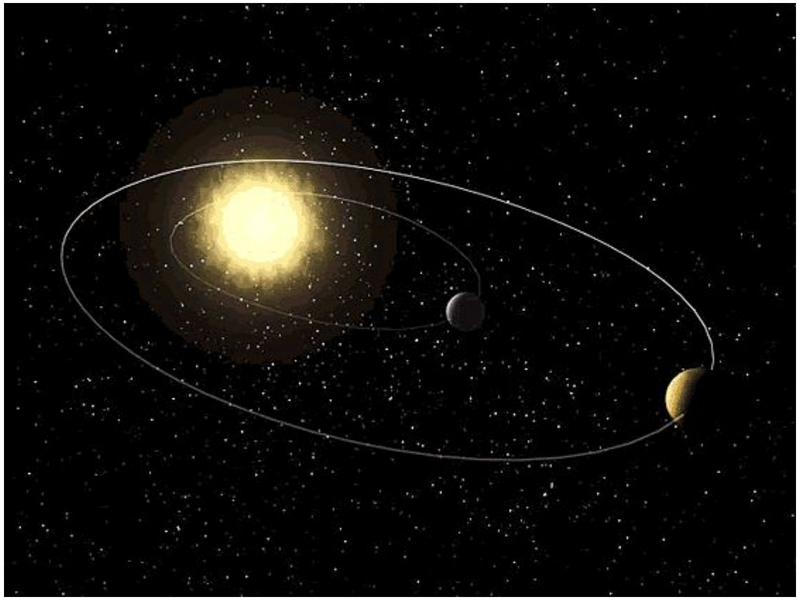
Лекция № 8
Всемирное тяготение



Алексей Викторович Гуденко

29/03/2018

План лекции

- Закон всемирного тяготения.
- Теорема Гаусса.
- Гравитационное поле однородного шара.
- Финитные и инфинитные движения.
- Космические скорости.
- Законы Кеплера. Параметры траекторий.
- Примеры решения задач по космической динамике. Космические «парадоксы»

Уравнение моментов для частицы и системы частиц

- $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]$ – скорость изменения момента импульса частицы равна моменту силы:
  $d\mathbf{L}/dt = [d\mathbf{r}/dt, \mathbf{p}] + [\mathbf{r}, d\mathbf{p}/dt] = [\mathbf{r}, d\mathbf{p}/dt] = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = \mathbf{M}$
- Для системы частиц:
  $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}_{внешн}$ – производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно произвольного неподвижного начала равна суммарному моменту всех внешних сил относительно того же начала.

Закон сохранения момента импульса относительно точки

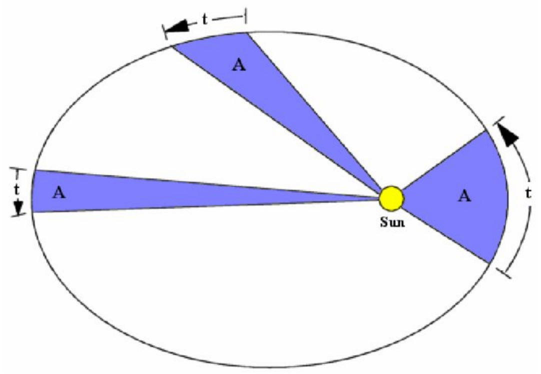
- $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M} = 0 \rightarrow \mathbf{L} = \text{const}$
- Если момент импульса внешних сил относительно **неподвижного начала** равен нулю, то момент импульса системы частиц (частицы) относительно того же начала остаётся постоянным

Движение частицы в центральном поле сил

- Центральная сила зависит только от расстояния r до силового центра и направлена вдоль **r** : **F =** F(r)**r**/r
- Центральная сила не создаёт момента, т.к. плечо центральной силы относительно центра поля равно нулю
- **В поле центральной силы для частицы L** = const
    1. Траектория частицы – плоская кривая, перпендикулярная **L** и проходящая через силовой центр 0
    2. Секториальная скорость частицы dS/dt = L/2m = const: за равные промежутки времени радиус-вектор заметает равные площади (закон площадей).

