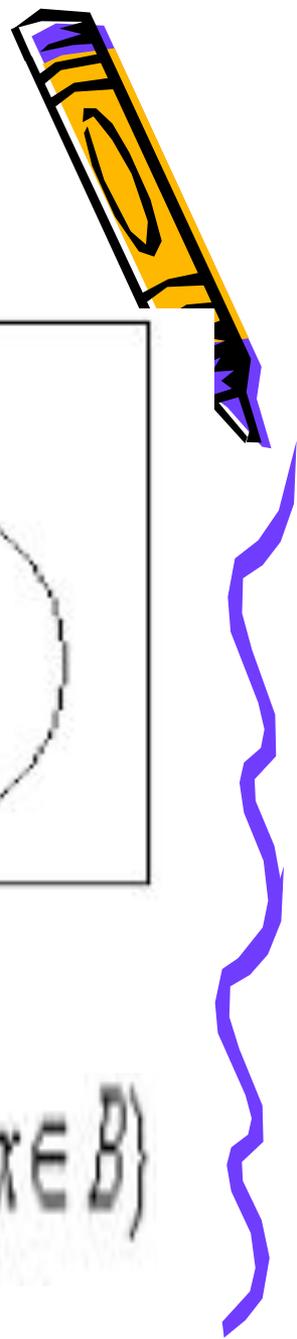
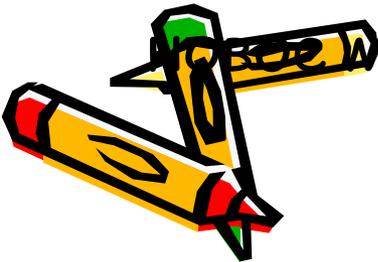
# Пересечение

Пересечением любого конечного или бесконечного множества множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам А и В одновременно.



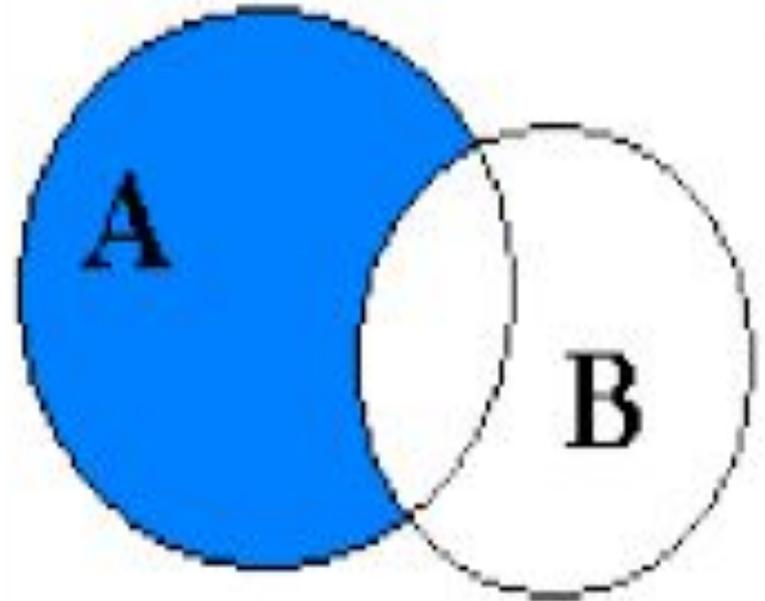
Пересечением двух множеств называется множество

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$



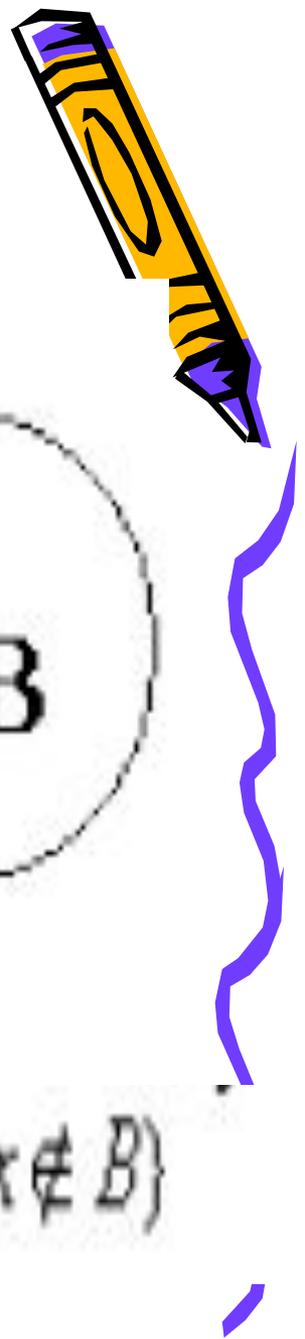
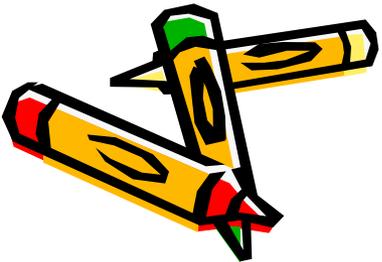
# Разность

