Тройные интегралы в цилиндрических координатах

В цилиндрических координатах положение точки $M\ (x, y, z)$ в пространстве $Oxyz$ определяется тремя числами – ρ, φ, z, где ρ – длина радиуса-вектора проекции точки M на плоскость Oxy, φ – угол, образованный этим радиусом-вектором с осью Ox (рисунок 1), z – проекция на ось Oz (ее значение одинаково в декартовых и цилиндрических координатах).

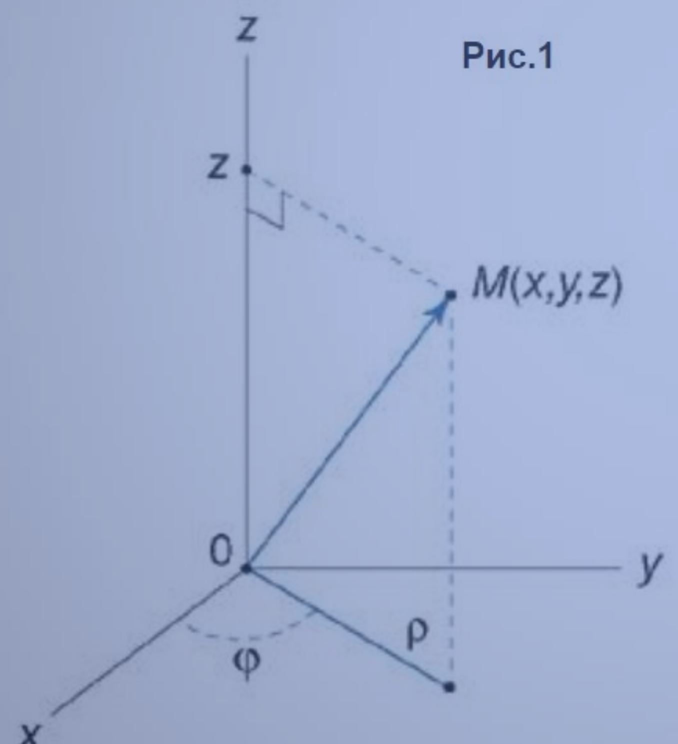


Рис.1

Цилиндрические координаты точки связаны с ее декартовыми координатами соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z.$$

Здесь предполагается, что

$$\rho \geq 0,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \ -\infty < z < \infty.$$

Якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим равен

$$I(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \geq 0.$$

Тогда формула замены переменных при данном преобразовании имеет вид:

$$\iiint\limits_{U} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{U'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,\rho d\rho d\varphi dz.$$

Переход к цилиндрическим координатам упрощает вычисление тройного интеграла в случаях, когда область интегрирования образована цилиндрической поверхностью.

Пример 1

Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_U \left(x^4 + 2x^2y^2 + y^4\right) dxdydz,$$

где область U ограничена поверхностью $x^2 + y^2 \leq 1$ и плоскостями $z = 0$, $z = 1$ (рисунок 2).