Связь импульса с секториальной скоростью

- $d\mathbf{S} = ½ [\mathbf{r}d\mathbf{r}] = ½ [\mathbf{rv}]dt$
  $\boldsymbol{\sigma} = d\mathbf{S}/dt = ½ [\mathbf{rv}]$ – секторильная скорость
- $L = 2m\sigma \ \rightarrow \sigma = L/2m$



- Если сила, действующая на точку центральная, то:

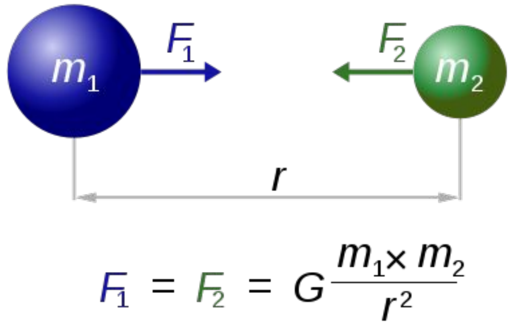
1. Траектория – плоская кривая, перпендикулярная **L** и проходит через силовой центр
2. За равные промежутки времени радиус – вектор заметает одинаковые площади
   $\sigma = L/2m = const$

Закон всемирного тяготения

- Материальные точки притягиваются с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$F = GMm/r^2$ $\quad$ $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ Н м^2/кг^2

$\mathbf{F} = - GMm/r^2\,\mathbf{r}/r$



Напряжённость гравитационного поля

- Напряжённость поля тяготения
  $\mathbf{g}(r) = F/m = -GM/r^2\ \mathbf{r}/r$
  $g(r) = g_0R^2/r^2$
- Принцип суперпозиции:
  Напряжённость поля, создаваемое несколькими телами, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым телом в отдельности:
  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \ldots$

Теорема Гаусса

- Поток вектора **g** через любую замкнутую поверхность равен полной массе внутри поверхности, умноженной на -4πG:
  $\int \mathbf{g} d\mathbf{S} = -4\pi G \Sigma m_i = -4\pi G \int \rho dV$.
- т. Гаусса в дифференциальном форме:
  $\mathrm{div}\mathbf{g} = -4\pi G\rho$

Гравитационные поля в простейших случаях

- Плоскость ($\sigma = m/S$ – поверхностная плотность):
  $g = -2\pi G\sigma$
- Цилиндр ($\rho_l = m/l$ – линейная плотность):
  $g = -2G\rho_l/r$
- Однородный шар ($g_0 = GM/R^2$) :
  $g = -\ g_0 r/R$ – внутри шара ($r < R$)
  $g = -\ g_0 R^2/r^2$ – вне шара ($r \geq R$)

Энергия сил гравитационного взаимодействия $U = \int F dr = -GMm/r$

- $U = \int F dr = -GMm/r = -\,mg_0R^2/r$ $\qquad$ $(U(\infty) = 0)$

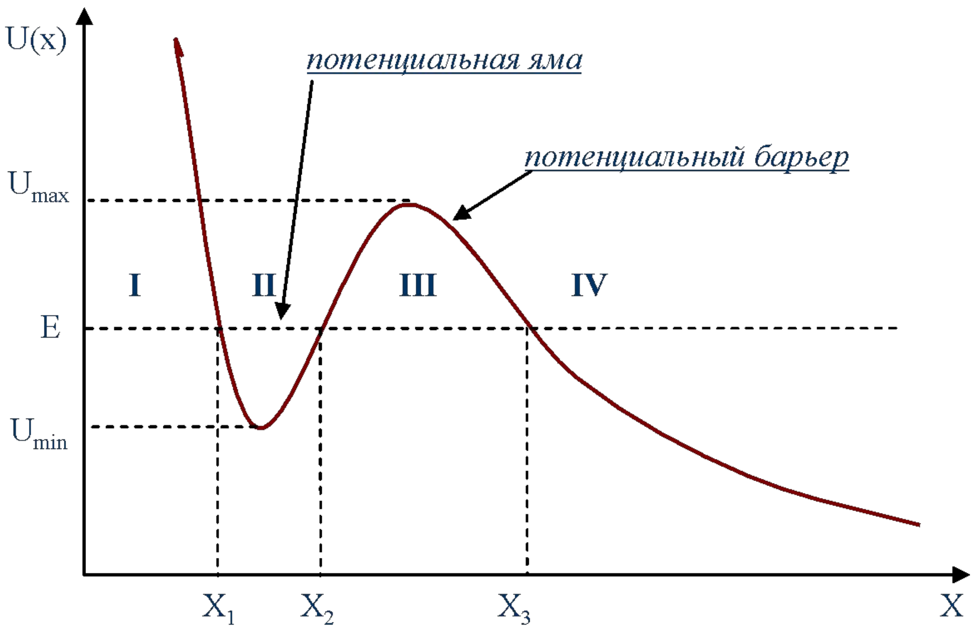
- Потенциальная энергия сил гравитационного взаимодействия двух частиц $(U(\infty) = 0)$:
  $U = -\,GMm/r$