Разностью между множеством  $B$  и множеством  $A$  называется множество всех элементов из  $B$ , не являющихся элементами множества  $A$ .

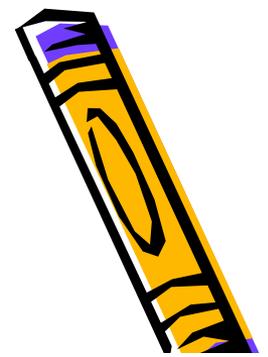


Разностью двух множеств называется новое множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$



# Дополнение



- Если класс объектов, на которых определяются различные множества обозначить (Универсум), то дополнением множества называют разность

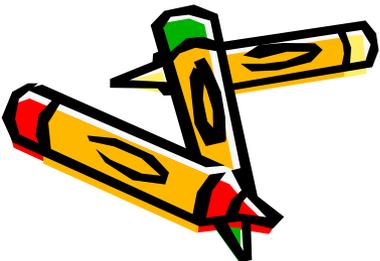
$$\bar{A} = \Omega \setminus A$$

Дополнением

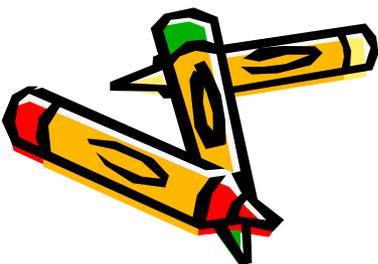
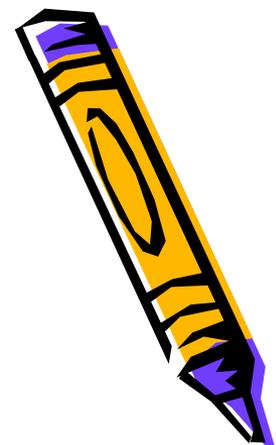
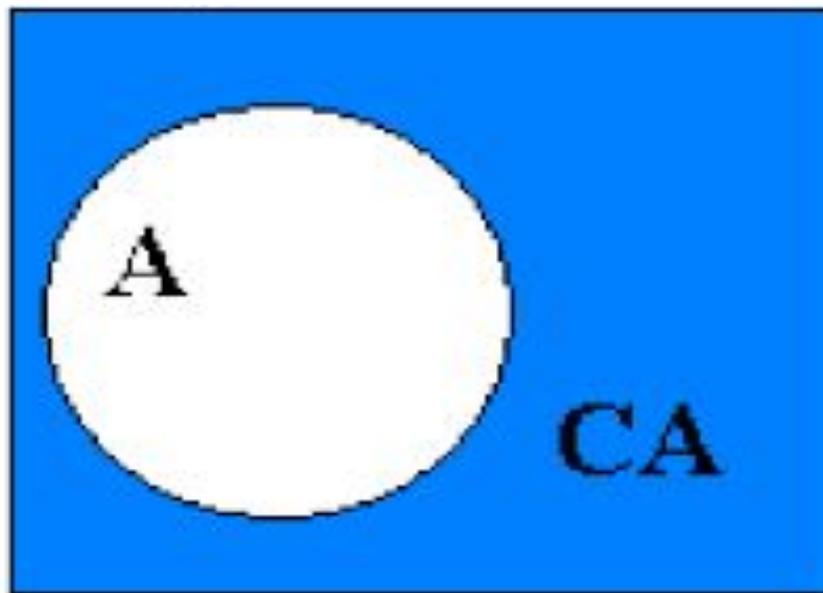
множества  $A$  до универсума  $\Omega$  называется разность  $\Omega \setminus A$  где  $A$  является подмножеством универсального множества

