Лекция 4
Логическое следствие.
Анализ рассуждений

Теорема:

Бутерброд с колбасой лучше вечной любви

Доказательство:

Что может быть лучше вечной любви?

Да ничего.

А бутерброд с колбасой – это лучше, чем ничего.

Следовательно, бутерброд с колбасой лучше вечной любви

Одно из важнейших предназначений логики состоит в том, чтобы устанавливать, что из чего следует, т.е. устанавливать структуры высказываний, связанных отношением логического следования

Теория логического следования изучает закономерности образования формул $F_1, F_2, \ldots, F_k, G$, по которым первые k из них связаны с последней отношением логического следования

Понятие логического следствия

Определение 1

$$F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$$

Формула G называется логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$, если она обращается в истинное высказывание при всяком наборе значений высказывательных переменных, при котором в истинное высказывание обращаются все формулы $F_1, F_2, \ldots, F_k$

Понятие логического следствия

$$F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$$

Формулы $F_1, F_2, \ldots, F_k$ называются посылками для логического следствия G

Формула G является (заключением) логическим следствием формул

$$F_1, F_2, \ldots, F_k$$

Понятие логического следствия

$$F_1, F_2, \ldots, F_k \models G,$$

если для любых высказывательных переменных, при которых:

$$t(F_1)=1,\ t(F_2)=1,\ \ldots,\ t(F_k))=1$$

следует $t(G)=1$

Алгоритм проверки формул на логическое следствие

1. Построить истинностную таблицу для формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$ и G
2. Выделить в этой таблице все строки, в которых формулы $F_1, F_2, \ldots, F_k$ принимают одновременно значение «истина»
3. Выяснить, какое значение в выделенных строках принимает формула G:
   a) если формула G во всех этих строках принимает значение «истина», то $F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$;
   b) если хотя бы в одной из данных строк формула G принимает значение «ложь», то G не является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$

Задача 1

Выяснить, выполняется ли логическое следствие:

$$A \to B,\ B \to C \models A \to C$$

$t(A)$	$t(B)$	$t(C)$	$t(A \to B)$	$t(B \to C)$	$t(A \to C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Признак логического следствия

Теорема 1

$$F_1, F_2, \ldots, F_k \models G \Leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k) \rightarrow G)\text{-ТИ}$$

Теорема 1

$$F_1, F_2, \ldots, F_k \models G \Leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k) \rightarrow G)\text{-ТИ}$$

Доказательство (необходимость). Дано: $F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$

Докажем: $((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k) \rightarrow G)$-ТИ

- **Возьмем какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, входящих в формулы $F_1, F_2, \ldots, F_k$ при котором:**
- **Рассмотрим два случая:**
  - **Пусть $t(F_1)=1, t(F_2)=1, \ldots, t(F_k)=1$. Тогда, в силу условия: $F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$, имеем $t(G)=1$. Следовательно,**

$$t((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k) \rightarrow G)=1$$

  - **Пусть $t(F_i)=0$. Тогда $t(F_1 \wedge \ldots \wedge F_i \wedge \ldots \wedge F_k)=0$, и**

$$t((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k) \rightarrow G)=1$$

- **Таким образом, формула $((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k) \rightarrow G)$ при любом наборе значений высказывательных переменных принимает значение «истина», отсюда**

$$((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k) \rightarrow G)\text{-ТИ}$$

Теорема 1

$F_1, F_2, \ldots, F_k \models G \Leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k) \to G)$-ТИ

Доказательство (достаточность).