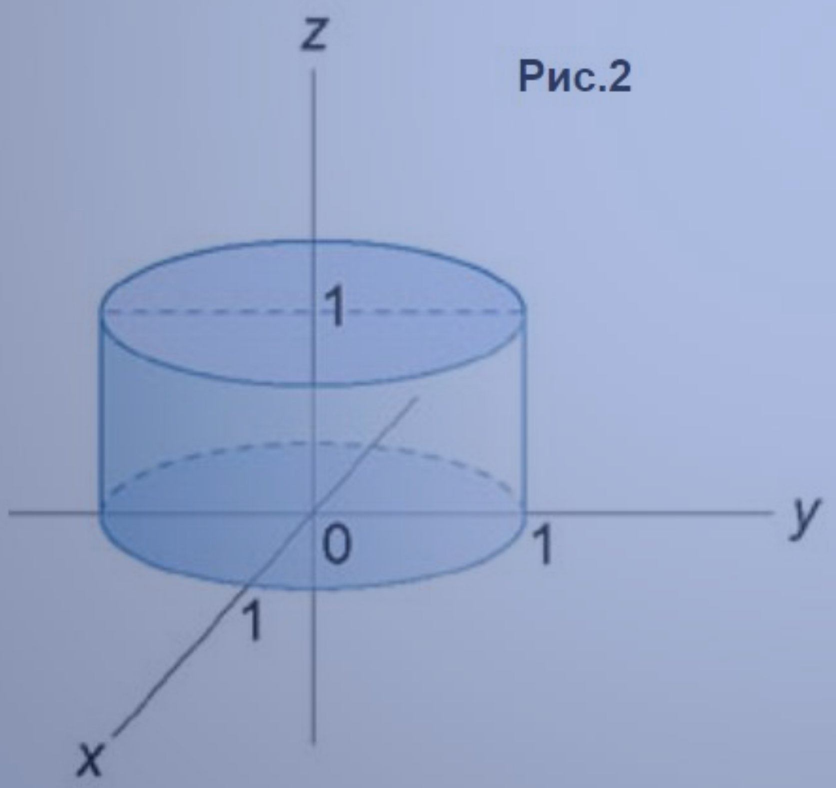


Рис.2

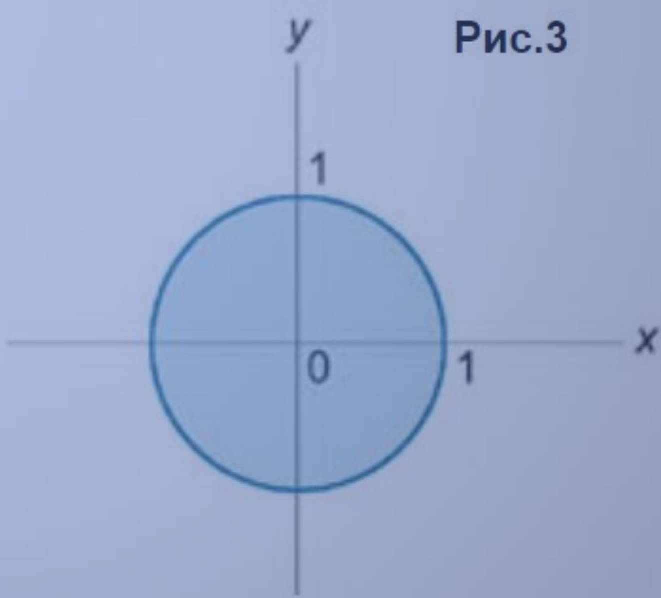


Рис.3

Решение.

Данный интеграл удобно вычислить в цилиндрических координатах. Проекция области интегрирования на плоскость Oxy представляет собой круг $x^2 + y^2 \le 1$ или $0 \le \rho \le 1$ (рисунок 3).

Заметим, что подынтегральное выражение записывается в виде

$$\left(x^4 + 2x^2y^2 + y^4\right) = \left(x^2 + y^2\right)^2 = \left(\rho^2\right)^2 = \rho^4.$$

Тогда интеграл будет равен

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 \rho d\rho \int\limits_0^1 dz.$$

Здесь во втором интеграле добавлен множитель ρ – якобиан преобразования декартовых координат в цилиндрические. Все три интеграла по каждой из переменной не зависят друг от друга. В результате тройной интеграл легко вычисляется:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 \rho d\rho \int\limits_0^1 dz = 2\pi \int\limits_0^1 \rho^5 d\rho \int\limits_0^1 dz = 2\pi \cdot 1 \cdot \int\limits_0^1 \rho^5 d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_U (x^2 + y^2)\, dxdydz,$$

где область U ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 3z$, $z = 3$ (рисунок 4).

