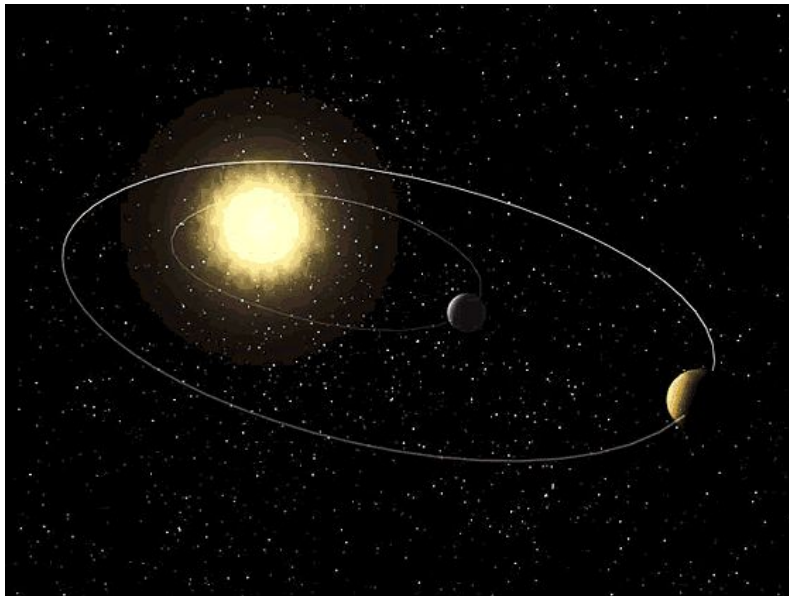


# Лекция № 8

## Всемирное тяготение



Алексей Викторович  
Гуденко

29/03/2018

# План лекции

- Закон всемирного тяготения.
- Теорема Гаусса.
- Гравитационное поле однородного шара.
- Финитные и инфинитные движения.
- Космические скорости.
- Законы Кеплера. Параметры траекторий.
- Примеры решения задач по космической динамике. Космические «парадоксы»

# Уравнение моментов для частицы и системы частиц

- $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]$  – скорость изменения момента импульса частицы равна моменту силы:  
$$d\mathbf{L}/dt = [d\mathbf{r}/dt, \mathbf{p}] + [\mathbf{r}, d\mathbf{p}/dt] = [\mathbf{r}, d\mathbf{p}/dt] = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = \mathbf{M}$$
- Для системы частиц:  
 $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}_{\text{внешн}}$  – производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно произвольного неподвижного начала равна суммарному моменту всех внешних сил относительно того же начала.

# Закон сохранения момента импульса относительно точки

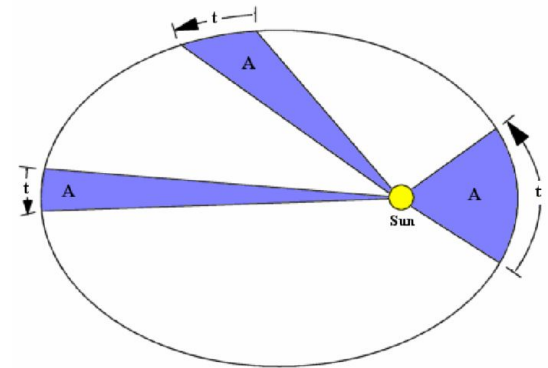
- $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M} = 0 \rightarrow \mathbf{L} = \text{const}$
- Если момент импульса внешних сил относительно **неподвижного начала** равен нулю, то момент импульса системы частиц (частицы) относительно того же начала остаётся постоянным

## Движение частицы в центральном поле сил

- Центральная сила зависит только от расстояния  $r$  до силового центра и направлена вдоль  $r$  :  $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{r}/r$
- Центральная сила не создаёт момента, т.к. плечо центральной силы относительно центра поля равно нулю
- **В поле центральной силы для частицы  $L = \text{const}$** 
  1. Траектория частицы – плоская кривая, перпендикулярная  $L$  и проходящая через силовой центр  $O$
  2. Секториальная скорость частицы  $dS/dt = L/2m = \text{const}$ : за равные промежутки времени радиус-вектор заметает равные площади (закон площадей).

