№ п/п	Уравнение *	X	Y	$u_0(x)$	$u_Y(x)$	$u_0(y)$	$u_X(y)$	Δx Δy	$f(x,y) =$
3.1	1	1	1	$\sin(\pi y)$	0	0	0	0.2, 0.1	-
3.2	2	1	1	x^2	$(x-1)^2$	y^2	$(y-1)^2$	0.2, 0.1	-1
3.3	1	1	1	$u_Г = x + y$				0.2, 0.1	-
3.4	3	1	1	$u_Г = \cos(2x) + \sin(2y)$				0.2, 0.1	0, $g(x,y) = 4$
3.5	1	1	1	0	x	0	y	0.2, 0.1	-
3.6	2	1	1	x^3	x^3	0	1	0.2, 0.1	y
3.7	1	4	4	10	120	90	40	0.5, 0.25	-
3.8	2	1	1	$u_Г = x + y$				0.2, 0.1	- 2
3.9	1	2	2	10	20	30	40	0.25 ,0.1	-
3. 10	2	1	1	x^3	$(x-1)^3$	y^3	$(y-1)^3$	0.2, 0.1	2

* уравнения: 1-Лапласа, 2-Пуассона, 3-Гельмгольца

8. БЫСТРОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Будем рассматривать комплексную функцию $f(n)$ дискретного аргумента $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Будем полагать, что $f(n)$ - периодическая функция с периодом N, т.е.

$$f(n \pm N) = f(n) \;\; для \;\forall\; n. \qquad (8.1)$$

Дискретное преобразование Фурье от функции $f(n)$ определяется известной формулой

$$F[f] = \tilde{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}kn\right) f(n); \qquad k = \overline{0, N-1}\,, \qquad (8.2)$$

где, очевидно, Фурье-трансформанта $\tilde{f}(k)$ - также периодическая функция с периодом N.

Если мы знаем Фурье-трансформанту $\tilde{f}(k)$, то мы можем восстановить исходную функцию $f(n)$, используя обратное дискретное преобразование Фурье

$$F^{-1}[\tilde{f}] = f(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right)\tilde{f}(k); \qquad n = \overline{0, N-1}. \qquad (8.3)$$

В общем случае, число арифметических операций, которое требуется для вычисления дискретного преобразования Фурье, без затрат на вычисление функций вида $\exp\left(i\frac{2\pi}{N}kn\right)$, оценивается формулой

$$T_F \sim N^2. \qquad (8.4)$$

Для уменьшения числа операций, необходимых для вычисления преобразования Фурье, опишем алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье (БПФ). Положим $N = N_1 N_2$, где N_1 и N_2 - целые числа. Представим k и n в выражении (2) в виде $k = k_2 + k_1 N_2$ и $n = n_1 + n_2 N_1$, где $k_1, n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$; $k_2, n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$. Тогда из (2) получим

$$\tilde{f}(k) = \tilde{f}(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}(k_2 + k_1 N_2)(n_1 + n_2 N_1)\right) f(n_1, n_2) =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N_1}k_1 n_1 + i\frac{2\pi}{N}k_2 n_1\right) \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N_2}k_2 n_2\right) f(n_1, n_2). \qquad (8.5)$$

Пусть N_1 - простое число. Из (5) очевидно, что число арифметических операций, которое требуется для вычисления дискретного преобразования Фурье, без затрат на вычисление функций $\exp(i\frac{2\pi}{N}kn)$, оценивается формулой

$$T_F(N) \sim N_2 N_1^2 + N_1 T_F(N_2)\,. \tag{8.6}$$

Перепишем (6) в следующем виде

$$\frac{T_F(N)}{N} \sim N_1 + \frac{T_F(N_2)}{N_2}\,. \tag{8.7}$$

Представим N как произведение простых сомножителей числа $N_1, N_2, ..., N_m$, т.е.

$$N = N_1^{l_1} N_2^{l_2} \ldots N_m^{l_m}\,. \tag{8.8}$$

Введем понятие целочисленного логарифма целого числа, как сумму всех простых сомножителей с учетом их кратности, т.е.

$$LOG(N) = \sum_{k=1}^{m} l_k N_k\,. \tag{8.9}$$

Отметим, что если N – простое число, то $LOG(N) = N$.