Дано: $((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k) \to G)$-ТИ

Докажем: $F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$

- **Возьмем какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, входящих в формулы $F_1, F_2, \ldots, F_k$**
- **Предположим, что при этом наборе значений высказывательных переменных все формулы $F_1, F_2, \ldots, F_k$ принимают значение «истина».**

Т.к. $((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k) \to G)$-ТИ, $t((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k) \to G)=1$, то $t(G)=1$

- **Таким образом, при любом наборе значений высказывательных переменных, при котором $t(F_1)=1, t(F_2)=1, \ldots, t(F_k)=1$, формула G также принимает значение «истина», следовательно $F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$**

Задача 1

Выяснить, выполняется ли логическое следствие:

$$A \to B,\ B \to C \models A \to C$$

Решение (2 способ)

по признаку логического следствия

$$A \to B,\ B \to C \models A \to C \Leftrightarrow (((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)) - \text{ТИ}$$

Свойства логического следования

1. (рефлексивное свойство логического следования)

$$F_1, F_2, \ldots, F_k \models F_i \ (i=1,2,\ldots,k)$$

Свойства логического следования

2. (транзитивное свойство логического следования)

Если $F_1, F_2, \ldots, F_k \models H_i$ (i=1, 2, …, s)
и если $H_1, H_2, \ldots, H_s \models G$,
то $F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$

Свойства логического следования

3. Если $\{H_1, H_2, \ldots, H_s\} \subseteq \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ и $H_1, H_2, \ldots, H_s \models G$, то $F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$

Свойства логического следования

4. (теорема дедукции)

Если $F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}, F_k \models G$,

то $F_1, F_2, \ldots, F_{k-1} \models (F_k \to G)$

Свойства логического следования

5. Если $F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$ и $G \equiv H$,
то $F_1, F_2, \ldots, F_k \models H$

Свойства логического следования

6. Пусть дано множество формул

$$F_1, F_2, \ldots, F_k \qquad (1)$$

и последовательность формул

$$H_1, H_2, \ldots, H_s \qquad (2)$$

причем каждая из формул последовательности (2) либо совпадает с одной из формул последовательности (1), либо является логическим следствием предыдущих формул, тогда имеет место

$$F_1, F_2, \ldots, F_k \models H_i \ (i=1,2,\ldots,s)$$

Дедуктивное рассуждение **(или *вывод*) – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких взаимосвязанных по смыслу предложений получается предложение, содержащее новое (по отношению к исходным) знание**

Иными словами, *вывод* есть такая последовательность формул (или шагов), что каждая формула этой последовательности является либо одной из посылок, либо получается из некоторых предыдущих формул по какому-то из *правил вывода*

Правила логических умозаключений

1. **Правило заключения:** $F, F \to G \models G$
2. **Правило силлогизма:** $F \to G, G \to H \models F \to H$
3. **Правило контрапозиции:** $F \to G \models \overline{G} \to \overline{F}$
4. **Правило отрицания:** $F \to G, \overline{G} \models \overline{F}$
5. **Введение дизъюнкции:** $F \models F \vee G$
6. **Удаление дизъюнкции:** $F \vee G, \overline{G} \models F$
7. **Введение конъюнкции:** $F, G \models F \wedge G$
8. **Удаление конъюнкции:** $F \wedge G \models F, F \wedge G \models G$

Правила логических умозаключений

1. Правило заключения (modus ponens):

$$F,\ F \to G \models G$$

Доказательство (modus ponens) :

$t(F)$	$t(F \to G)$	$t(G)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Задача 2

Выяснить, выполняется ли логическое следствие:

$$A \to B,\ C \to D,\ A \vee C \models B \vee D$$

Решение (3 способ) – на основе вывода:

- $B \vee D \equiv \overline{B} \to D$ – *свойство 5 логического следствия*
- $A \to B,\ C \to D,\ A \vee C,\ \overline{B} \models D$ – *свойство 4 (Т. дедукции)*

1) $\overline{B}$ – *посылка;*
2) $A \to B$ – *посылка;*
3) $\overline{B} \to \overline{A}$ – *из 1) и 2) по правилу контрапозиции;*
4) $\overline{A}$ – *из 1) и 3) по правилу заключения;*
5) $A \vee C$ – *посылка;*
6) C – *из 4) и 5) по правилу удаления дизъюнкции;*
7) $C \to D$ – *посылка;*
8) D – *из 6) и 7) по правилу заключения*