$\Omega$

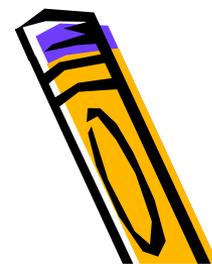
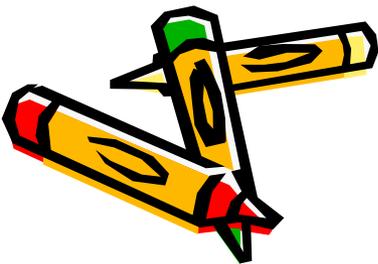
Дополнение множества обозначается через  $\bar{A}$ .



На диаграмме Эйлера-Венна  
дополнение множества  $A$  выглядит так



На факультете учатся студенты, принимающие участие в художественной самодеятельности и студенты, не принимающие участие в художественной самодеятельности. Пусть  $A$  – множество всех студентов факультета;  $B$  – множество студентов факультета, принимающих участие в художественной самодеятельности. Тогда объединением  $(A \cup B)$  этих множеств будет ...



множество студентов факультета, не принимающих участия в художественной самодеятельности

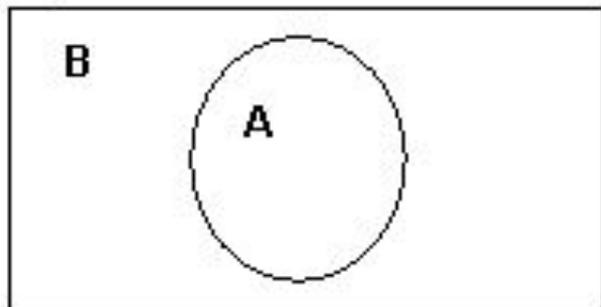
пустое множество

множество студентов факультета, принимающих участие в художественной самодеятельности

множество всех студентов факультета



Пусть  $A$  и  $B$  - множества, изображенные на рисунке:



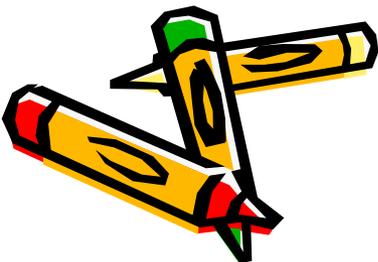
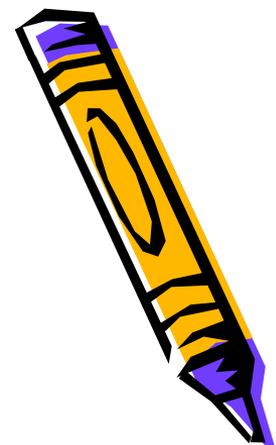
Тогда объединением этих множеств является ...

$$A \setminus B$$

$$B$$

$$A$$

$$\emptyset$$



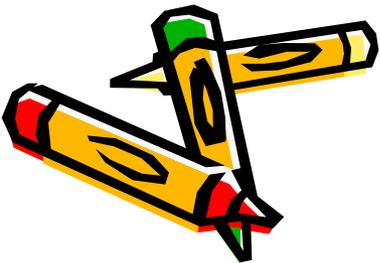
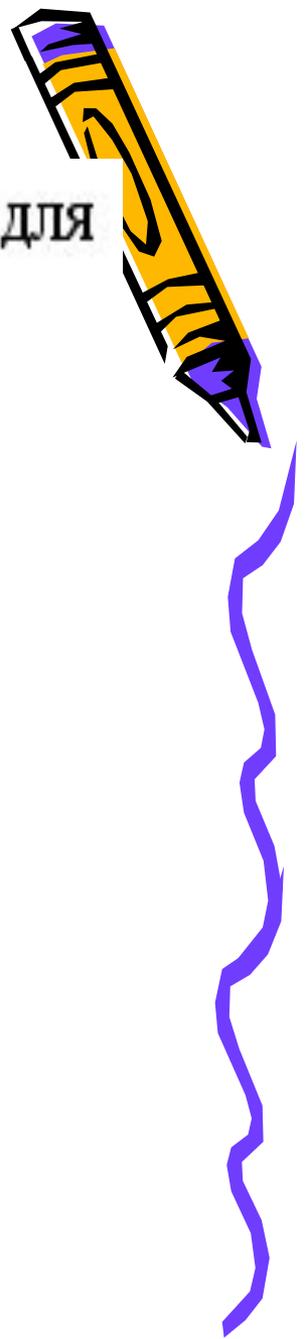
Заданы множества  $B = \{3, 4, 5\}$  и  $C = \{4, 5, 6\}$ , тогда для них верным утверждением будет ...

