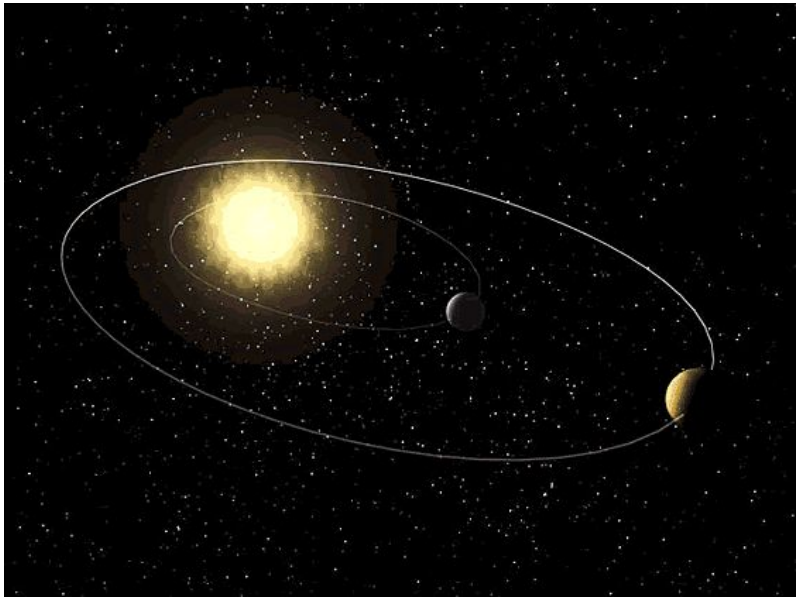
Лекция № 8
Всемирное тяготение



Алексей Викторович Гуденко

29/03/2018

План лекции

- Закон всемирного тяготения.
- Теорема Гаусса.
- Гравитационное поле однородного шара.
- Финитные и инфинитные движения.
- Космические скорости.
- Законы Кеплера. Параметры траекторий.
- Примеры решения задач по космической динамике. Космические «парадоксы»

Уравнение моментов для частицы и системы частиц

- $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M} = [\mathbf{rF}]$ – скорость изменения момента импульса частицы равна моменту силы:
  $d\mathbf{L}/dt = [d\mathbf{r}/dt, \mathbf{p}] + [\mathbf{r}, d\mathbf{p}/dt] = [\mathbf{r}, d\mathbf{p}/dt] = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = \mathbf{M}$
- Для системы частиц:
  $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}_{внешн}$ – производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно произвольного неподвижного начала равна суммарному моменту всех внешних сил относительно того же начала.

Закон сохранения момента импульса относительно точки

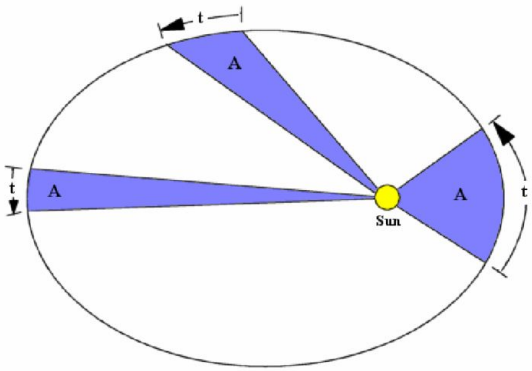
- $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M} = 0 \rightarrow \mathbf{L} = const$
- Если момент импульса внешних сил относительно **неподвижного начала** равен нулю, то момент импульса системы частиц (частицы) относительно того же начала остаётся постоянным

Движение частицы в центральном поле сил

- Центральная сила зависит только от расстояния r до силового центра и направлена вдоль **r** : **F =** F(r)**r/**r
- Центральная сила не создаёт момента, т.к. плечо центральной силы относительно центра поля равно нулю
- **В поле центральной силы для частицы L** = const
  1. Траектория частицы – плоская кривая, перпендикулярная **L** и проходящая через силовой центр 0
  2. Секториальная скорость частицы dS/dt = L/2m = const: за равные промежутки времени радиус-вектор заметает равные площади (закон площадей).