- Энергия единичной массы ($m = 1$) в поле однородного шара (гравитационный потенциал, $U(\infty) = 0$):
  $U = -\,3/2g_0R + 1/2\,g_0r^2/R$ - внутри шара ($r < R$)
  $U = -\,g_0R^2/r$ – вне шара ($r \geq R$)

Границы движения

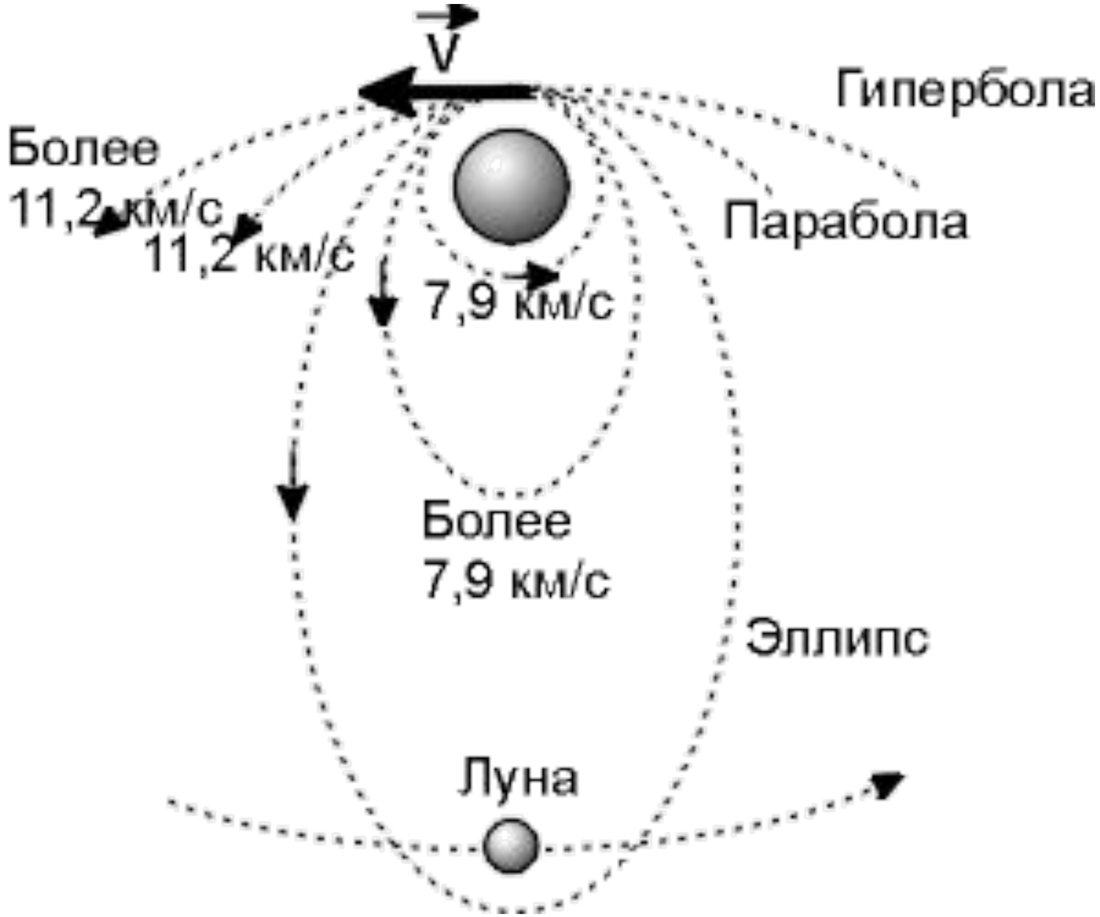
E = K + U ≥ U
потенциальная энергия
не может превышать полную
⇨