# Связь импульса с секториальной скоростью

- $d\mathbf{S} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}d\mathbf{r}] = \frac{1}{2} [\mathbf{r}\mathbf{v}]dt$   
 $\sigma = d\mathbf{S}/dt = \frac{1}{2} [\mathbf{r}\mathbf{v}]$  – секториальная скорость
- $L = 2m\sigma \rightarrow \sigma = L/2m$
  
- Если сила, действующая на точку центральная, то:
  1. Траектория – плоская кривая, перпендикулярная  $\mathbf{L}$  и проходит через силовой центр
  2. За равные промежутки времени радиус – вектор заметает одинаковые площади  
 $\sigma = L/2m = \text{const}$



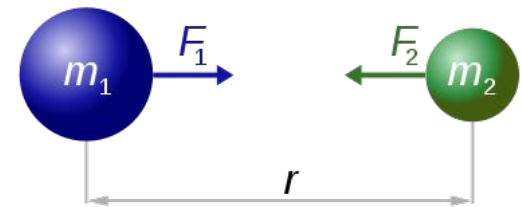
# Закон всемирного тяготения

- Материальные точки притягиваются с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = GMm/r^2$$

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Н м}^2/\text{кг}^2$$

$$\mathbf{F} = - GMm/r^2 \mathbf{r}/r$$



$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

# Напряжённость гравитационного поля

- Напряжённость поля тяготения

$$\mathbf{g}(r) = F/m = -GM/r^2 \mathbf{r}/r$$

$$g(r) = g_0 R^2/r^2$$

- Принцип суперпозиции:

Напряжённость поля, создаваемое несколькими телами, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым телом в отдельности:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \dots$$



# Теорема Гаусса

- Поток вектора  $\mathbf{g}$  через любую замкнутую поверхность равен полной массе внутри поверхности, умноженной на  $-4\pi G$ :  
$$\int \mathbf{g} d\mathbf{S} = -4\pi G \Sigma m_i = -4\pi G \int \rho dV.$$
- т. Гаусса в дифференциальной форме:  
$$\operatorname{div} \mathbf{g} = -4\pi G \rho$$

# Гравитационные поля в простейших случаях

- Плоскость ( $\sigma = m/S$  – поверхностная плотность):  
 $g = -2\pi G\sigma$
- Цилиндр ( $\rho_l = m/l$  – линейная плотность):  
 $g = -2G\rho_l/r$
- Однородный шар ( $g_0 = GM/R^2$ ):  
 $g = -g_0 r/R$  – внутри шара ( $r < R$ )  
 $g = -g_0 R^2/r^2$  – вне шара ( $r \geq R$ )

## Энергия сил гравитационного взаимодействия $U = \int F dr = -GMm/r$

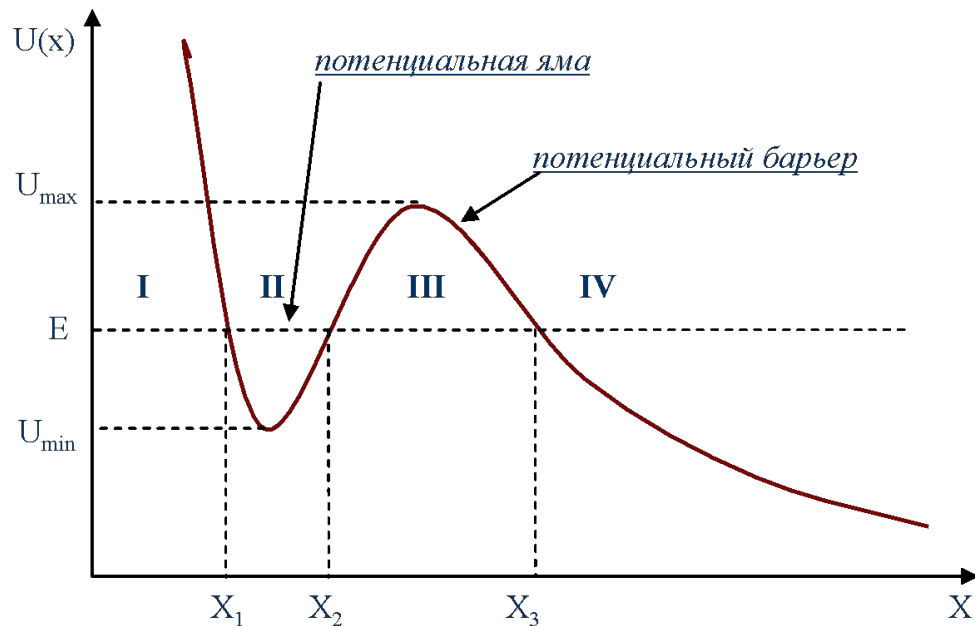
- $U = \int F dr = -GMm/r = -mg_0 R^2/r$  ( $U(\infty) = 0$ )
- Потенциальная энергия сил гравитационного взаимодействия двух частиц ( $U(\infty) = 0$ ):  
 $U = -GMm/r$
- Энергия единичной массы ( $m = 1$ ) в поле однородного шара (гравитационный потенциал,  $U(\infty) = 0$ ):  
 $U = -3/2g_0 R + 1/2 g_0 r^2/R$  - внутри шара ( $r < R$ )  
 $U = -g_0 R^2/r$  - вне шара ( $r \geq R$ )