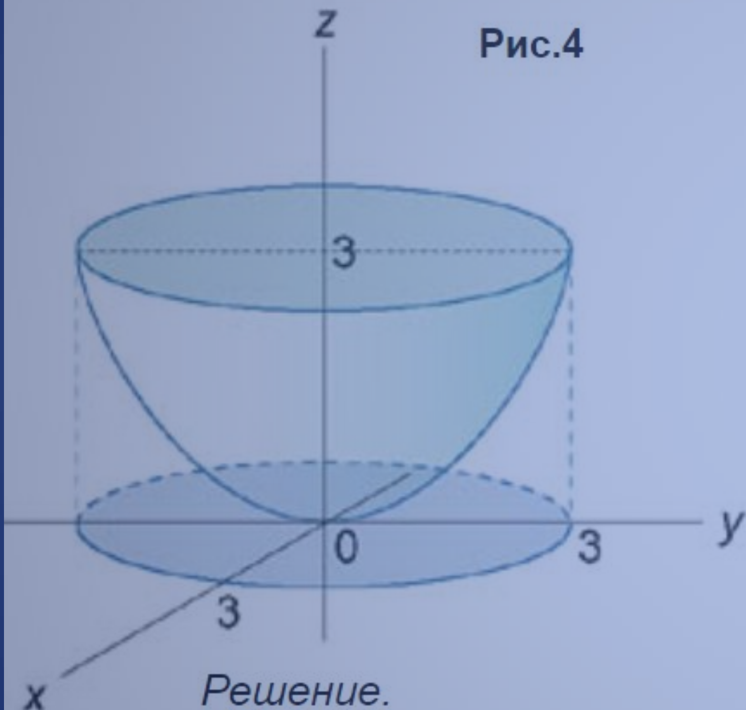


Рис.4

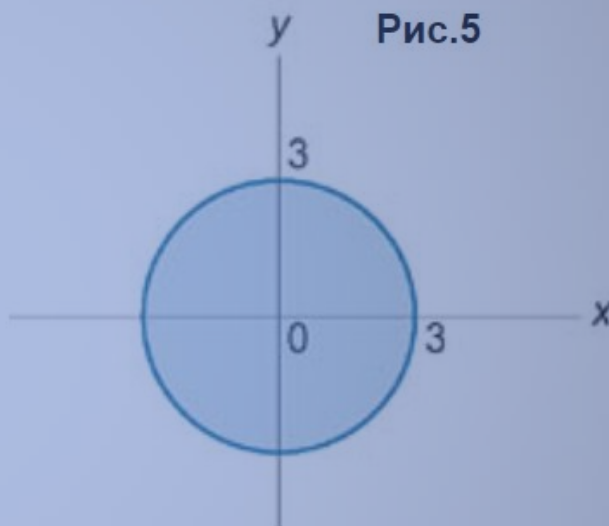


Рис.5

Решение.

Область интегрирования изображена на рисунке 4. Для вычисления интеграла перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z.$$

Дифференциал при этом равен $dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz$ $(\rho$ – якобиан$)$.

Уравнение параболической поверхности принимает вид:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 3z \ \text{ или } \ \rho^2 = 3z.$$

Проекция области интегрирования U на плоскость Oxy представляет собой окружность $x^2 + y^2 \le 9$ радиусом $\rho = 3$ (рисунок 5). Координата ρ изменяется в пределах от 0 до 3, угол φ – от 0 до 2π и координата z – от $\frac{\rho^2}{3}$ до 3. В результате интеграл будет равен

$$I = \iiint\limits_U (x^2 + y^2)\, dxdydz = \iiint\limits_{U'} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho^3 d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{3}}^{3} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho^3 d\rho \cdot \left[z\Big|_{\frac{\rho^2}{3}}^{3} \right]$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho^3 \left(3 - \frac{\rho^2}{3}\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \left(3\rho^3 - \frac{\rho^5}{3}\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\left(\frac{3\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{18} \right)\Bigg|_0^3 \right]$$

$$= \left(\frac{3 \cdot 81}{4} - \frac{729}{18} \right) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{81}{4} \cdot 2\pi = \frac{81\pi}{2}.$$

Пример 3

Используя цилиндрические координаты, найти значение интеграла

$$I = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{0}^{4-x^2-y^2} y^2 dz.$$

