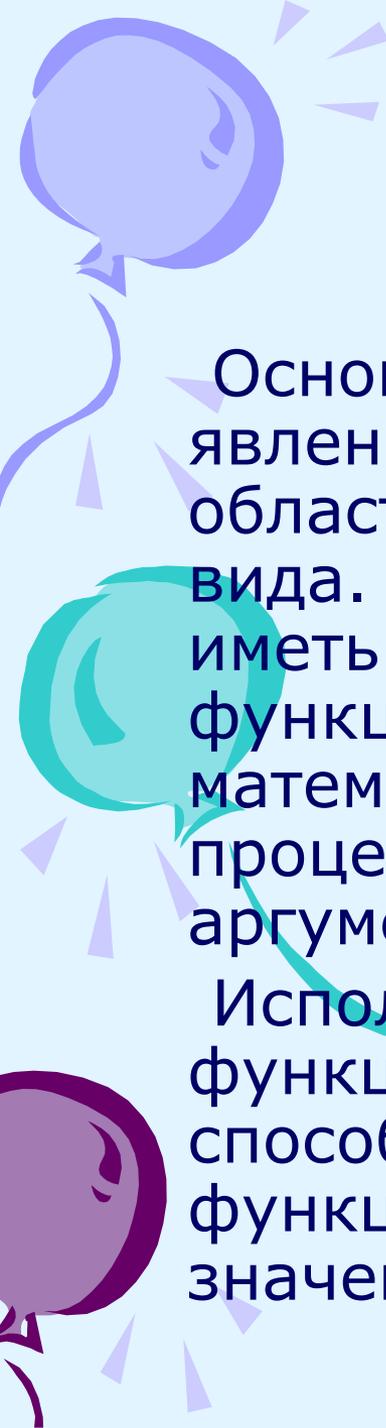


Интерполяция функций



Постановка задачи

Основу мат моделей многих процессов и явлений в физике, химии, биологии и др. областях составляют уравнения различного вида. Для решения этих уравнений необходимо иметь возможность вычислить значения функций, входящих в описание математической модели рассматриваемого процесса при произвольном значении аргумента.

Используемые в математических моделях функции могут быть заданы как аналитическим способом, так и табличным, при котором функция известна только при дискретных значениях аргумента.

Пусть функция $f(x)$ задана множеством своих значений для дискретного набора точек (таблицей). Эта таблица может быть результатом расчетов, либо экспериментальными точками.

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

Значения аргумента x_i называются **узлами**. (В общем случае эти узлы не являются равноотстоящими).

Требуется найти приближенные значения функции $f(x)$ в любой произвольной точке отрезка $[x_0; x_n]$ при помощи функции $F(x)$.

$$F(x) \approx f(x) \quad x \in [x_0; x_n]$$

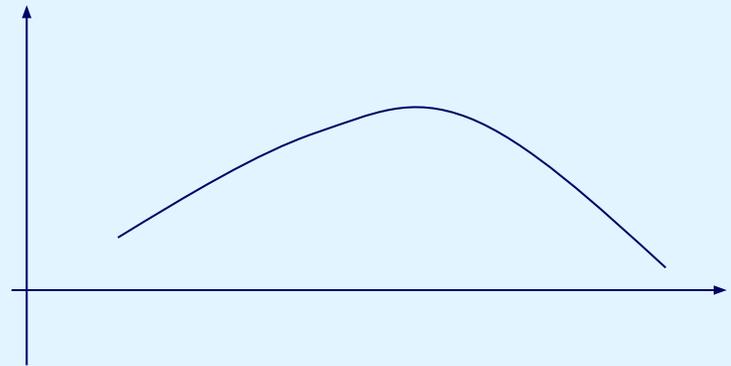
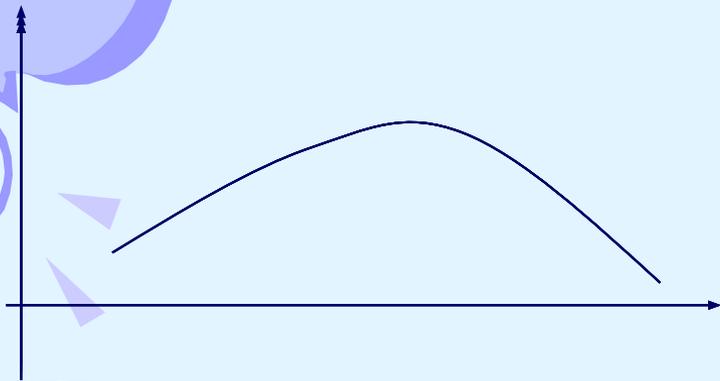
Приближение (замена) функции $f(x)$ заданной таблично другой функцией $F(x)$, заданной аналитически, называется **аппроксимацией**.