# Границы движения

$$E = K + U \geq U$$

потенциальная энергия  
не может превышать полную  
⇔

- частица не может находиться в областях I и III
- II – область финитного движения, частица заперта в «потенциальной яме»
- IV – область инфинитного движения
- Из области II в область III частице мешает попасть «потенциальный барьер»



# Космические скорости

- Первая космическая – скорость кругового движения на околоземной орбите:

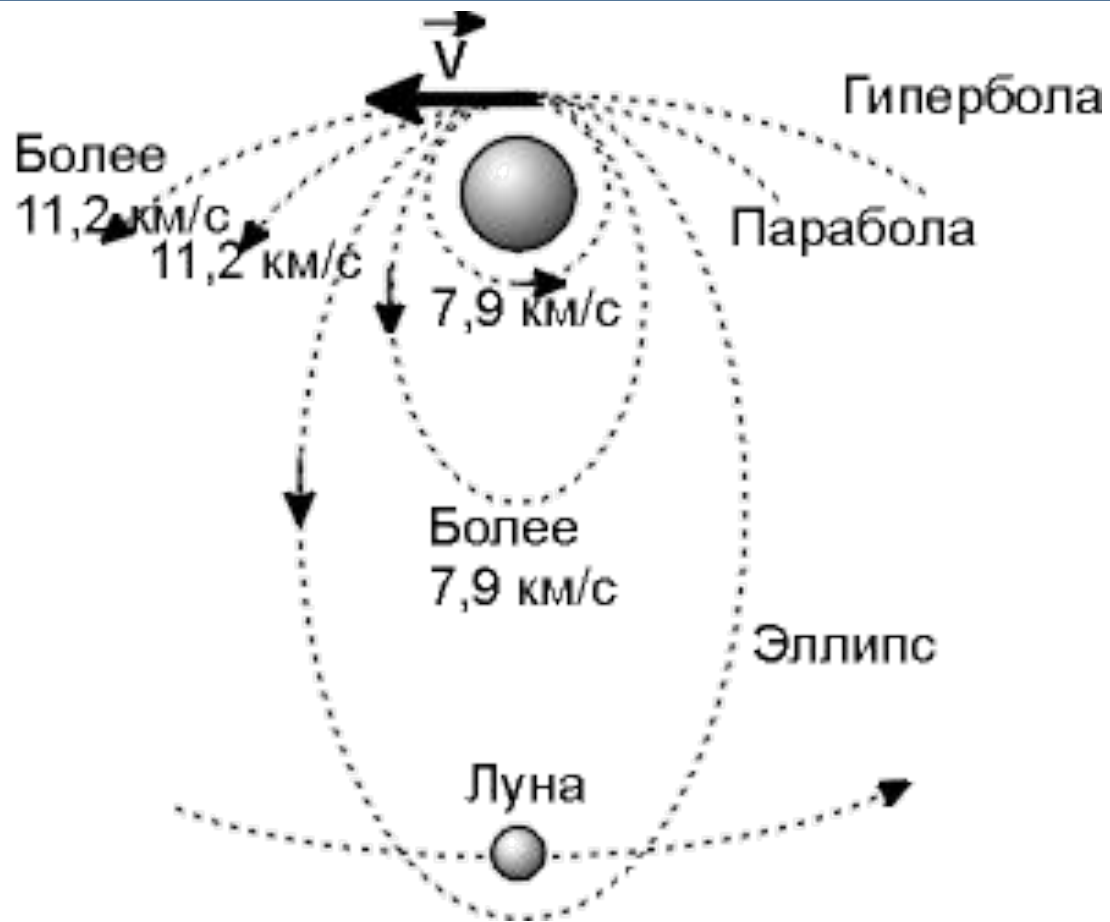
$$v_I = (g_0 R)^{1/2} = 7,9 \text{ км/с}$$