Тогда из (7)-(9), получим, что число арифметических операций для вычисления Фурье-преобразования (5) с использованием «быстрых» алгоритмов оценивается формулой

$$T_{FF} \sim N\,LOG(N)\,. \tag{8.10}$$

Если число N – представляется степенью двойки, то получаем хорошо известную оценку для БПФ

$$T_{FF} \sim N \log_2(N)\,. \tag{8.11}$$

Рассмотрим матрицу следующего вида

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & a_0 & \dots & a_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}. \qquad (8.12)$$

Матрица вида (12) называется циркулянтной матрицей.

Будем рассматривать умножение матрицы (12) на N-мерный вектор $\vec{u}$,

$$\vec{v}=A\vec{u}. \qquad (8.13)$$

Введем периодическую функцию дискретного аргумента $A(n)$ и положим

$A(-n)=a_n,\ n=\overline{0,N-1}$. Тогда (13) можно переписать в следующем виде

$$v(n)=\sum_{m=0}^{N-1}A(n-m)\,u(m),\qquad n=\overline{0,N-1}. \qquad (8.14)$$

Применим дискретное преобразование Фурье к обеим частям соотношения (14). Тогда для правой части получим

$$F\left[\sum_{m=0}^{N-1}A(n-m)\,u(m)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}kn\right)A(n-m)u(m)=$$

$$\sum_{m=0}^{N-1}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}km\right)u(m)\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left[i\frac{2\pi}{N}k(n-m)\right]A(n-m). \qquad (8.15)$$

Рассмотрим вторую сумму в последнем выражении (15). Обозначая $q=n-m$, имеем

$$\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left[i\frac{2\pi}{N}k(n-m)\right]A(n-m)=\sum_{q=-m}^{N-1-m}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}kq\right)A(q).$$

Далее, принимая во внимание периодичность функций

$$A(q+N)=A(q),\qquad \exp\left(i\frac{2\pi}{N}k(q+N)\right)=\exp\left(i\frac{2\pi}{N}kq\right)$$

получаем

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[i \frac{2\pi}{N} k(n-m)\right] A(n-m) = \tilde{A}(k). \qquad (8.16)$$

Тогда из (15) и (16) следует равенство

$$F\left[\sum_{m=0}^{N-1} A(n-m)u(m)\right] = \tilde{A}(k)\,\tilde{u}(k); \quad k=\overline{0,N-1}. \qquad (8.17)$$

В результате из (14) и (17), получаем следующее соотношение для Фурье-трансформант

$$\tilde{v}(k) = \tilde{A}(k)\,\tilde{u}(k), \quad k=\overline{0,N-1}. \qquad (8.18)$$

Таким образом, применяя быстрое преобразование Фурье, мы можем использовать (18) для быстрого умножения матрицы вида (12) на вектор (одно прямое БПФ и одно обратное БПФ). В этом случае требуемое число арифметических операций оценивается следующей формулой

$$T_A \sim 2N\,LOG(N)\,. \qquad (8.19)$$

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632с.
2. Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д., Численные методы. Использование MATLAB, 3-е издание,: Пер. с англ. – М.: Изд. «Вильямс», 2001. – 720 с.
3. А.Б.Самохин, А.С.Самохина. Численные методы и программирование на Фортране для персонального компьютера.- М.: Радио и связь, 1996. – 224 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 644с.
5. Вержбицкий В.М., Численные методы (Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) – М.: Высшая школа, 2001.– 382с.
6. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчин М.П. Численные методы. – М.: Просвещение , 1991. – 176с.