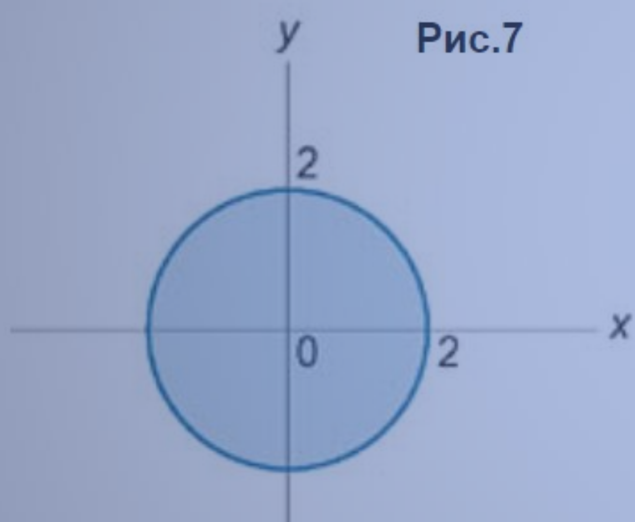


Рис.7

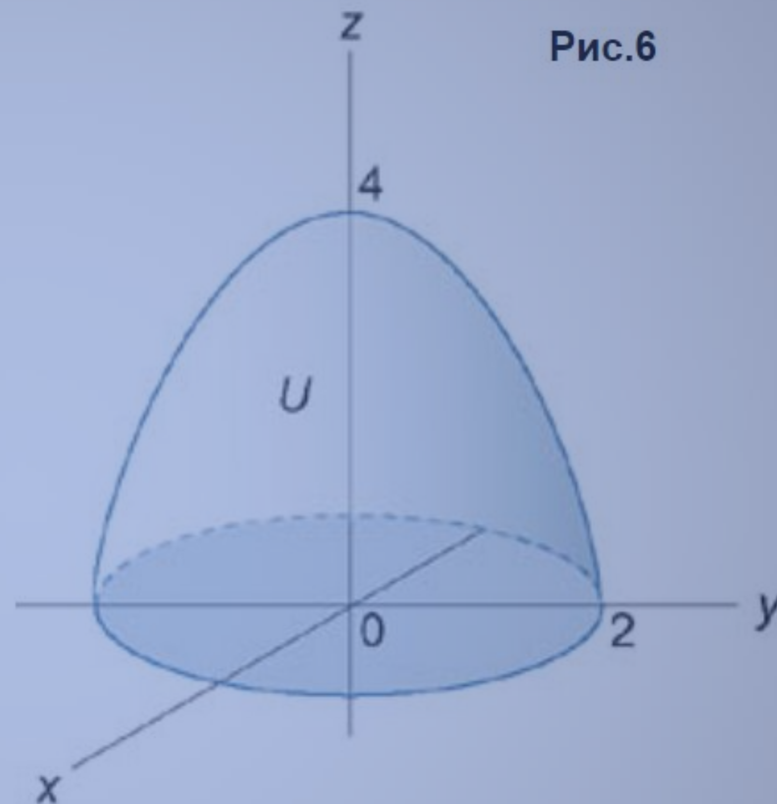


Рис.6

Решение.

Область интегрирования U изображена на рисунке 6. Ее проекция на плоскость Oxy представляет собой круг $x^2 + y^2 = 2^2$ (рисунок 7).

Новые переменные в цилиндрических координатах будут изменяться в пределах

$$0 \le \rho \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 4 - \rho^2.$$

Подставляя $x = \rho\cos\varphi$ и $x = \rho\sin\varphi$, найдем значение интеграла:

$$I = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{0}^{4-x^2-y^2} y^2 dz = \iiint\limits_{U} y^2 dxdydz = \iiint\limits_{U'} (\rho\sin\varphi)^2 \rho d\rho d\varphi dz = \iiint\limits_{U'} \rho^3 \sin^2\varphi d\rho d\varphi dz$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_{0}^{2} \rho^3\left(4-\rho^2\right) d\rho = \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_{0}^{2} \left(4\rho^3-\rho^5\right) d\rho = \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \cdot \left[\left(\frac{4\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^2\right]$$

$$= \left(2^4 - \frac{2^6}{6}\right)\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{16}{3}\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{16}{3}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{8}{3}\int\limits_{0}^{2\pi} \left(1-\cos 2\varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\left[\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right] = \frac{8}{3}\cdot 2\pi = \frac{16\pi}{3}.$$

Пример 4

Вычислить интеграл, используя цилиндрические координаты:

$$\iiint\limits_{U} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz.$$

Область U ограничена параболоидом $z = 4 - x^2 - y^2$, цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$ (рисунок 8).