Чем проще аппроксимирующая функция, тем меньше времени требуется для решения задачи аппроксимации. Чем больше узлов, тем меньше погрешность. Для каждой конкретной аппроксимирующей функции нужно стремиться выбрать такой способ аппроксимации, который обеспечивает минимальную погрешность при минимальном количестве узлов.

Существует два принципиально различных метода аппроксимации функций:

1) **Интерполяция** – аппроксимирующая функция $F(x)$ точно совпадает с табличными значениями y_0, y_1, \dots, y_n функции $f(x)$.

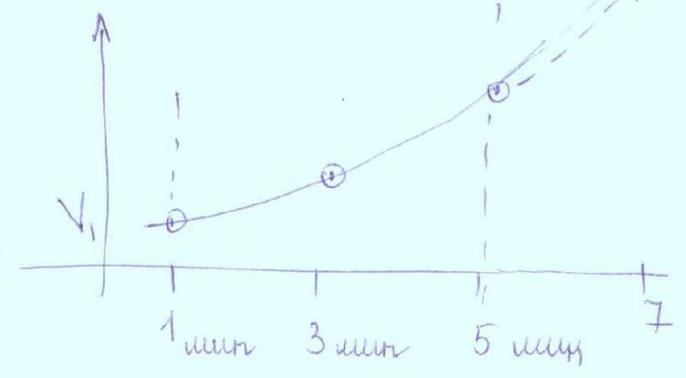
2) **Метод наименьших квадратов** – аппроксимирующая функция $F(x)$ может не совпадать ни с одним табличным значением y_0, y_1, \dots, y_n , максимально приближаясь к ним в среднем.



Итак, **задача интерполяции** - нахождение приближенных значений функции при аргументах, не совпадающих с узловыми. Если x находится внутри интервала $[x_0; x_n]$, процесс нахождения приближенного значения называется интерполяцией. Если x находится вне интервала - **экстраполяцией**.

Пример В мед. лаборатории рассматривается процесс размножения бактерий. Сделано несколько показаний эксперимента

t	1 мин	3 мин	5 мин
V	2,24	20,1	148



В рез-те интерполирования подобрана функция $f(x) = e^x$. Можно вычислить $f(7) = 1094$. Здесь мы провели экстраполяцию.

2. 2. 2. Линейная интерполяция

При линейной интерполяции табличные значения функции в смежных узловых точках соединяются отрезками прямых, и функция $f(x)$ приближается ломаной с вершинами в данных точках. Уравнения каждого отрезка ломаной в общем случае разные. Это наиболее простой и достаточно распространенный способ интерполяции. Если значение x выходит за пределы интервала $[x_0; x_n]$, то осуществляется линейная экстраполяция по отрезкам прямых, примыкающим к конечным точкам. При линейной интерполяции интерполирующая функция имеет изломы в узлах интерполяции и разрывы значений производных. Погрешность интерполяции определяется расстояниями между узлами интерполяции.

В системе *MathCAD* линейная интерполяция реализуется с помощью встроенной функции

$$linterp(VX, VY, x)$$

16.0	
14.0	
12.0	
10.0	
8.0	
6.0	
4.0	

(2)

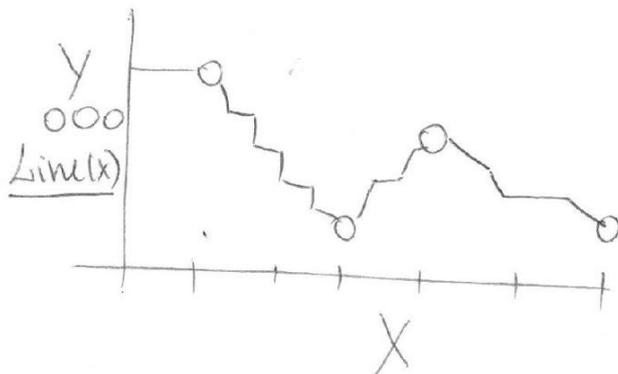
Аргументами являются два вектора Vx, Vy ,
содержащие исходные данные и независимый
переменный x .