- частица не может находиться в областях I и III
- II – область финитного движения, частица заперта в «потенциальной яме»
- IV – область инфинитного движения
- Из области II в область III частице мешает попасть «потенциальный барьер»



Космические скорости

- Первая космическая – скорость кругового движения на околоземной орбите:
  $v_I = (g_0R)^{1/2} = 7{,}9$ км/с
- Вторая космическая скорость необходима для преодоления земного тяготения по балистической траектории (минимальная скорость):
  $v_{II} = (2)^{1/2}v_I = (2g_0R)^{1/2} = 11{,}2$ км/с
- Третья космическая скорость космического аппарата, необходимая для преодоления гравитации Солнца:
  $v_{III} = \{(2^{1/2} -1)^2 v_з{}^2 + v_{II}{}^2\}^{1/2} \approx 16{,}7$ км/с

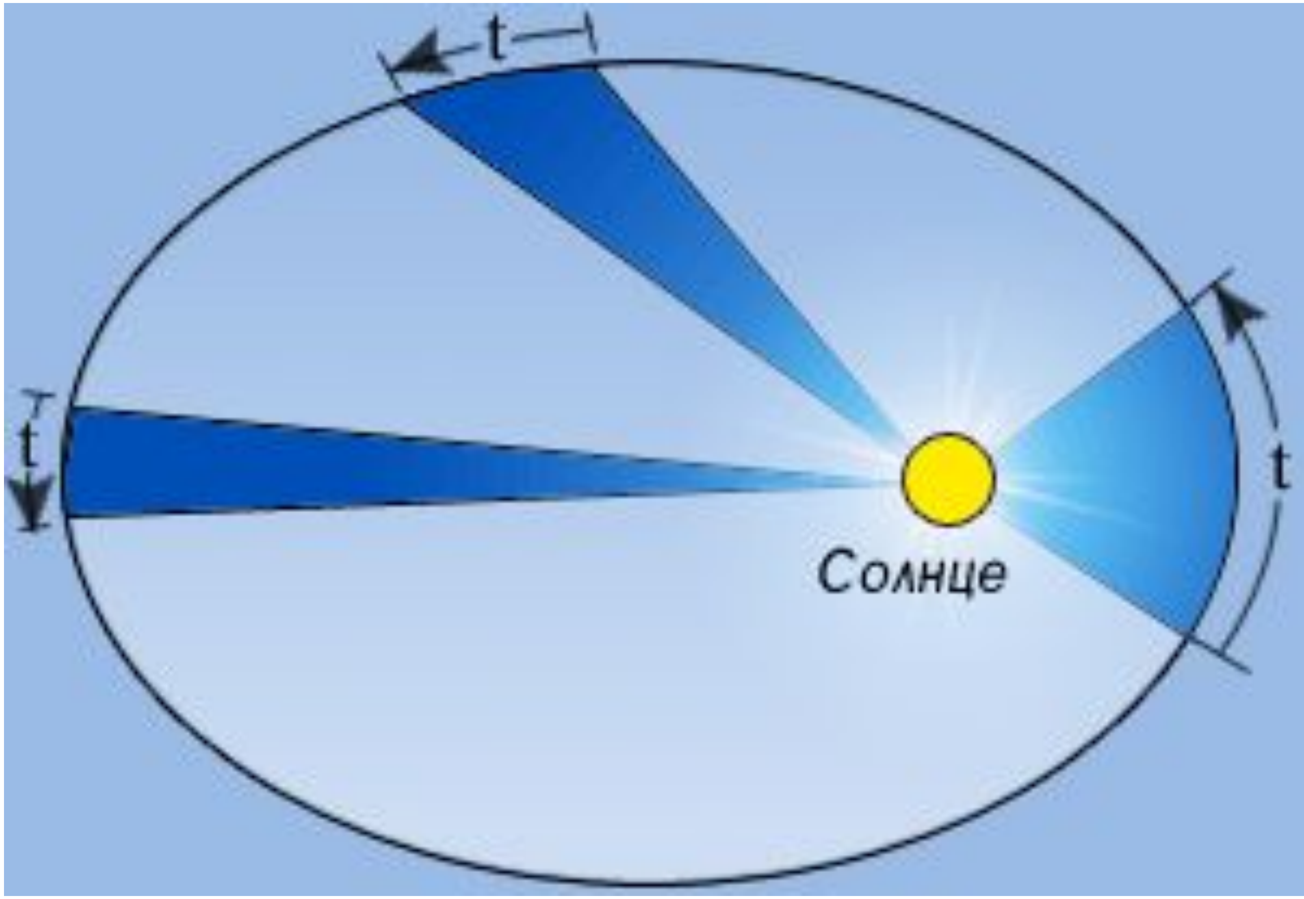


V
Гипербола
Более
11,2 км/с
11,2 км/с
Парабола
7,9 км/с
Более
7,9 км/с
Эллипс
Луна

Законы Кеплера

I. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которых находится Солнце
II. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени заметает равные площади
III. Квадраты времён обращений планет относятся как кубы больших осей орбит, по которым движутся планеты:
$(T_2/T_1)^2 = (2a_2/2a_1)^3$

Третий закон Кеплера:
$L = const \rightarrow \sigma = L/2m = const$



Параметры эллиптической орбиты

- Радиус круговой орбиты:
  $r = GM/2|\varepsilon|$
- Большая п/ось эллипса:
  $a = GM/2|\varepsilon|$
- Малая п/ось:
  $b = L/m\ (2|\varepsilon|)^{1/2}$
- Период обращения по эллипсу:
  $T^2 = (4\pi^2/GM)a^3$

Третий закон Кеплера

- $mv^2/2 – GmM/r = E = const \rightarrow$
  $r^2 + GMr/\varepsilon – L^2/2m^2\, \varepsilon = 0 \rightarrow$ т. Виета
  $r_1 + r_2 = 2a = - GM/\varepsilon$
  $r_1 r_2 = b^2 = - L^2/2m^2\varepsilon = - 2\sigma^2/\varepsilon \rightarrow$
- $b^2/a = 4\sigma^2/GM \rightarrow \pi^2 a^2 b^2/a^3 = 4\pi^2\sigma^2/GM$
  площадь эллипса $S = \pi ab \rightarrow$
  $T = S/\sigma \rightarrow$
  $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM = const$

Спутник связи - стационарный спутник: T_c = 24 часа. r = ?

- Период спутника связи T_c = 1 сут = 24 часа.
- $T_I = 2\pi R/v_I$ = 84 мин. – время обращения около земного спутника.
- $V_{экв} = 2\pi R/T_c$ = 460 м/с – скорость точек экватора
- По Кеплеру: $(T_c / T_I)^2 = (r/R)^3$ ⇨

