Первообразная

Определение первообразной. Основное свойство первообразной

Изучая математику, мы не раз сталкивались со взаимно-обратными операциями.
Примерами взаимно-обратных операций являются:

Операция, обратная дифференцированию, называется интегрированием, а процессом, обратным нахождению производной, является процесс нахождения первообразной.

Определение:Функция F(x) называется первообразной для функции *f(x)* на промежутке *I* ,если для любого x из промежутка *I* выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Или **Первообразной для функции F(x) называется функция, производная которой равна данной.**

Таблица первообразных

Функция $y = f(x)$	0	1	2	C	x	x^2	x^3	x^n	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x^2}$
Первообразная $F(x)$	C	x	$2x$	Cx	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$2\sqrt{x}$	$-\frac{1}{x}$

Функция $y = f(x)$	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Первообразная $F(x)$	$\sin x$	$-\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$

Три правила нахождения первообразных

1^{o} Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.

2^{o} Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k – постоянная, то функция $kF(x)$ есть первообразная для kf.

3^{o} Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то функция $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.

Примеры.

Найти первообразные функций:

а) $f(x)$**= 8sin(x)**

б) y=3*x2* + 4x - 5

Решение.

а) $f(x)= sin\ (x) => F(x)=cos\ (x)$ Коэффициент 8 выносим за функцию.Тогда первообразная исходной функции примет вид: $F(x)= = -8cos(x) + C$

б) $f(x)= 3x2 => F(x)=x3$, $f(x)=4$x $=> F(x)=2x2$
$f(x)=5 => F(x)=5x$
Тогда первообразная исходной функции примет вид:
$F(x)= x3 + 2x2 - 5x + C$

Пример 1.

Найти одну из первообразных для функции

а) $f(x) = 4x^3 + 2\cos(3x + 1)$

Решение:

а) $F(x) = 4\frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{1}{3}\sin(3x + 1)$

Ответ:

$$F(x) = x^4 + \frac{2}{3}\sin(3x + 1)$$

Проверка: $F'(x) = 4x^3 + \frac{2}{3} \cdot 3\sin(3x + 1) = 4x^3 + 2\cos(3x + 1)$. То есть $F'(x) = f(x)$.

Пример 2.

Найти одну из первообразных для функции

б) $f(x) = \frac{2}{\cos^2(4x+1)} + \frac{1}{\sqrt{3-4x}}$

Решение:

б) $F(x) = 2 \cdot \frac{1}{4} tg\,(4x+1) + 2 \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot \sqrt{3-4x}$

Ответ:

$$F(x) = \frac{1}{2} tg(4x+1) - \frac{1}{2}\sqrt{3-4x}$$

Проверка: $F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{1}{\cos^2(4x+1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{2\sqrt{3-4x}} = \frac{2}{\cos^2(4x+1)} + \frac{1}{\sqrt{3-4x}}$.

$F'(x) = f(x)$.