- Вторая космическая скорость необходима для преодоления земного тяготения по баллистической траектории (минимальная скорость):

$$v_{II} = (2)^{1/2} v_I = (2g_0 R)^{1/2} = 11,2 \text{ км/с}$$

- Третья космическая скорость космического аппарата, необходимая для преодоления гравитации Солнца:

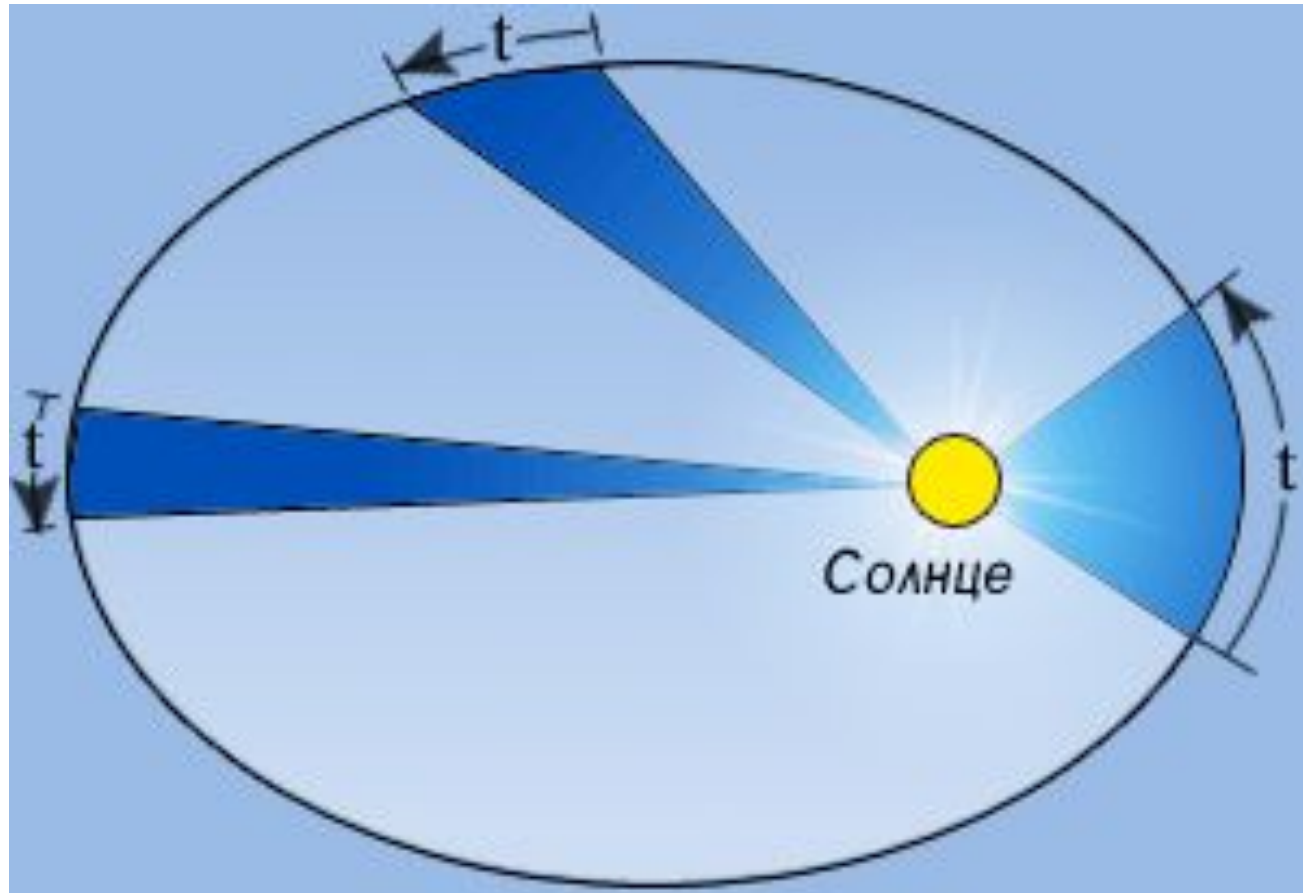
$$v_{III} = \{(2^{1/2} - 1)^2 v_3^2 + v_{II}^2\}^{1/2} \approx 16,7 \text{ км/с}$$