«Множество  $B$  является бесконечным»

«Множества  $B$  и  $C$  не равны»

«Множество  $B$  является подмножеством множества  $C$ »

«Множество  $C$  является подмножеством множества  $B$ »



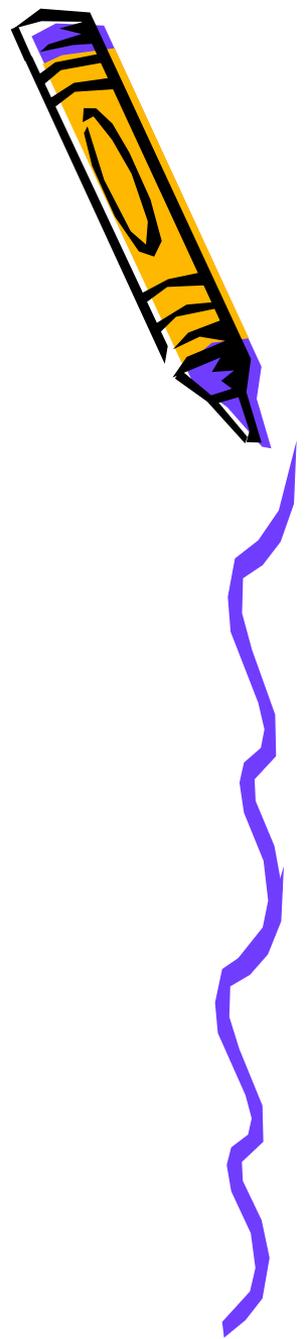
Заданы множества  $M = \{1,2,3\}$  и  $N = \{1,2,3\}$ , тогда для них неверным утверждением будет ...

«Множества  $M$  и  $N$  равны»

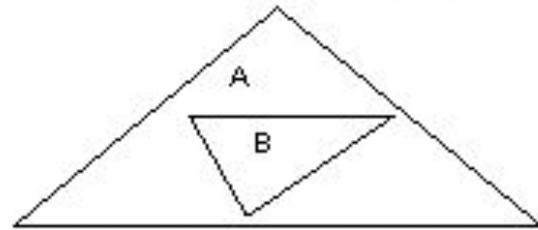
«Множество  $N$  есть подмножество множества  $M$ »

«Множество  $M$  есть подмножество множества  $N$ »

«Множество  $M$  не равно множеству  $N$ »



Пусть  $A$  и  $B$  - множества, изображенные на рисунке:



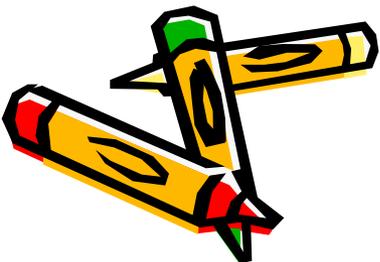
Тогда объединением этих множеств является ...

$A$

$\emptyset$

$B$

$A \setminus B$



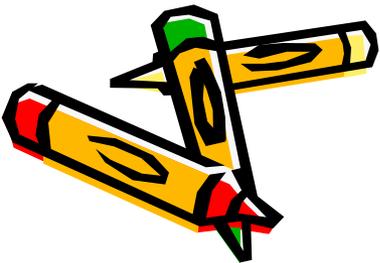
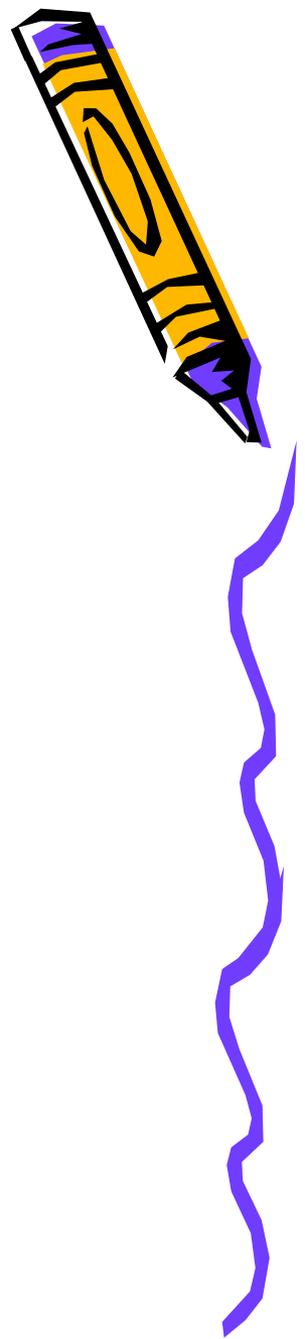
На факультете учатся студенты, принимающие участие в художественной самодеятельности и студенты, не принимающие участие в художественной самодеятельности. Пусть  $A$  – множество всех студентов факультета;  $B$  – множество студентов факультета, принимающих участие в художественной самодеятельности. Тогда пересечением  $(A \cap B)$  этих множеств будет ...

