

№ п/п	Уравнение *	X	Y	$u_0(x)$	$u_Y(x)$	$u_0(y)$	$u_X(y)$	$\Delta x =$ Δy	$f(x, y)$
3.1	1	1	1	$\sin(\pi y)$	0	0	0	0.2, 0.1	-
3.2	2	1	1	x^2	$(x-1)^2$	y^2	$(y-1)^2$	0.2, 0.1	-1
3.3	1	1	1	$u_\Gamma = x + y$				0.2, 0.1	-
3.4	3	1	1	$u_\Gamma = \cos(2x) + \sin(2y)$				0.2, 0.1	0, $g(x, y) =$ 4
3.5	1	1	1	0	x	0	y	0.2, 0.1	-
3.6	2	1	1	x^3	x^3	0	1	0.2, 0.1	y
3.7	1	4	4	10	120	90	40	0.5, 0.25	-
3.8	2	1	1	$u_\Gamma = x + y$				0.2, 0.1	-2
3.9	1	2	2	10	20	30	40	0.25, 0.1	-
3. 10	2	1	1	x^3	$(x-1)^3$	y^3	$(y-1)^3$	0.2, 0.1	2

*

уравнения: 1-Лапласа, 2-Пуассона, 3-Гельмгольца

8. БЫСТРОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Будем рассматривать комплексную функцию $f(n)$ дискретного аргумен-

та $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Будем полагать, что $f(n)$ - периодическая функция с периодом N , т.е.

$$f(n \pm N) = f(n) \quad \text{для } \forall n. \quad (8.1)$$

Дискретное преобразование Фурье от функции $f(n)$ определяется известной формулой

$$F[f] = \tilde{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp(i \frac{2\pi}{N} kn) f(n); \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (8.2)$$

где, очевидно, Фурье-трансформанта $\tilde{f}(k)$ - также периодическая функция с периодом N .

Если мы знаем Фурье-трансформанту $\tilde{f}(k)$, то мы можем восстановить исходную функцию $f(n)$, используя обратное дискретное преобразование Фурье

$$F^{-1}[\tilde{f}] = f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-i \frac{2\pi}{N} kn) \tilde{f}(k); \quad n = \overline{0, N-1} \quad (8.3)$$

В общем случае, число арифметических операций, которое требуется для вычисления дискретного преобразования Фурье, без затрат на вычисление

функций вида $\exp(i \frac{2\pi}{N} kn)$, оценивается формулой

$$T_F \sim N^2. \quad (8.4)$$

Для уменьшения числа операций, необходимых для вычисления преобразования Фурье, опишем алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье (БПФ). Положим $N = N_1 N_2$, где N_1 и N_2 - целые числа. Представим k и n в

выражении (2) в виде $k = k_2 + k_1 N_2$ и $n = n_1 + n_2 N_1$, где $k_1, n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$; $k_2, n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$. Тогда из (2) получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \tilde{f}(k_1, k_2) = \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \exp\left\{i \frac{2\pi}{N} (k_2 + k_1 N_2)(n_1 + n_2 N_1)\right\} f(n_1, n_2) \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \exp\left\{i \frac{2\pi}{N} k_1 n_1\right\} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \exp\left\{i \frac{2\pi}{N} k_2 n_2\right\} f(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Пусть N_1 - простое число. Из (5) очевидно, что число арифметических операций, которое требуется для вычисления дискретного преобразования Фурье, без затрат на вычисление функций $\exp(i \frac{2\pi}{N} kn)$, оценивается формулой

$$T_F(N) \sim N_2 N^2 + N T(N). \quad (8.6)$$

Перепишем (6) в следующем виде

$$\frac{T_F(N)}{N} \sim N + \frac{T_F(N_2)}{N_2}. \quad (8.7)$$

Представим N как произведение простых сомножителей N_1, N_2, \dots, N_m , т.е. числа

$$N = N_1^{l_1} N_2^{l_2} \dots N_m^{l_m}. \quad (8.8)$$

Введем понятие целочисленного логарифма целого числа, как сумму всех простых сомножителей с учетом их кратности, т.е.

$$LOG(N) = \sum_{k=1}^m l_k N_k. \quad (8.9)$$

Отметим, что если N – простое число, то $LOG(N) = N$.

Тогда из (7)-(9), получим, что число арифметических операций для вычисления Фурье-преобразования (5) с использованием «быстрых» алгоритмов оценивается формулой

$$T_{FF} \sim N LOG(N). \quad (8.10)$$

Если число N – представляется степенью двойки, то получаем хорошо известную оценку для БПФ

$$T_{FF} \sim N \log_2(N) \quad (8.11)$$

Рассмотрим матрицу следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_N \\ a_{N-2} & a_{N-1} & a_0 & \dots & a_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{0-3} \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Матрица вида (12) называется циркулянтной матрицей.

Будем рассматривать умножение матрицы (12) на N -мерный вектор u \square

Введем периодическую функцию дискретного аргумента $A(n)$ и положим Au .

$A(-n) = a_n$, $n = 0, N-1$. Тогда (13) можно переписать в следующем виде

$$v(n) = \sum_{m=0}^{N-1} A(n-m) u(m), \quad n = 0, N-1. \quad (8.14)$$

Применим дискретное преобразование Фурье к обеим частям соотношения (14).

Тогда для правой части получим

$$F \left[\sum_{m=0}^{N-1} A(n-m) u(m) \right] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[i \frac{2\pi}{N} kn \right] A(n-m) u(m) =$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[i \frac{2\pi}{N} km \right] u(m) \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left[i \frac{2\pi}{N} k(n-m) \right] A(n-m). \quad (8.15)$$

Рассмотрим вторую сумму в последнем выражении (15). Обозначая $q=n-m$, имеем

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp \left[i \frac{2\pi}{N} k(n-m) \right] A(n-m) = \sum_{q=-m}^{N-1-m} \exp \left[i \frac{2\pi}{N} kq \right] A(q).$$

Далее, принимая во внимание периодичность функций

$$A(q+N) = A(q), \quad \exp \left[i \frac{2\pi}{N} k(q+N) \right] = \exp \left[i \frac{2\pi}{N} kq \right]$$

получаем

$$\sum_{n=0}^N \exp\left[i \frac{2\pi}{N} k(n-m)\right] A(n-m) = \tilde{A}(k). \quad (8.16)$$

Тогда из (15) и (16) следует равенство

$$F \left[\sum_{m=0}^N A(n-m)u(m) \right] = \tilde{A}(k) \tilde{u}(k); \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (8.17)$$

В результате из (14) и (17), получаем следующее соотношение для Фурье-трансформант

$$\underline{v}_1(k) = \tilde{A}(k) \tilde{u}(k), \quad k = \overline{0, N-1} \quad (8.18)$$

Таким образом, применяя быстрое преобразование Фурье, мы можем использовать (18) для быстрого умножения матрицы вида (12) на вектор (одно прямое БПФ и одно обратное БПФ). В этом случае требуемое число арифметических операций оценивается следующей формулой

$$T_A \sim 2N \text{LOG}(N). \quad (8.19)$$

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632с.
2. Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д., Численные методы. Использование MATLAB, 3-е издание, Пер. с англ. – М.: Изд. «Вильямс», 2001. – 720 с.
3. А.Б.Самохин, А.С.Самохина. Численные методы и программирование на Фортране для персонального компьютера.- М.: Радио и связь, 1996. – 224 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 644с.
5. Вержбицкий В.М., Численные методы (Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) – М.: Высшая школа, 2001.– 382с.
6. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчин М.П. Численные методы. – М.: Просвещение, 1991. – 176с.