# Законы Кеплера

- I. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которых находится Солнце
- II. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени заметает равные площади
- III. Квадраты времён обращений планет относятся как кубы больших осей орбит, по которым движутся планеты:  
$$(T_2/T_1)^2 = (2a_2/2a_1)^3$$

Третий закон Кеплера:  
 $L = \text{const} \rightarrow \sigma = L/2m = \text{const}$





# Параметры эллиптической орбиты

- Радиус круговой орбиты:  
 $r = GM/2|\epsilon|$
- Большая п/ось эллипса:  
 $a = GM/2|\epsilon|$
- Малая п/ось:  
 $b = L/m (2|\epsilon|)^{1/2}$
- Период обращения по эллипсу:  
 $T^2 = (4\pi^2/GM)a^3$

# Третий закон Кеплера

- $mv^2/2 - GmM/r = E = \text{const} \rightarrow$   
 $r^2 + GMr/\varepsilon - L^2/2m^2\varepsilon = 0 \rightarrow$  т. Виета  
 $r_1 + r_2 = 2a = -GM/\varepsilon$   
 $r_1 r_2 = b^2 = -L^2/2m^2\varepsilon = -2\sigma^2/\varepsilon \rightarrow$
- $b^2/a = 4\sigma^2/GM \rightarrow \pi^2 a^2 b^2 / a^3 = 4\pi^2 \sigma^2 / GM$   
площадь эллипса  $S = \pi ab \rightarrow$   
 $T = S/\sigma \rightarrow$   
 $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM = \text{const}$

## Спутник связи - стационарный спутник: $T_c = 24$ часа. $r = ?$

- Период спутника связи  $T_c = 1$  сут = 24 часа.
- $T_1 = 2\pi R/v_1 = 84$  мин. – время обращения около земного спутника.
- $V_{\text{ЭКВ}} = 2\pi R/T_c = 460$  м/с – скорость точек экватора
- По Кеплеру:  $(T_c/T_1)^2 = (r/R)^3 \Rightarrow$

$$r = R(T/T_0)^{2/3} = R(v_1/v_{\text{ЭКВ}})^{2/3} \approx 6,6R$$

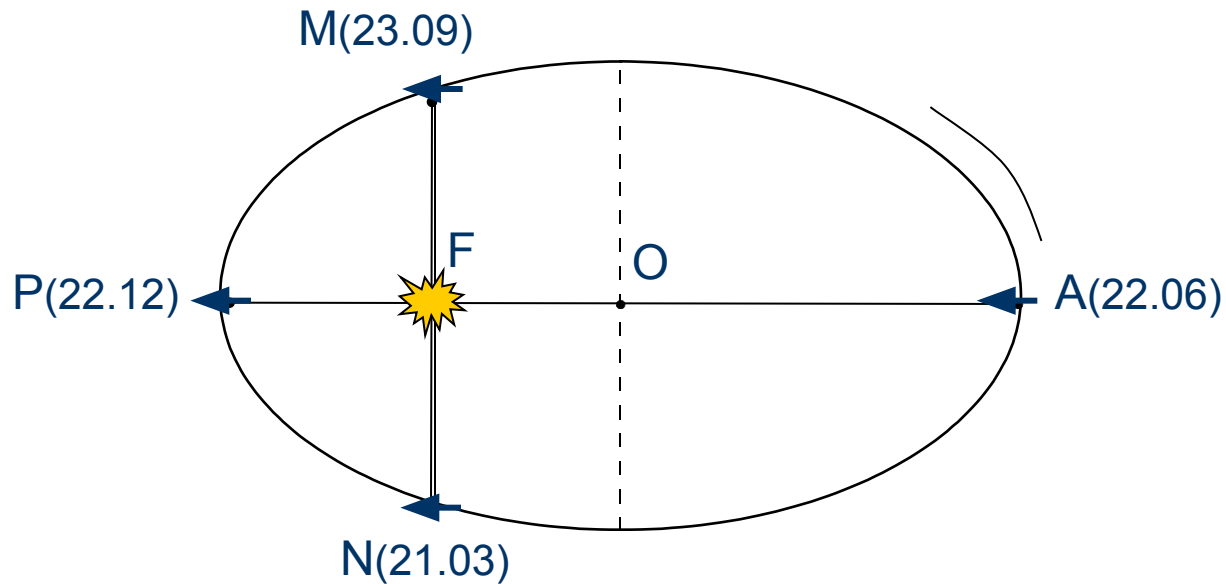
# Орбита Земли – эллипс?