$r = R(T/T_0)^{2/3} = R(v_I/v_{экв})^{2/3} \approx 6{,}6R$

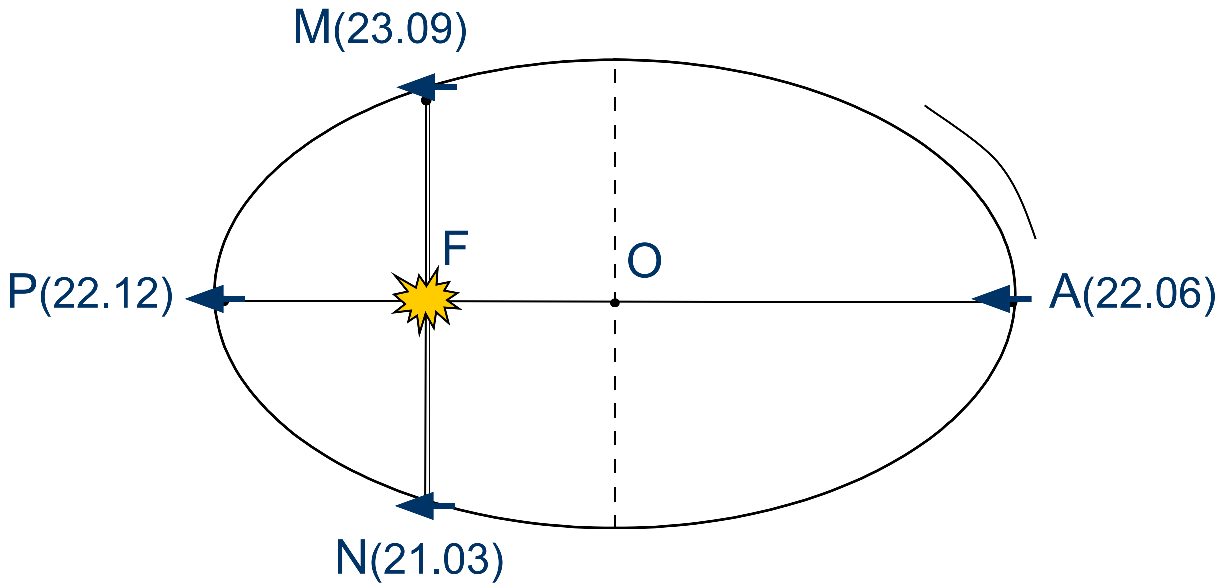
Орбита Земли – эллипс?

- В каких пределах изменяется расстояние от Земли до Солнца?
- Когда мы к Солнцу ближе, когда дальше?
- Как изменяется скорость движения Земли вокруг Солнца?

Что длиннее, - полярный день или полярная ночь?

- Дни летнего и зимнего солнцестояния (22 июня и 22 декабря) делят год пополам.
- Летний период между днями весеннего и осеннего равноденствия (с 21 марта по 23 сентября) продолжительнее зимнего на одну неделю.

Вот так вращается Земля вокруг Солнца (*вид «сверху»* :))



Решаем

- *Эллиптичность не велика* ⇨ $T_S/T_0 \approx (\pi R^2/2 + 2FR)/\pi R^2 = ½ + 2F/\pi R$ $T_W/T_0 \approx (\pi R^2/2 - 2FR)/\pi R^2 = ½ - 2F/\pi R$ *где* $R^0 \approx 150$ *млн. км — среднее расстояние от Земли до Солнца;* F*— фокусное расстояние эллипса.*
- *относительное изменение расстояния* $\Delta R/R = 2F/R = \pi(T_S - T_W)/2T_0 = 3\%$; ⇨
- *Относительное изменение скорости* $\Delta V/V = \Delta R/R = 3\%$
- *Абсолютное изменение расстояния –* $\Delta R = R_S - R_W = 4.5$ *млн.км.,*
- *Изменение скорости* $\Delta V = 0{,}9$ *км/с*

Заглянем в таблицу

- V_{max} (в перигелии) = 30,3 км/с
  V_{min} (в афелии) = 29,3 км/с
  ΔV = 1 км/с   (у нас: ΔV = 0,9 км/с)
- R_S = 152,1 млн. км
  R_W = 147,1 млн. км
- e (эксцентриситет) = 0,0167 (у нас: e = 0,015)
- $\Delta R = R_S - R_W$ = 5 млн. км. (у нас: ΔR = 4,5 млн.км)
- $\Delta R/R$ = 3,3%; (у нас: $\Delta R/R$ = 3%)

От Земли по разным траекториям

- С полюса Земли запускают ракету со скоростью v_0: $v_I < v_0 < v_{II}$:
  1) вертикально вверх
  2) Горизонтально
- Какая из ракет улетит дальше от Земли?
- Решение:

1) Первая ракета:
ЗСЭ: $mv_0^2/2 - mg_0R = - mg_0R^2/r_1$ ⇨ max. Расстояние до центра Земли
$r_1 = 2a = R/(1 - v_0^2/2g_0R)$ –
2) Вторая ракета:
ЗСМИ: $mv_0R = mvr_2$;
ЗСЭ: $mv_0^2/2 - mg_0R = mv^2/2 - mg_0R^2/r_2$ ⇨ max. Расстояние до центра Земли: $r_2 = 2a - R = v_0^2/2g_0/(1 - v_0^2/2g_0R)$ ⇨
$r_2/r_1 = v_0^2/2g_0R = (v_0/v_{II})^2 < 1$

