

Первообразная

Определение первообразной. Основное свойство первообразной

Изучая математику, мы не раз сталкивались со взаимно-обратными операциями.

Примерами взаимно-обратных операций являются:



Операция, обратная дифференцированию, называется интегрированием, а процессом, обратным нахождению производной, является процесс нахождения первообразной.

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке I , если для любого x из промежутка I выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Или Первообразной для функции $F(x)$ называется функция, производная которой равна данной.

Таблица первообразных

Функция $y = f(x)$	0	1	2	C	x	x^2	x^3	x^n	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x^2}$
Первообразная F(x)	C	x	2x	Cx	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$2\sqrt{x}$	$-\frac{1}{x}$

Функция $y = f(x)$	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Первообразная F(x)	$\sin x$	$-\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$

Три правила нахождения первообразных

1^o Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.

2^o Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k – постоянная, то функция $kF(x)$ есть первообразная для kf .

3^o Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то функция $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.



Примеры.

Найти первообразные функций:

а) $f(x) = 8\sin(x)$

б) $y = 3x^2 + 4x - 5$

Решение.

а) $f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = \cos(x)$ Коэффициент 8 выносим за функцию. Тогда первообразная исходной функции примет вид: $F(x) = -8\cos(x) + C$

б) $f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = x^3$, $f(x) = 4x \Rightarrow F(x) = 2x^2$

$f(x) = 5 \Rightarrow F(x) = 5x$

Тогда первообразная исходной функции примет вид:

$F(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + C$

Пример 1.

Найти одну из первообразных для функции

$$a) f(x) = 4x^3 + 2\cos(3x + 1)$$

Решение:

$$a) F(x) = 4\frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{1}{3} \sin(3x + 1)$$

Ответ:

$$F(x) = x^4 + \frac{2}{3} \sin(3x + 1)$$

Проверка: $F'(x) = 4x^3 + \frac{2}{3} \cdot 3 \sin(3x + 1) = 4x^3 + 2\cos(3x + 1)$. То есть $F'(x) = f(x)$.

Пример 2.

Найти одну из первообразных для функции

$$b) f(x) = \frac{2}{\cos^2(4x+1)} + \frac{1}{\sqrt{3-4x}}$$

Решение:

$$b) F(x) = 2 \cdot \frac{1}{4} \operatorname{tg}(4x+1) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \sqrt{3-4x}$$

Ответ:

$$F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(4x+1) - \frac{1}{2} \sqrt{3-4x}$$

$$\text{Проверка: } F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{1}{\cos^2(4x+1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{2\sqrt{3-4x}} = \frac{2}{\cos^2(4x+1)} + \frac{1}{\sqrt{3-4x}}$$

$$F'(x) = f(x).$$