- В каких пределах изменяется расстояние от Земли до Солнца?
- Когда мы к Солнцу ближе, когда дальше?
- Как изменяется скорость движения Земли вокруг Солнца?

## Что длиннее, - полярный день или полярная ночь?

- Дни летнего и зимнего солнцестояния (22 июня и 22 декабря) делят год пополам.
- Летний период между днями весеннего и осеннего равноденствия (с 21 марта по 23 сентября) продолжительнее зимнего на одну неделю.

# Вот так вращается Земля вокруг Солнца (вид «сверху» :))



## Решаем

- Эллиптичность не велика  $\Rightarrow$   
 $T_S/T_0 \approx (\pi R^2/2 + 2FR)/\pi R^2 = 1/2 + 2F/\pi R$   
 $T_W/T_0 \approx (\pi R^2/2 - 2FR)/\pi R^2 = 1/2 - 2F/\pi R$   
где  $R \approx 150$  млн. км — среднее расстояние от Земли до Солнца;  $F$  — фокусное расстояние эллипса.
- относительное изменение расстояния  
 $\Delta R/R = 2F/R = \pi(T_S - T_W)/2T_0 = 3\%$ ;  $\Rightarrow$
- Относительное изменение скорости  
 $\Delta V/V = \Delta R/R = 3\%$
- Абсолютное изменение расстояния —  
 $\Delta R = R_S - R_W = 4.5$  млн.км.,
- Изменение скорости  $\Delta V = 0,9$  км/с

# Заглянем в таблицу

- $V_{max}$  (в перигелии) = 30,3 км/с  
 $V_{min}$  (в афелии) = 29,3 км/с  
 $\Delta V = 1$  км/с (у нас:  $\Delta V = 0,9$  км/с)
- $R_S = 152,1$  млн. км  
 $R_W = 147,1$  млн. км
- $e$  (эксцентриситет) = 0,0167 (у нас:  $e = 0,015$ )
- $\Delta R = R_S - R_W = 5$  млн. км. (у нас:  $\Delta R = 4,5$  млн.км)
- $\Delta R/R = 3,3\%$ ; (у нас:  $\Delta R/R = 3\%$ )



# От Земли по разным траекториям

- С полюса Земли запускают ракету со скоростью  $v_0$ :  $v_I < v_0 < v_{II}$ :
  - 1) вертикально вверх
  - 2) Горизонтально
- Какая из ракет улетит дальше от Земли?
- Решение:
  - 1) Первая ракета:  
ЗСЭ:  $mv_0^2/2 - mg_0R = -mg_0R^2/r_1 \Rightarrow \text{max.}$  Расстояние до центра Земли  
 $r_1 = 2a = R/(1 - v_0^2/2g_0R) -$
  - 2) Вторая ракета:  
ЗСМИ:  $mv_0R = mvr_2$ ;  
ЗСЭ:  $mv_0^2/2 - mg_0R = mv^2/2 - mg_0R^2/r_2 \Rightarrow \text{max.}$  Расстояние до центра Земли:  
 $r_2 = 2a - R = v_0^2/2g_0/(1 - v_0^2/2g_0R) \Rightarrow$   
 $r_2/r_1 = v_0^2/2g_0R = (v_0/v_{II})^2 < 1$