Связь импульса с секториальной скоростью

- d**S** = ½ [**r**d**r**] = ½ [**rv**]dt
  σ = d**S**/dt = ½ [**rv**] – секторильная скорость
- L =2mσ → σ = L/2m



- Если сила, действующая на точку центральная, то:

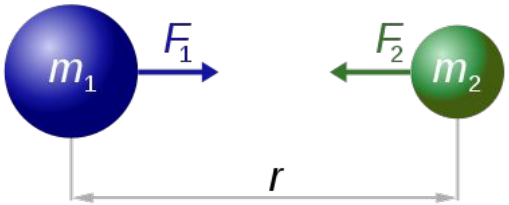
1. Траектория – плоская кривая, перпендикулярная **L** и проходит через силовой центр
2. За равные промежутки времени радиус – вектор заметает одинаковые площади
   σ = L/2m = const

Закон всемирного тяготения

- Материальные точки притягиваются с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$F = GMm/r^2$ $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ Н м^2/кг^2

$\mathbf{F} = - GMm/r^2\, \mathbf{r}/r$



$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

Напряжённость гравитационного поля

- Напряжённость поля тяготения
  $\mathbf{g}(r) = F/m = -GM/r^2\ \mathbf{r}/r$
  $g(r) = g_0R^2/r^2$
- Принцип суперпозиции:
  Напряжённость поля, создаваемое несколькими телами, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым телом в отдельности:
  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \ldots$

Теорема Гаусса

- Поток вектора **g** через любую замкнутую поверхность равен полной массе внутри поверхности, умноженной на -4πG:
  $\int \mathbf{g} d\mathbf{S} = -4\pi G \Sigma m_i = -4\pi G \int \rho dV$.
- т. Гаусса в дифференциальном форме:
  $\mathrm{div}\mathbf{g} = -4\pi G\rho$

Гравитационные поля в простейших случаях

- Плоскость ($\sigma = m/S$ – поверхностная плотность):
  $g = -2\pi G\sigma$

- Цилиндр ($\rho_l = m/l$ – линейная плотность):
  $g = -2G\rho_l/r$

- Однородный шар ($g_0 = GM/R^2$) :
  $g = -g_0 r/R$ – внутри шара ($r < R$)
  $g = -g_0 R^2/r^2$ – вне шара ($r \geq R$)

Энергия сил гравитационного взаимодействия $U = \int F dr = -GMm/r$

- $U = \int F dr = -GMm/r = -mg_0R^2/r$ $\quad (U(\infty) = 0)$

- Потенциальная энергия сил гравитационного взаимодействия двух частиц ($U(\infty) = 0$) :
  $U = -GMm/r$

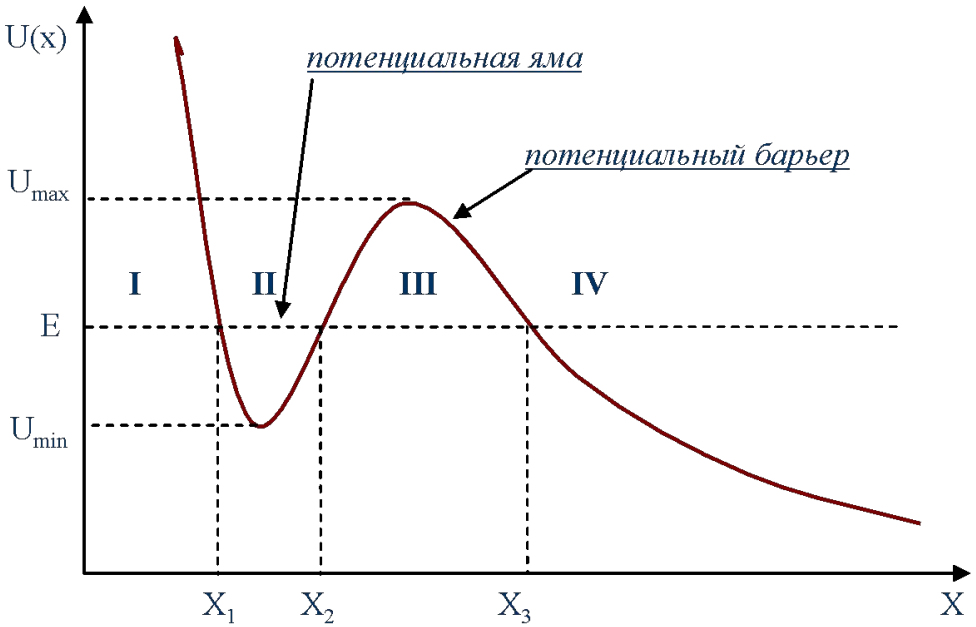
- Энергия единичной массы ($m = 1$) в поле однородного шара (гравитационный потенциал, $U(\infty) = 0$):
  $U = -3/2 g_0R + 1/2\, g_0r^2/R$ - внутри шара ($r < R$)
  $U = -g_0R^2/r$ – вне шара ($r \geq R$)

