

Вычисление информационного объема сообщения

ЕГЭ 13

Что нужно знать

- с помощью K бит можно закодировать $Q = 2^K$ различных вариантов (чисел)
- таблица степеней двойки, она же показывает, сколько вариантов Q можно закодировать с помощью K бит:

K , бит	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q , вариантов	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

- при измерении количества информации принимается, что в одном байте 8 бит, а в одном килобайте (1 Кбайт) – 1024 байта, в мегабайте (1 Мбайт) – 1024 Кбайта²
- чтобы найти информационный объем сообщения (текста) I , нужно умножить количество символов (отсчетов) N на число бит на символ (отсчет) K : $I = N \cdot K$
 - мощность алфавита M – это количество символов в этом алфавитеесли алфавит имеет мощность M , то количество всех возможных «слов» (символьных цепочек) длиной N (без учета смысла) равно $Q = M^N$; для двоичного кодирования (мощность алфавита $M = 2$ символа) получаем известную формулу: $Q = 2^N$

Что нужно знать:

Большие числа. Что делать?

Обычно (хотя и не всегда) задачи, в условии которых даны большие числа, решаются достаточно просто, если выделить в этих числах степени двойки. На эту мысль должны сразу наталкивать такие числа как

$$\begin{aligned} 128 &= 2^7, & 256 &= 2^8, & 512 &= 2^9, & 1024 &= 2^{10}, \\ 2048 &= 2^{11}, & 4096 &= 2^{12}, & 8192 &= 2^{13}, & 16384 &= 2^{14}, & 65536 &= 2^{16} \text{ и т.п.} \end{aligned}$$

Нужно помнить, что соотношение между единицами измерения количества информации также представляют собой степени двойки:

$$\begin{aligned} 1 \text{ байт} &= 8 \text{ бит} = 2^3 \text{ бит}, \\ 1 \text{ Кбайт} &= 1024 \text{ байта} = 2^{10} \text{ байта} \\ &= 2^{10} \cdot 2^3 \text{ бит} = 2^{13} \text{ бит}, \\ 1 \text{ Мбайт} &= 1024 \text{ Кбайта} = 2^{10} \text{ Кбайта} \\ &= 2^{10} \cdot 2^{10} \text{ байта} = 2^{20} \text{ байта} \\ &= 2^{20} \cdot 2^3 \text{ бит} = 2^{23} \text{ бит}. \end{aligned}$$

Правила выполнения операций со степенями:

- при умножении степени при одинаковых основаниях складываются

$$2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$$

- ... а при делении – вычитаются:

$$\frac{2^a}{2^b} = 2^{a-b}$$

При регистрации в компьютерной системе каждому пользователю выдаётся пароль, состоящий из 15 символов и содержащий только символы Ш, К, О, Л, А (таким образом, используется 5 различных символов). Каждый такой пароль в компьютерной системе записывается минимально возможным и одинаковым целым количеством байт (при этом используют посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит). Укажите объём памяти в байтах, отводимый этой системой для записи 30 паролей. В ответе запишите только число, слово «байт» писать не нужно.

*****⁽¹⁵⁾

- 1) согласно условию, в пароле можно использовать 5 символов
 - 2) для кодирования номера одного из 5 символов нужно выделить 3 бита памяти (они позволяют закодировать $2^3 = 8$ вариантов)
 - 3) для хранения всех 15 символов пароля нужно $15 \cdot 3 = 45$ бит
 - 4) поскольку пароль должен занимать целое число байт, берем ближайшее большее (точнее, не меньшее) значение, которое кратно 8: это $48 = 6 \cdot 8$; то есть один пароль занимает 6 байт
 - 5) тогда 30 паролей занимают $6 \cdot 30 = 180$ байт
- ответ: 180.

Для регистрации на сайте некоторой страны пользователю требуется придумать пароль. Длина пароля – ровно 11 символов. В качестве символов используются десятичные цифры и 12 различных букв местного алфавита, причём все буквы используются в двух начертаниях: как строчные, так и заглавные (регистр буквы имеет значение!).

Под хранение каждого такого пароля на компьютере отводится минимально возможное и одинаковое целое количество байтов, при этом используется посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством битов.

Определите объём памяти в байтах, который занимает хранение 60 паролей.

- 1) согласно условию, в пароле можно использовать 10 цифр (0..9) + 12 заглавных букв местного алфавита + 12 строчных букв, всего $10 + 12 + 12 = 34$ символа
 - 2) для кодирования номера одного из 34 символов нужно выделить 6 бит памяти (5 бит не хватает, они позволяют закодировать только $2^5 = 32$ варианта)
 - 3) для хранения всех 11 символов пароля нужно $11 \cdot 6 = 66$ бит
поскольку пароль должен занимать целое число байт, берем ближайшее большее (точнее, не меньшее) значение, которое кратно 8: это $72 = 9 \cdot 8$; то есть один пароль занимает 9 байт
 - 4) тогда 60 паролей занимают $9 \cdot 60 = 540$ байт
- ответ: 540.