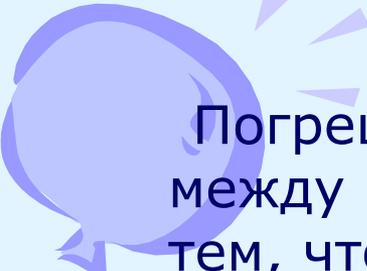
Пример

$i := 0..3$ $X := 1, 1.1..6$

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Line}(x) := \text{linterp}(X, Y, x)$$





Погрешность интерполяции определяется расстоянием между узлами интерполяции. Обусловлена погрешность тем, что график имеет изломы в узлах.



Изломы интерполяции можно устранить, если в качестве интерполирующей использовать такую функцию, график которой представляет собой плавную кривую, например, полином, проходящий через заданные в таблице точки.



Пусть значения y_0, y_1, \dots, y_n , приведенные в табл.1, получены с достаточно малой погрешностью и могут считаться точными для решаемой задачи. Тогда целесообразно потребовать, чтобы приближающая функция $F(x)$ проходила точно через точки с координатами x_i, y_i ($i = 0, 1, \dots, n$), т.е. значения приближающей функции $F(x)$ точно совпадали с табличными значениями данной функции $f(x)$

$$\begin{aligned} F(x_0) &= f(x_0) = y_0; \\ F(x_1) &= f(x_1) = y_1; \\ &\dots\dots\dots \\ F(x_n) &= f(x_n) = y_n; \end{aligned} \tag{1}$$

2. 2. 3. Интерполяция полиномом Лагранжа

Погрешность линейной интерполяции обусловлена тем, что график интерполирующей функции имеет изломы в узлах интерполяции. Эти изломы можно устранить, если в качестве интерполирующей использовать такую функцию, график которой представляет собой плавную кривую (например, полином), проходящий точно через заданные в табл.1 точки. Существует много разновидностей полиномов, для которых выполнены условия (1). Ниже будет рассмотрен полином Лагранжа. Интерполяция полиномом Лагранжа дает высокую точность, если значения функции в смежных узлах, заданные в табл.1, изменяются достаточно медленно.

Построим интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$, для которого выполнены условия (1), следующим образом:

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \dots + l_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) , \quad \text{где } l_i(x) \text{ — ПОЛИНОМ} \quad (3)$$

16.0	
14.0	
12.0	
10.0	
8.0	
6.0	
4.0	
2.0	
0.0	

Потребуем, чтобы в узловых точках $x = x_j$ ($j = 0, 1, \dots, n$ – номер узла),

$$l_i(x_j) = \begin{cases} y_i, & \text{если } j = i \\ 0, & \text{если } j \neq i. \end{cases} \quad (4)$$

Полином $l_i(x)$ составим следующим образом:

$$l_i(x) = C_i (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) . \quad (5)$$

В полиноме (5) каждый из n сомножителей в скобках является разностью изменяющегося непрерывно аргумента x и дискретного значения x_j узла с номером j . Причем номер узла j принимает значения сначала от 0 до $i - 1$, затем от $i + 1$ до n . Сомножитель $x - x_i$ отсутствует. За счет этого $l_i(x) = 0$ во всех узлах, кроме узла, номер которого j совпадает с

номером полинома i . Таким образом, обеспечивается выполнение соотношения (4) при $j \neq i$.

