

Лекция 4

Логическое следствие.

Анализ рассуждений

в смысле осмысленная
бессмысленности
смысл тоже имеет
определенную
осмысленность.



Теорема:

**Бутерброд с колбасой лучше вечной
любви**



Доказательство:

Что может быть лучше вечной любви?

Да ничего.

**А бутерброд с колбасой – это лучше,
чем ничего.**

**Следовательно, бутерброд с колбасой
лучше вечной любви**



**Одно из важнейших предназначений
ЛОГИКИ СОСТОИТ В ТОМ, ЧТОБЫ
устанавливать, что из чего следует, т.е.
устанавливать структуры
высказываний, связанных отношением
ЛОГИЧЕСКОГО следования**



Всё, что делается или
не делается - всё к
лучшему...
Следовательно -
ЛУЧШЕЕ НЕИЗБЕЖНО.

Теория логического следования
изучает закономерности образования
формул F_1, F_2, \dots, F_k, G , по которым
первые k из них связаны с последней
отношением логического следования

Понятие логического следствия

Определение 1

$$F_1, F_2, \dots, F_k \models G$$

Формула G называется

логическим следствием формул

F_1, F_2, \dots, F_k , если она обращается в истинное высказывание при всяком наборе значений высказывательных переменных, при котором в истинное высказывание обращаются все формулы F_1, F_2, \dots, F_k

Понятие логического следствия

$$F_1, F_2, \dots, F_k \vdash G$$

Формулы F_1, F_2, \dots, F_k называются посылками для логического следствия G

Формула G является (заключением) логическим следствием формул

$$F_1, F_2, \dots, F_k$$

Понятие логического следствия

$$F_1, F_2, \dots, F_k \models G,$$

если для любых высказывательных

переменных, при которых:

$$t(F_1)=1, t(F_2)=1, \dots, t(F_k)=1$$

следует $t(G)=1$

Алгоритм проверки формул на логическое следствие

1. Построить истинностную таблицу для формул F_1, F_2, \dots, F_k и G
2. Выделить в этой таблице все строки, в которых формулы F_1, F_2, \dots, F_k принимают одновременно значение «истина»
3. Выяснить, какое значение в выделенных строках принимает формула G :
 - a) если формула G во всех этих строках принимает значение «истина», то $F_1, F_2, \dots, F_k \models G$;
 - b) если хотя бы в одной из данных строк формула G принимает значение «ложь», то G не является логическим следствием формул F_1, F_2, \dots, F_k

Задача 1

Выяснить, выполняется ли логическое следствие:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \rightarrow C$$

$t(A)$	$t(B)$	$t(C)$	$t(A \rightarrow B)$	$t(B \rightarrow C)$	$t(A \rightarrow C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Признак логического следствия

Теорема 1

$$F_1, F_2, \dots, F_k \models G \Leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k) \rightarrow G)\text{-ТИ}$$

Теорема 1

$$F_1, F_2, \dots, F_k \models G \Leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k) \rightarrow G)\text{-ТИ}$$

Доказательство (необходимость). Дано: $F_1, F_2, \dots, F_k \models G$

Докажем: $((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k) \rightarrow G)\text{-ТИ}$

- Возьмем какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, входящих в формулы F_1, F_2, \dots, F_k при котором:
- Рассмотрим два случая:
 - Пусть $t(F_1)=1, t(F_2)=1, \dots, t(F_k)=1$. Тогда, в силу условия: $F_1, F_2, \dots, F_k \models G$, имеем $t(G)=1$. Следовательно,
$$t((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k) \rightarrow G)=1$$
 - Пусть $t(F_i)=0$. Тогда $t(F_1 \wedge \dots \wedge F_i \wedge \dots \wedge F_k)=0$, и
$$t((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k) \rightarrow G)=1$$
- Таким образом, формула $((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k) \rightarrow G)$ при любом наборе значений высказывательных переменных принимает значение «истина», отсюда
$$((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k) \rightarrow G)\text{-ТИ}$$

Теорема 1

$$F_1, F_2, \dots, F_k \models G \Leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k) \rightarrow G)\text{-ТИ}$$

Доказательство (достаточность).