## Пример 2. Время падения Луны на Землю ☺

- Сколько времени будет падать на Землю Луна, если она вдруг остановится?  
(время обращения Луны  $T_0 = 28$  суток)
- Решение:  
По третьему закону Кеплера «период обращения»  $T$  по выродившемуся в отрезок эллипсу:  
$$(T/T_0)^2 = (a/a_0)^3 = (R/2R)^3 \Rightarrow T = T_0 (a/a_0)^{3/2}$$
$$= T_0 / (8)^{1/2} \Rightarrow \tau = T/2 = T_0 / 4 (2)^{1/2} \approx 5 \text{ суток.}$$
- Земля упадёт на Солнце ☺: за  $\tau = T/2 = T_0 / 4 (2)^{1/2} \approx 2$  месяца

# Сила сопротивления разгоняет(?) спутник

- Полная энергия на круговой орбите  $E = K + \Pi = K + (-2K) = -K = -mv^2/2$
- Мощность силы сопротивления  $N = -F_c v$  равна изменению полной энергии:
- $dE/dt = -F_c v \rightarrow mva = F_c v \rightarrow ma = F_c$

# Скорость снижения спутника

- Спутник массой  $m = 200$  кг, запущенный на круговую околоземную орбиту, тормозится в верхних слоях атмосферы. Сила трения  $F_c = C v^3$  ( $C = 3 \cdot 10^{-16}$  кг с/м<sup>2</sup>). За какое время спутник снизится на  $\Delta h = 100$  м и как при этом изменится его скорость?

(скорость снижения  $v_r = dr/dt = -2CGM/m = -2CgR^2/m = -2Cv_1^4/mg \approx -1,2$  мм/с;  $t = \Delta h/v_r = 23$  часа  $\approx 1$  сутки;  $\Delta v = F_c \Delta t/m = g\Delta h/2v_1 \approx 6$  см/с).

# Маневры на орбите: чтобы догнать – надо притормозить! чтобы отстать – надо ускориться!

- Корабль и орбитальная Станция на одной круговой орбите. До орбитальной станции расстояние  $L = 300\text{м}$ . Как приблизиться к Станции.

- Решение:

надо перейти на орбиту с меньшим на

$\Delta T = T_0 - T = L/v_0$  периодом:

$$T/T_0 = (a/a_0)^{3/2} = (E_0/E)^{3/2} = (E_0/(E_0 + \Delta K))^{3/2} \approx 1 + 3\Delta v/v_0 \Rightarrow$$

$$\Delta T = 3T_0 \Delta v/v_0 \Rightarrow \Delta v = L/3T_0 = 2 \text{ см/с}$$

## Полёт на Марс (№ 7.6)

- Рассчитайте время перелёта с орбиты Земли на орбиту Марса ( $r_M = 1,52 r_3$ ):

- Решение:

(Кеплер III):

$$(T/T_0)^2 = (2a_2/2a_1)^3 = \{(r_3 + r_M)/2r_3\}^3 \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{1}{2}T_0(1,26)^{3/2} = 260 \text{ сут} \approx 8 \text{ мес. } 3 \text{ недели}$$

# Метеорит. Прицельное расстояние

- Скорость метеорита на большом расстоянии от Земли  $V_0$ .
- Найти наибольшее «прицельное» расстояние  $b = ?$
- Решение:
  1. ЗСМИ для касательной траектории:  
 $mv_0 b = mvR$
  2. ЗСЭ:  
 $mv_0^2/2 = mv^2/2 - mgR \Leftrightarrow$   
 $b = R(1 + v_{\parallel}^2/v_0^2)^{1/2}$ .  
Если  $r < b$  – метеорит упадёт на Землю.  
Если  $r > b$  – промажет.
    - Предельные случаи:
      1.  $v_0 = 0$ ;  $b = \infty$  - метеорит упадёт при любых обстоятельствах.
      2.  $V_0 = \infty$ ;  $b = R$  – Земля не сильно искривит траекторию.

# Вертикальный бросок с первой космической

- На какую высоту поднимется и когда вернётся?