Информационная панель может отображать сообщения, состоящие из 10 цифр, причем каждая цифра может быть трёх цветов. Цифры и цвета могут повторяться. Контроллер панели выделяет под каждое сообщение одинаковое и минимальное возможное целое число байт. При этом используется посимвольное кодирование, все символы сообщения кодируются одинаковым минимально возможным количеством бит. Укажите объем памяти в байтах для хранения 100 сообщений.

- 1) на панели 10 позиций, каждая позиция – это цифра, которая может гореть одним из трёх цветов
 - 2) подсчитаем, сколько сигналов можно закодировать с помощью одной позиции панели: выбираем 1 из 10 цифр, и кроме того (независимо от цифры!) один из трёх цветов; поэтому общее количество вариантов равно $10 \cdot 3 = 30$
 - 3) для кодирования 30 вариантов нужно 5 битов ($2^4 < 30 \leq 2^5$)
 - 4) для кодирования состояния 10 позиций панели нужно $10 \cdot 5 = 50$ битов или 6,25 байтов, округляем вверх до 7 байтов (на одно сообщение)
 - 5) на кодирование 100 сообщений требуется $100 \cdot 7 = 700$ байтов
- Ответ: 700 байтов.

В велокроссе участвуют 119 спортсменов. Специальное устройство регистрирует прохождение каждым из участников промежуточного финиша, записывая его номер с использованием минимально возможного количества бит, одинакового для каждого спортсмена. Каков информационный объем в битах сообщения, записанного устройством, после того как промежуточный финиш прошли 70 велосипедистов?

- 1) велосипедистов было 119, у них 119 разных номеров, то есть, нам нужно закодировать 119 вариантов
- 2) по таблице степеней двойки находим, что для этого нужно минимум 7 бит (при этом можно закодировать 128 вариантов, то есть, еще есть запас); итак, 7 бит на один отсчет
- 3) когда 70 велосипедистов прошли промежуточный финиш, в память устройства записано 70 отсчетов
- 4) поэтому в сообщении $70 * 7 = 490$ бит информации.

Объем сообщения, содержащего 4096 символов, равен 1/512 части Мбайта. Какова мощность алфавита, с помощью которого записано это сообщение?

1) в сообщении было $4096 = 2^{12}$ символов

2) объем сообщения:

$1/512$ Мбайта = $2^{23} / 512$ бита = $2^{23} / 2^9$ бита = 2^{14} бита (= 16384 бита!)

3) место, отведенное на 1 символ:

2^{14} бита / 2^{12} символов = 2^2 бита на символ = 4 бита на символ

4) 4 бита на символ позволяют закодировать $2^4 = 16$ разных символов
поэтому мощность алфавита – 16 символов

В школьной базе данных хранятся записи, содержащие информацию об учениках:

<Фамилия> – 16 символов: русские буквы (первая прописная, остальные строчные),

<Имя> – 12 символов: русские буквы (первая прописная, остальные строчные),

<Отчество> – 16 символов: русские буквы (первая прописная, остальные строчные),

<Год рождения> – числа от 1992 до 2003.

Каждое поле записывается с использованием минимально возможного количества бит. Определите минимальное количество байт, необходимое для кодирования одной записи, если буквы е и ё считаются совпадающими.

***** (16 символов фамилия) 32 вар => 5бит *16=80 бит

***** (12 символов имя) 32 вар => 5бит *12=60 бит

***** (16 символов отчество) 32 вар => 5бит *16=80 бит

Год рождения 1992 до 2003 12 вар => 4 бит

80+60+80+4=224 бит = **28 байт**

При регистрации в компьютерной системе каждому пользователю выдаётся пароль, состоящий из n символов и содержащий только буквы X, Y, Z. Каждый такой пароль в компьютерной программе записывается минимально возможным и одинаковым целым количеством байт, при этом используют посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит. Количество байт, необходимое для хранения 30 паролей — 120. Найти минимальное n .

Количество байт для хранения одного пароля: $\frac{120}{30} = 4$ байта (32 бита). Минимально количество бит для кодирования одного символа — 2.

Количество бит для хранения одного пароля должно быть от 25 до 32 чтобы количество байт было равно 4. Так как один символ кодируется 2 битами, нам нужно четное количество. Значит, количество бит для хранения одного пароля должно быть 26. Следовательно, минимальное

$$n = \frac{26}{2} = 13 \text{ символов.}$$

Ответ: 13

Автомобильный номер состоит из нескольких букв (количество букв одинаковое во всех номерах), за которыми следуют 3 цифры. При этом используются 10 цифр и только 4 буквы: А, В, С, D. Нужно получить не менее 100 000 различных номеров. Какое наименьшее количество букв должно быть в автомобильном номере?

Цифры на номере можно записать с помощью $10^3 = 1000$ способов. Каждая новая буква увеличивает число возможных номеров в 4 раза. Следовательно:

$$1000 \cdot 4^n \geq 100000$$

$$4^n \geq 100$$

$$\min(n) = 4$$

Ответ: 4