множество всех студентов факультета

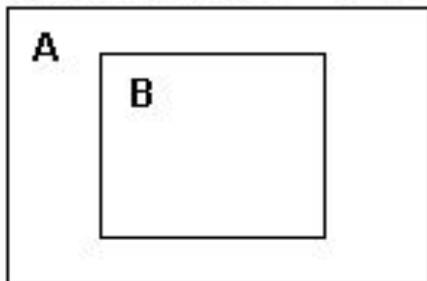
множество студентов факультета, не принимающих участия в художественной самодеятельности

пустое множество

множество студентов факультета, принимающих участие в художественной самодеятельности



Пусть  $A$  и  $B$  - множества, изображенные на рисунке:



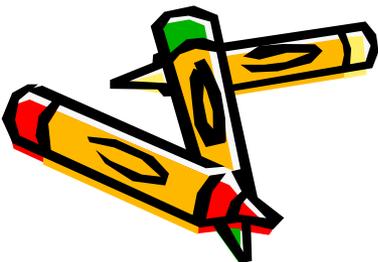
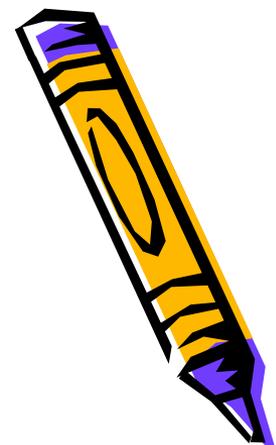
Тогда объединением этих множеств является ...

$A \setminus B$

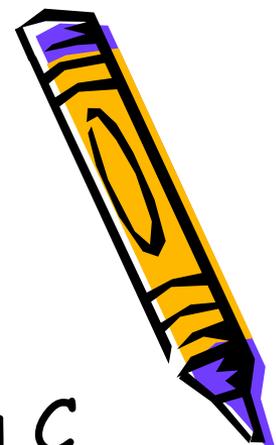
$\emptyset$

$A$

$B$



# Алгебраические свойства операций над множествами



- Т. 1.1. Для любых подмножеств  $A$ ,  $B$  и  $C$  универсального множества  $U$  справедливы следующие тождества:
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ .       $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .
- $A \cup B = B \cup A$ .       $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .       $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup \emptyset = A$ .       $A \cap U = A$
- $A \cup \neg A = U$        $A \cap \neg A = \emptyset$



Т 1.2. Для любых подмножеств  $A$  и  $B$  универсального множества  $U$  справедливы следующие утверждения:

6. Если для всех  $A$  имеет место  $A \cup B = A$ , то  $B = \emptyset$

6' Если для всех  $A$  имеет место  $A \cap B = A$ , то  $B = U$ .

7. 7' Если  $A \cup B = U$  и  $A \cap B = \emptyset$ , то  $B = \overline{A}$

8. 8'.  $\overline{\overline{A}} = A$

9.  $\overline{\emptyset} = U$ .

9'.  $\overline{U} = \emptyset$

10.  $A \cup A = A$ .

10'.  $A \cap A = A$ .

11.  $A \cup U = U$ .

11'.  $A \cap \emptyset = \emptyset$  - законы поглощения.

12.  $A \cup (A \cap B) = A$ . 12'.  $A \cap (A \cup B) = A$

13.  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ . 13'.  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  - законы де Моргана