Границы движения

$E = K + U \geq U$

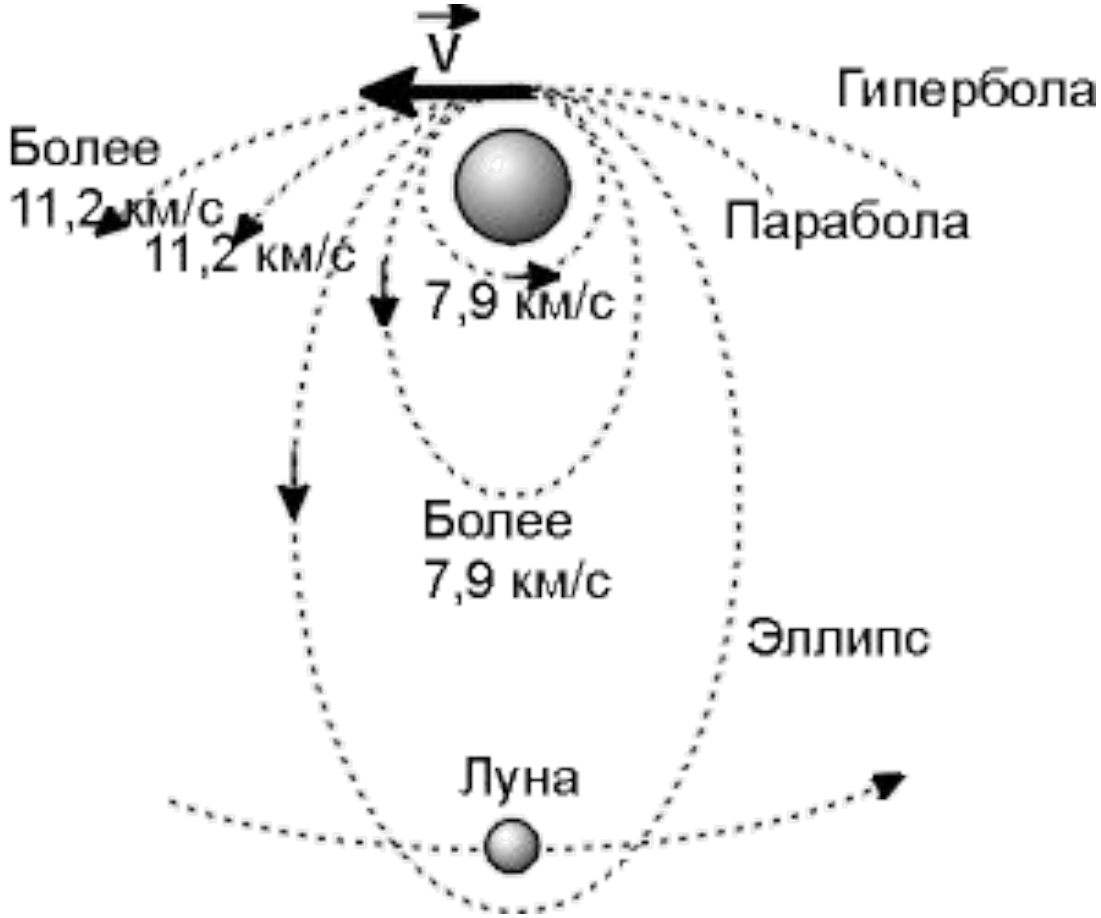
потенциальная энергия не может превышать полную ⇨