Дано: $((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k) \rightarrow G)$ -ТИ

Докажем: $F_1, F_2, \dots, F_k \models G$

- Возьмем какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, входящих в формулы F_1, F_2, \dots, F_k
- Предположим, что при этом наборе значений высказывательных переменных все формулы F_1, F_2, \dots, F_k принимают значение «истина».

Т.к. $((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k) \rightarrow G)$ -ТИ, $t((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k) \rightarrow G) = 1$, то $t(G) = 1$

- Таким образом, при любом наборе значений высказывательных переменных, при котором $t(F_1) = 1, t(F_2) = 1, \dots, t(F_k) = 1$, формула G также принимает значение «истина», следовательно $F_1, F_2, \dots, F_k \models G$

Задача 1

Выяснить, выполняется ли логическое следствие:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vDash A \rightarrow C$$

Решение (2 способ)

по признаку логического следствия

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vDash A \rightarrow C \Leftrightarrow (((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)) \text{—ТИ}$$

Свойства логического следования

1. (рефлексивное свойство логического следования)

$$F_1, F_2, \dots, F_k \vdash F_i \quad (i=1,2,\dots,k)$$

Свойства логического следования

2. (транзитивное свойство логического следования)

Если $F_1, F_2, \dots, F_k \models H_i$ ($i=1, 2, \dots, s$)
и если $H_1, H_2, \dots, H_s \models G$,
то $F_1, F_2, \dots, F_k \models G$

Свойства логического следования

3. Если $\{H_1, H_2, \dots, H_s\} \subseteq \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$
и $H_1, H_2, \dots, H_s \models G$, то $F_1, F_2, \dots, F_k \models G$

Свойства логического следования

4. (теорема дедукции)

Если $F_1, F_2, \dots, F_{k-1}, F_k \vdash G$,
то $F_1, F_2, \dots, F_{k-1} \vdash (F_k \rightarrow G)$

Свойства логического следования

5. Если $F_1, F_2, \dots, F_k \models G$ и $G \equiv H$,
то $F_1, F_2, \dots, F_k \models H$

Свойства логического следования

6. Пусть дано множество формул

$$F_1, F_2, \dots, F_k \quad (1)$$

и последовательность формул

$$H_1, H_2, \dots, H_s \quad (2)$$

причем каждая из формул последовательности (2) либо совпадает с одной из формул последовательности (1), либо является логическим следствием предыдущих формул, тогда имеет место

$$F_1, F_2, \dots, F_k \vdash H_i \quad (i=1,2,\dots,s)$$

Дедуктивное рассуждение (или *вывод*) – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких взаимосвязанных по смыслу предложений получается предложение, содержащее новое (по отношению к исходным) знание

Иными словами, *вывод* есть такая последовательность формул (или шагов), что каждая формула этой последовательности является либо одной из посылок, либо получается из некоторых предыдущих формул по какому-то из *правил вывода*

Правила логических умозаключений

1. Правило заключения: $F, F \rightarrow G \vdash G$
2. Правило силлогизма: $F \rightarrow G, G \rightarrow H \vdash F \rightarrow H$
3. Правило контрапозиции: $F \rightarrow G \vdash \bar{G} \rightarrow \bar{F}$
4. Правило отрицания: $F \rightarrow G, \bar{G} \vdash \bar{F}$
5. Введение дизъюнкции: $F \vdash F \vee G$
6. Удаление дизъюнкции: $F \vee G, \bar{G} \vdash F$
7. Введение конъюнкции: $F, G \vdash F \wedge G$
8. Удаление конъюнкции: $F \wedge G \vdash F, F \wedge G \vdash G$



Правила логических умозаключений

1. Правило заключения (*modus ponens*):

$$F, F \rightarrow G \vdash G$$

Доказательство (*modus ponens*) :

$t(F)$	$t(F \rightarrow G)$	$t(G)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Задача 2

Выяснить, выполняется ли логическое следствие:

$$A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \not\models B \vee D$$

Решение (3 способ) – на основе вывода:

- $B \vee D \equiv \overline{B} \rightarrow D$ – свойство 5 логического следствия
 - $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C, \overline{B} \not\models D$ – свойство 4 (Т. дедукции)
- 1) \overline{B} – посылка;
 - 2) $A \rightarrow B$ – посылка;
 - 3) $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ – из 1) и 2) по правилу контрапозиции;
 - 4) \overline{A} – из 1) и 3) по правилу заключения;
 - 5) $A \vee C$ – посылка;
 - 6) C – из 4) и 5) по правилу удаления дизъюнкции;
 - 7) $C \rightarrow D$ – посылка;
 - 8) D – из 6) и 7) по правилу заключения