Для того чтобы соотношение (4) выполнялось и при $j = i$, коэффициент C_i для полинома (5) найдем из следующего условия:

$$l_i(x_i) = y_i,$$

откуда

$$C_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в полином (5), получаем

$$l_i(x) = y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (7)$$

Перепишем соотношение (7) в более компактном виде:

$$l_i(x) = y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (8)$$

16.0	
14.0	
12.0	
10.0	
8.0	
6.0	
4.0	
2.0	

пример

x	1	2	3
y	1	4	9

Составим интер. полином Лагранжа (т.е. выведем аналитическую зависимость $y(x)$).

$$\begin{aligned}L_n(x) &= 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 4 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 9 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \\ &= 1 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + 3 \right) + 4 \cdot (-x^2 + 4x - 3) + 9 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + 1 \right) = \\ &= x^2.\end{aligned}$$

в системе MathCAD неименом формулы

$$L_{k,i} = \sum_i \prod_j \left(\text{if} \left(j = i, y(x_i), \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} \right) \right).$$

Вычисление коэффициентов интерполяционного полинома $F(x)$ путем решения системы уравнений

Недостатком линейной интерполяции является наличие изломов в узловых точках. Изломы будут отсутствовать, если в качестве приближающей функции $F(x)$ используется полином вида:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots + a_n x^n \quad (3)$$

ТЕОРЕМА: Для фиксированной (заданной) интерполяционной таблицы существует единственный интерполяционный полином $F(x)$, проходящий через все ее точки x_i, y_i .

Степень полинома $F(x)$ равна числу интервалов n между узлами (на единицу меньше числа узлов).

Таблице 1 с двумя узлами x_0, x_1 соответствует полином первой степени (прямая): $F(x) = a_0 + a_1 x$.

Таблице 1 с тремя узлами x_0, x_1, x_2 соответствует полином второй степени (парабола): $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Таблице 1 с четырьмя узлами x_0, x_1, x_2, x_3 , соответствует полином третьей степени: $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. И так далее.

Существует множество способов вычисления значений коэффициентов a_k полинома $F(x)$. Мы рассмотрим два способа.

3.1. Вычисление коэффициентов интерполяционного полинома $F(x)$ путем решения системы уравнений

В соответствии с соотношениями (1) для каждой точки x_i, y_i таблицы 1 можно записать следующее уравнение:

$$F(x_i) = y_i.$$

Получится система из $n + 1$ уравнения, решив которую можно найти $n + 1$ значение неизвестных коэффициентов a_i интерполяционного полинома $F(x)$. На основании сформулированной выше теоремы эта система уравнений будет иметь решение.

Рассмотрим пример. Пусть надо найти интерполяционный полином (т. е. коэффициенты интерполяционного полинома) для точек, заданных следующей таблицей:

Таблица 2

x_i	1	3	4
$f(x_i)$	12	4	6

$$n = 2 \quad x_0 = 1 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 4$$
$$y_0 = 12 \quad y_1 = 4 \quad y_2 = 6$$

Составим следующую систему уравнений:

$$F(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = a_0 + a_1 + a_2 = 12$$
$$F(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 9 = 4$$
$$F(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 16 = 6$$

Решаем систему уравнений и находим коэффициенты a_0 a_1 a_2 интерполяционного полинома $F(x)$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad a := A^{-1} \cdot Y \quad a = \begin{pmatrix} 22 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_0 = 22 \\ a_1 = -12 \\ a_2 = 2 \end{matrix}$$

Построим график интерполяционного полинома $F(x)$

$$F(x) := a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \quad x := 1, 1.1..6$$

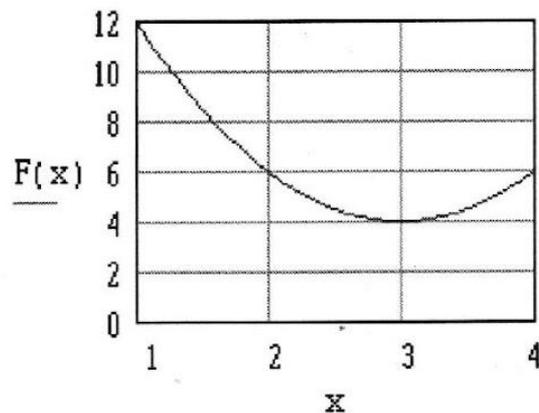


Рис. 2

Таким образом, интерполяционный полином $F(x) = 22 - 12x + 2x^2$ проходит через все три точки, заданные в табл. 2.