- частица не может находиться в областях I и III
- II – область финитного движения, частица заперта в «потенциальной яме»
- IV – область инфинитного движения
- Из области II в область III частице мешает попасть «потенциальный барьер»



Космические скорости

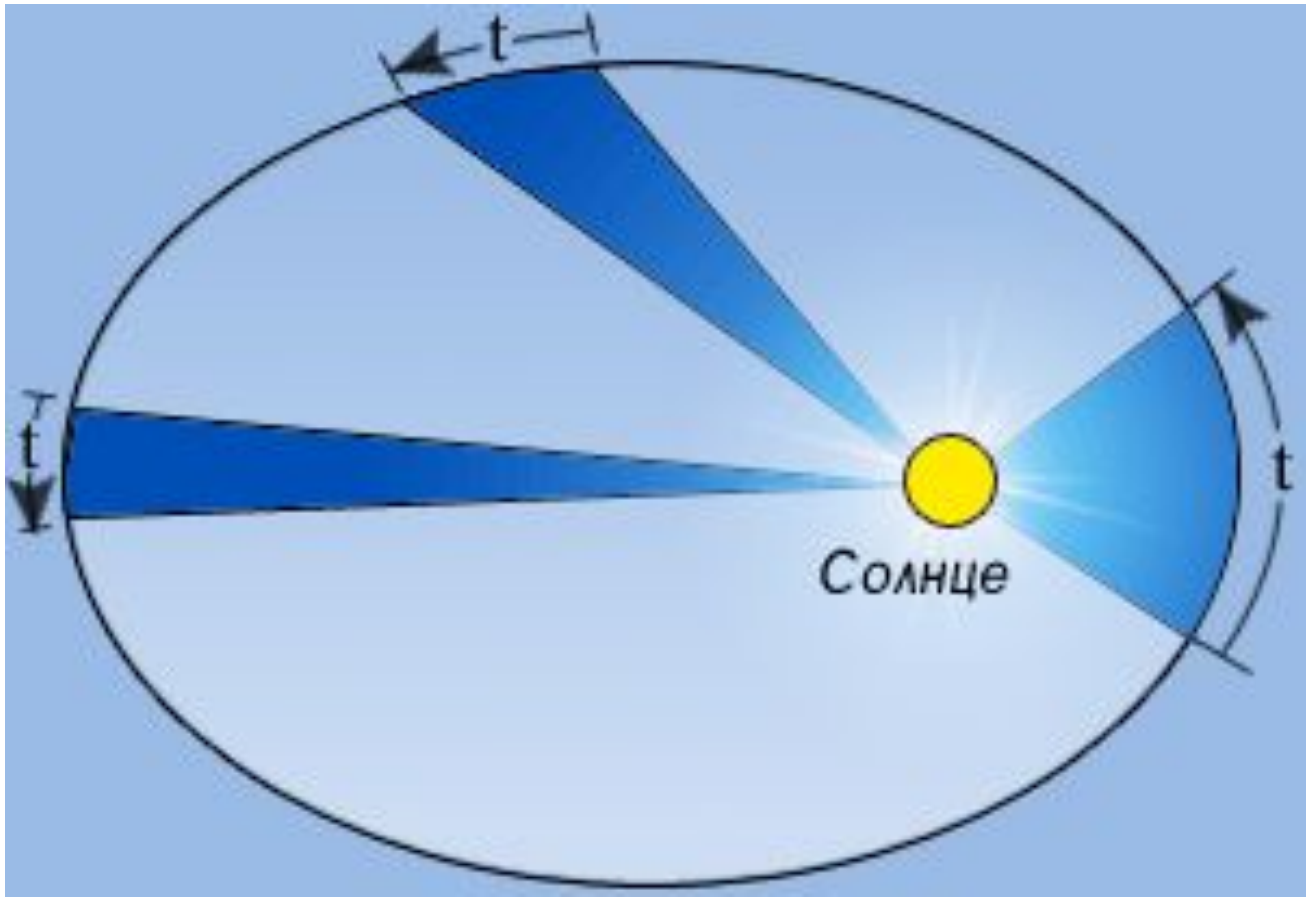
- Первая космическая – скорость кругового движения на околоземной орбите:
  $v_I = (g_0R)^{1/2} = 7{,}9$ км/с
- Вторая космическая скорость необходима для преодоления земного тяготения по балистической траектории (минимальная скорость):
  $v_{II} = (2)^{1/2}v_I = (2g_0R)^{1/2} = 11{,}2$ км/с
- Третья космическая скорость космического аппарата, необходимая для преодоления гравитации Солнца:
  $v_{III} = \{(2^{1/2} -1)^2v_з^{\ 2} + v_{II}^{\ 2}\}^{1/2} \approx 16{,}7$ км/с