По теореме дедукции получаем: $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \not\models B \vee D$

Метод от противного

Требуется выяснить: $F_1, F_2, \dots, F_k \vDash G$

Суть метода

- Предположим, что G не есть логическое следствие формул F_1, F_2, \dots, F_k
- Значит, существуют такие конкретные высказывания A_1, A_2, \dots, A_n , что $G(A_1, A_2, \dots, A_n)$ - ложно, в то время как все высказывания $F_1(A_1, A_2, \dots, A_n), F_2(A_1, A_2, \dots, A_n), \dots, F_k(A_1, A_2, \dots, A_n)$ — ИСТИННЫ
 - Если возникает противоречие, то предположение неверно
 - Если противоречие не возникает, то предположение подтверждается

Задача 2

Выяснить, выполняется ли логическое следование:

$$A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \not\models B \vee D$$

Решение (4 способ) – от противного: Допустим, что существуют такие конкретные высказывания A, B, C и D что $t(A \rightarrow B)=1, t(C \rightarrow D)=1, t(A \vee C)=1$, но $t(B \vee D)=0$

- Т.к. $t(B \vee D)=0 \Rightarrow t(B)=0, t(D)=0$
- Т.к. $t(A \rightarrow B)=1, t(B)=0 \Rightarrow t(A)=0$
- Т.к. $t(C \rightarrow D)=1, t(D)=0 \Rightarrow t(C)=0$
- Тогда $t(A \vee C)=0$
- Пришли к противоречию: $t(A \vee C)=1$, которое означает, что наше предположение неверно. А значит верно: $t(B \vee D)=1$ и $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \models B \vee D$

Ответ: логическое следствие выполняется

Анализ рассуждений

Алгоритм установления справедливости рассуждения

- 1. Выделить все простые высказывания, входящие в состав рассуждения, и обозначить каждое из них высказывательной переменной*
- 2. Записать каждое предложение данного рассуждения в виде логической формулы, используя введенные высказывательные переменные и логические операции*
- 3. Выделить (по смыслу) из полученных формул посылки и заключение*
- 4. Выяснить, является ли заключение логическим следствием посылок:*
 - a) Если заключение является логическим следствием посылок, то рассуждение справедливо*
 - b) Если заключение не является логическим следствием посылок, то рассуждение несправедливо*

Задача 2

Выяснить, являются ли следующие рассуждения логически верными:

Если Джонс не встречал ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс не лжет. Следовательно, Смит был убийцей.



Решение:

Введем логические переменные:

A: «Джонс не встречал ночью Смита»

B: «Смит убийца»

C: «Джонс лжет»

D: «убийство состоялось после полуночи»



$$A \rightarrow (B \vee C), \bar{B} \rightarrow (A \wedge D), D \rightarrow (B \vee \bar{C}) \models B$$

Доказательство справедливости рассуждений проведем методом от противного

- **Предположим, что**

$$t(A \rightarrow (B \vee C)) = 1, t(\frac{-}{B} \rightarrow (A \wedge D)) = 1, t(D \rightarrow (B \vee \frac{-}{C})) = 1, \text{ а } t(B) = 0$$

- $t(\frac{-}{B} \rightarrow (A \wedge D)) = 1$ и $t(\frac{-}{B}) = 1 \Rightarrow t(A \wedge D) = 1, t(A) = 1, t(D) = 1$
- $t(A \rightarrow (B \vee C)) = 1$ и $t(A) = 1 \Rightarrow t(B \vee C) = 1$, м.к. $t(B) = 0$, то $t(C) = 1$
- $t(D \rightarrow (B \vee \frac{-}{C})) = 1$ и $t(D) = 1 \Rightarrow t(B \vee \frac{-}{C}) = 1$, м.к. $t(\frac{-}{C}) = 0$, то $t(B) = 1$
- **Пришли к противоречию: $t(B) = 0, t(B) = 1$**
- **Следовательно, предположение $t(B) = 0$ неверно, а верно $t(B) = 1$ и рассуждения логически правильны**