По теореме дедукции получаем: $A \to B,\ C \to D,\ A \vee C \models B \vee D$

Метод от противного

Требуется выяснить: $F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$

Суть метода

- **Предположим, что** G **не есть логическое следствие формул** $F_1, F_2, \ldots, F_k$
- **Значит, существуют такие конкретные высказывания** $A_1, A_2, \ldots, A_n$, **что** $G(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ **- ложно, в то время как все высказывания**

$F_1(A_1, A_2, \ldots, A_n), F_2(A_1, A_2, \ldots, A_n), \ldots, F_k(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ **–истинны**

  - **Если возникает противоречие, то предположение неверно**
  - **Если противоречие не возникает, то предположение подтверждается**

Задача 2

Выяснить, выполняется ли логическое следование: $A \to B,\ C \to D,\ A \vee C \models B \vee D$

Решение (4 способ) – от противного: **Допустим, что существуют такие конкретные высказывания** A, B, C **и D что** $t(A \to B)=1$, $t(C \to D)=1$, $t(A \vee C)=1$, **но** $t(B \vee D)=0$

- **Т.к.** $t(B \vee D)=0 \Rightarrow t(B)=0,\ t(D)=0$
- **Т.к.** $t(A \to B)=1,\ t(B)=0 \Rightarrow t(A)=0$
- **Т.к.** $t(C \to D)=1,\ t(D)=0 \Rightarrow t(C)=0$
- **Тогда** $t(A \vee C)=0$
- **Пришли к противоречию:** $t(A \vee C)=1$, **которое означает, что наше предположение неверно. А значит верно:** $t(B \vee D)=1$ **и** $A \to B,\ C \to D,\ A \vee C \models B \vee D$

Ответ: **логическое следствие выполняется**

Анализ рассуждений

Алгоритм установления справедливости рассуждения

1. ***Выделить все простые высказывания, входящие в состав рассуждения, и обозначить каждое из них высказывательной переменной***
2. ***Записать каждое предложение данного рассуждения в виде логической формулы, используя введенные высказывательные переменные и логические операции***
3. ***Выделить (по смыслу) из полученных формул посылки и заключение***
4. ***Выяснить, является ли заключение логическим следствием посылок:***
   a) ***Если заключение является логическим следствием посылок, то рассуждение справедливо***
   b) ***Если заключение не является логическим следствием посылок, то рассуждение несправедливо***

Задача 2

Выяснить, являются ли следующие рассуждения логически верными:

Если Джонс не встречал ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс не лжет. Следовательно, Смит был убийцей.

Решение:

Введем логические переменные:

A: **«Джонс не встречал ночью Смита»**

B: **«Смит убийца»**

C: **«Джонс лжет»**

D: **«убийство состоялось после полуночи»**

$$A \to (B \vee C),\ \overline{B} \to (A \wedge D),\ D \to (B \vee \overline{C}) \models B$$

Доказательство справедливости рассуждений проведем методом от противного

- **Предположим, что**

  $t(A\to(B\vee C))=1$, $t(\overline{B}\to(A\wedge D))=1$, $t(D\to(B\vee \overline{C}))=1$, **а** $t(B)=0$

- $t(\overline{B}\to(A\wedge D))=1$ ***и*** $t(\overline{B})=1 \Rightarrow t(A\wedge D)=1$, $t(A)=1$, $t(D)=1$
- $t(A\to(B\vee C))=1$ ***и*** $t(A)=1 \Rightarrow t(B\vee C)=1$, ***т.к.*** $t(B)=0$, ***то*** $t(C)=1$
- $t(D\to(B\vee \overline{C}))=1$ ***и*** $t(D)=1 \Rightarrow t(B\vee \overline{C})=1$, ***т.к.*** $t(\overline{C})=0$, ***то*** $t(B)=1$
- ***Пришли к противоречию:*** $t(B)=0$, $t(B)=1$
- ***Следовательно, предположение*** $t(B)=0$ ***неверно, а верно***

  $t(B)=1$ ***и рассуждения логически правильны***