V
Гипербола
Более
11,2 км/с
11,2 км/с
Парабола
7,9 км/с
Более
7,9 км/с
Эллипс
Луна

Законы Кеплера

I. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которых находится Солнце
II. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени заметает равные площади
III. Квадраты времён обращений планет относятся как кубы больших осей орбит, по которым движутся планеты:
$(T_2/T_1)^2 = (2a_2/2a_1)^3$

Третий закон Кеплера:
L = const → σ = L/2m = const



Параметры эллиптической орбиты

- Радиус круговой орбиты:
  $r = GM/2|\varepsilon|$
- Большая п/ось эллипса:
  $a = GM/2|\varepsilon|$
- Малая п/ось:
  $b = L/m\ (2|\varepsilon|)^{1/2}$
- Период обращения по эллипсу:
  $T^2 = (4\pi^2/GM)a^3$

Третий закон Кеплера

- $mv^2/2 - GmM/r = E = const \rightarrow$
  $r^2 + GMr/\varepsilon - L^2/2m^2\varepsilon = 0 \rightarrow$ т. Виета
  $r_1 + r_2 = 2a = -GM/\varepsilon$
  $r_1 r_2 = b^2 = -L^2/2m^2\varepsilon = -2\sigma^2/\varepsilon \rightarrow$
- $b^2/a = 4\sigma^2/GM \rightarrow \pi^2 a^2 b^2/a^3 = 4\pi^2\sigma^2/GM$
  площадь эллипса $S = \pi ab \rightarrow$
  $T = S/\sigma \rightarrow$
  $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM = const$

Спутник связи - стационарный спутник: T_c = 24 часа. r = ?

- Период спутника связи T_c = 1 сут = 24 часа.
- $T_l = 2\pi R/v_l$ = 84 мин. – время обращения около земного спутника.
- $V_{экв} = 2\pi R/T_c$ = 460 м/с – скорость точек экватора
- По Кеплеру: $(T_c/T_l)^2 = (r/R)^3$ ⇨