Пример 2.
Время падения Луны на Землю ☺

- Сколько времени будет падать на Землю Луна, если она вдруг остановится? (время обращения Луны T_0 = 28 суток)
- Решение:
  По третьему закону Кеплера «период обращения» T по выродившемуся в отрезок эллипсу:
  $(T/T_0)^2 = (a/a_0)^3 = (R/2R)^3 \Rightarrow T = T_0 (a/a_0)^{3/2} = T_0/(8)^{1/2} \Rightarrow \tau = T/2 = T_0/4(2)^{1/2} \approx 5$ суток.
- Земля упадёт на Солнце ☺: за $\tau = T/2 = T_0/4(2)^{1/2} \approx 2$ месяца

Сила сопротивления разгоняет(?) спутник

- Полная энергия на круговой орбите Е = К + П = К + (-2К) = - К = - $mv^2/2$
- Мощность силы сопротивления $N = -F_c v$ равна изменению полной энергии:
- $dE/dt = -F_c v \rightarrow mva = F_c v \rightarrow$ $ma = F_c$

Скорость снижения спутника

- Спутник массой m = 200 кг, запущенный на круговую околоземную орбиту, тормозится в верхних слоях атмосферы. Сила трения $F_c = Cv^3$ ($C = 3\ 10^{-16}$ кг с/м^2). За какое время спутник снизится на Δh = 100 м и как при этом изменится его скорость?
(скорость снижения $v_r = dr/dt = -\ 2CGM/m = -2CgR^2/m = -2Cv_I^4/mg \approx -\ 1{,}2$ мм/с; $t = \Delta h/v_r = 23$ часа ≈ 1 сутки; $\Delta v = F_c\Delta t/m = g\Delta h/2v_I \approx 6$ см/с).

Маневры на орбите: чтобы догнать – надо притормозить! чтобы отстать – надо ускориться!

- Корабль и орбитальная Станция на одной круговой орбите. До орбитальной станции расстояние L = 300м. Как приблизиться к Станции.
- Решение:
  надо перейти на орбиту с меньшим на
  $\Delta T = T_0 - T = L/v_0$ периодом:
  $T/T_0 = (a/a_0)^{3/2} = (E_o/E)^{3/2} = (E_o/(E_0 + \Delta K))^{3/2} \approx 1 + 3\Delta v/v_0 \Rightarrow$
  $\Delta T = 3T_0\Delta v/v_0 \Rightarrow \Delta v = L/3T_0 = 2$ см/с

Полёт на Марс (№ 7.6)

- Рассчитайте время перелёта с орбиты Земли на орбиту Марса ($r_м = 1,52\ r_з$):
- Решение:
  (Кеплер III):
  $(T/T_0)^2 = (2a_2/2a_1)^3 = \{(r_з + r_м)/2r_з\}^3 \Rightarrow$
  $\tau = \frac{1}{2}T_0(1,26)^{3/2} = 260$ сут ≈ 8 мес. 3 недели

Метеорит. Прицельное расстояние

- Скорость метеорита на большом расстоянии от Земли V_0.
- Найти наибольшее «прицельное» расстояние b = ?
- Решение:

1. ЗСМИ для касательной траектории:
   $mv_0 b = mvR$
2. ЗСЭ:
   $mv_0^2/2 = mv^2/2 – mgR$ ⇨
   $\mathbf{b = R(1 + v_{II}^2/v_0^2)^{1/2}}$.
   Если r < b – метеорит упадёт на Землю.
   Если r > b – промажет.
   - Предельные случаи:
   1. $v_0 = 0$; $b = \infty$ - метеорит упадёт при любых обстоятельствах.
   2. $V_0 = \infty$; $b = R$ – Земля не сильно искривит траекторию.

Вертикальный бросок с первой космической

- На какую высоту поднимется и когда вернётся?