$$r = R(T/T_0)^{2/3} = R(v_l/v_{экв})^{2/3} \approx 6{,}6R$$

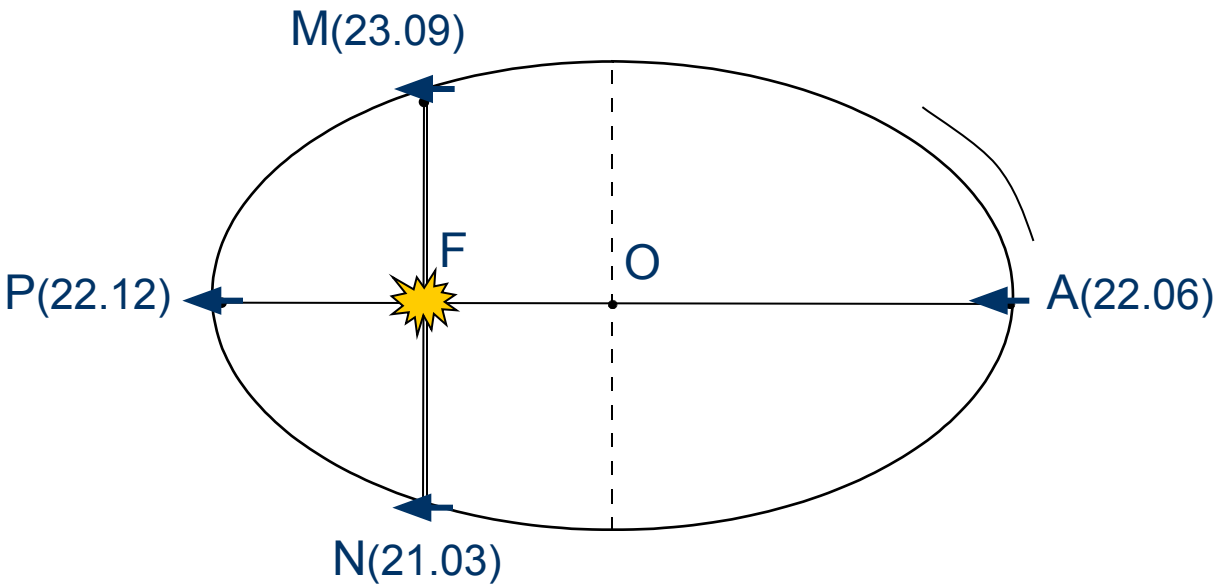
Орбита Земли – эллипс?

- В каких пределах изменяется расстояние от Земли до Солнца?
- Когда мы к Солнцу ближе, когда дальше?
- Как изменяется скорость движения Земли вокруг Солнца?

Что длиннее, - полярный день или полярная ночь?

- Дни летнего и зимнего солнцестояния (22 июня и 22 декабря) делят год пополам.
- Летний период между днями весеннего и осеннего равноденствия (с 21 марта по 23 сентября) продолжительнее зимнего на одну неделю.

Вот так вращается Земля вокруг Солнца (*вид «сверху»* :))



Решаем

- *Эллиптичность не велика* ⇨
  $T_S/T_0 \approx (\pi R^2/2 + 2FR)/\pi R^2 = ½ + 2F/\pi R$
  $T_W/T_0 \approx (\pi R^2/2 - 2FR)/\pi R^2 = ½ - 2F/\pi R$
  где $R \approx 150$ *млн. км — среднее расстояние от Земли до Солнца; F— фокусное расстояние эллипса.*
- *относительное изменение расстояния*
  $\Delta R/R = 2F/R = \pi(T_S - T_W)/2T_0 = 3\%$; ⇨
- *Относительное изменение скорости*
  $\Delta V/V = \Delta R/R = 3\%$
- *Абсолютное изменение расстояния –*
  $\Delta R = R_S - R_W = 4.5$ *млн.км.,*
- *Изменение скорости* $\Delta V = 0{,}9$ *км/с*

Заглянем в таблицу

- V_{max} (в перигелии) = 30,3 км/с
  V_{min} (в афелии) = 29,3 км/с
  ΔV = 1 км/с (у нас: ΔV = 0,9 км/с)
- R_S = 152,1 млн. км
  R_W = 147,1 млн. км
- e (эксцентриситет) = 0,0167 (у нас: e = 0,015)
- $\Delta R = R_S - R_W$ = 5 млн. км. (у нас: ΔR = 4,5 млн.км)
- $\Delta R/R$ = 3,3%; (у нас: $\Delta R/R$ = 3%)

От Земли по разным траекториям

- С полюса Земли запускают ракету со скоростью v_0: $v_I < v_0 < v_{II}$:
  1) вертикально вверх
  2) Горизонтально
- Какая из ракет улетит дальше от Земли?
- Решение:

1) Первая ракета:
ЗСЭ: $mv_0^2/2 – mg_0R = - mg_0R^2/r_1$ ⇨ max. Расстояние до центра Земли
$r_1 = 2a = R/(1 – v_0^2/2g_0R)$ –

2) Вторая ракета:
ЗСМИ: $mv_0R = mvr_2$;
ЗСЭ: $mv_0^2/2 – mg_0R = mv^2/2 - mg_0R^2/r_2$ ⇨ max. Расстояние до центра Земли: $r_2 = 2a - R = v_0^2/2g_0/(1 – v_0^2/2g_0R)$ ⇨
$r_2/r_1 = v_0^2/2g_0R = (v_0/v_{II})^2 < 1$

Пример 2.
Время падения Луны на Землю ☺

- Сколько времени будет падать на Землю Луна, если она вдруг остановится?
(время обращения Луны $T_0 = 28$ суток)
- Решение:
По третьему закону Кеплера «период обращения» T по выродившемуся в отрезок эллипсу:
$(T/T_0)^2 = (a/a_0)^3 = (R/2R)^3 \Rightarrow T = T_0 (a/a_0)^{3/2}$
$= T_0/(8)^{1/2} \Rightarrow \tau = T/2 = T_0/4(2)^{1/2} \approx 5$ суток.
- Земля упадёт на Солнце ☺: за $\tau = T/2 = T_0/4(2)^{1/2}$
≈ 2 месяца

Сила сопротивления разгоняет(?) спутник

- Полная энергия на круговой орбите $E = K + П = K + (-2K) = -K = -mv^2/2$
- Мощность силы сопротивления $N = -F_c v$ равна изменению полной энергии:
- $dE/dt = -F_c v \rightarrow mva = F_c v \rightarrow ma = F_c$

Скорость снижения спутника

- Спутник массой m = 200 кг, запущенный на круговую околоземную орбиту, тормозится в верхних слоях атмосферы. Сила трения $F_c = Cv^3$ ($C = 3\ 10^{-16}$ кг с/м^2). За какое время спутник снизится на $\Delta h = 100$ м и как при этом изменится его скорость?
  (скорость снижения $v_r = dr/dt = -2CGM/m = -2CgR^2/m = -2Cv_I^4/mg \approx -1{,}2$ мм/с; $t = \Delta h/v_r = 23$ часа ≈ 1 сутки; $\Delta v = F_c\Delta t/m = g\Delta h/2v_I \approx 6$ см/с).

Маневры на орбите:
чтобы догнать – надо притормозить!
чтобы отстать – надо ускориться!

- Корабль и орбитальная Станция на одной круговой орбите. До орбитальной станции расстояние L = 300м. Как приблизиться к Станции.
- Решение:
  надо перейти на орбиту с меньшим на
  $\Delta T = T_0 - T = L/v_0$ периодом:
  $T/T_0 = (a/a_0)^{3/2} = (E_o/E)^{3/2} = (E_o/(E_0 + \Delta K))^{3/2} \approx 1 + 3\Delta v/v_0$ ⇨
  $\Delta T = 3T_0\Delta v/v_0$ ⇨ $\Delta v = L/3T_0 = 2$ см/с

Полёт на Марс (№ 7.6)

- Рассчитайте время перелёта с орбиты Земли на орбиту Марса ($r_м = 1{,}52\ r_з$):
- Решение:

(Кеплер III):

$(T/T_0)^2 = (2a_2/2a_1)^3 = \{(r_з + r_м)/2r_з\}^3 \Rightarrow$

$\tau = \frac{1}{2}T_0(1{,}26)^{3/2} = 260$ сут $\approx$ 8 мес. 3 недели

Метеорит. Прицельное расстояние

- Скорость метеорита на большом расстоянии от Земли V_0.
- Найти наибольшее «прицельное» расстояние b = ?
- Решение:

1. ЗСМИ для касательной траектории:
   $mv_0b = mvR$
2. ЗСЭ:
   $mv_0^2/2 = mv^2/2 - mgR$ ⇨
   $\mathbf{b = R(1 + v_{II}^2/v_0^2)^{1/2}}$.
   Если r < b – метеорит упадёт на Землю.
   Если r > b – промажет.
   - Предельные случаи:
   1. $v_0 = 0$; $b = \infty$ - метеорит упадёт при любых обстоятельствах.
   2. $V_0 = \infty$; b = R – Земля не сильно искривит траекторию.

Вертикальный бросок с первой космической

- На какую высоту поднимется и когда вернётся?