Рис.8

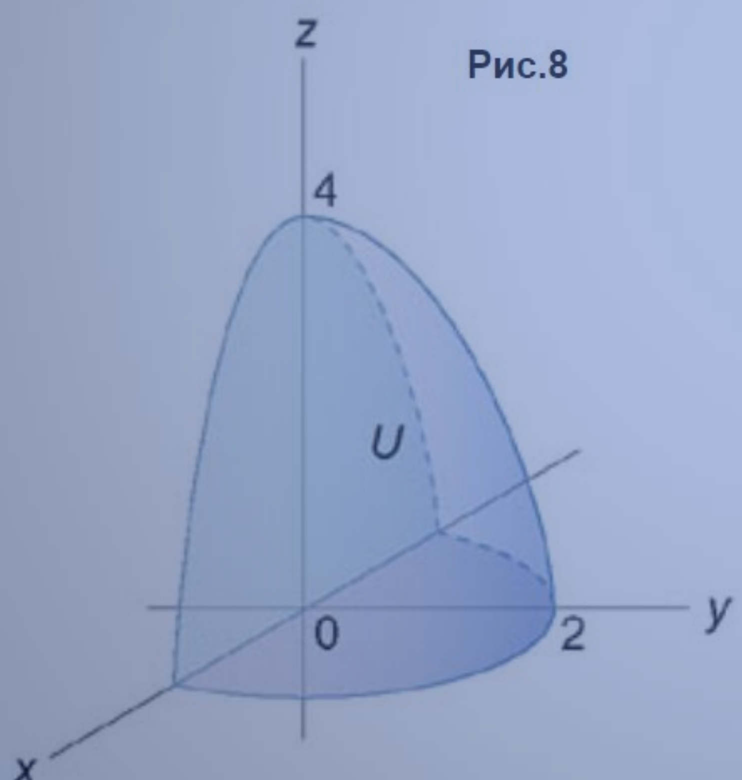
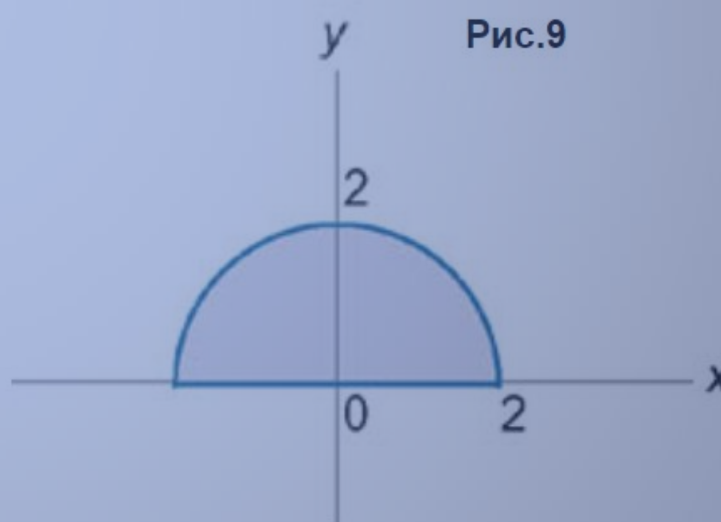


Рис.9



Решение.

Изобразив схематически область интегрирования U, находим, что ее проекция на плоскость Oxy (область D) представляет собой полукруг радиусом $\rho = 2$ (рисунок 9).

Перейдем к цилиндрическим координатам, применяя подстановки

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z,\ \ dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz.$$

Новые переменные будут изменяться в пределах

$$0 \le \rho \le 2,\ \ 0 \le \varphi \le \pi,\ \ 0 \le z \le 4-\rho^2.$$

Теперь вычисляем интеграл:

$$I = \iiint\limits_U \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{U'} \rho\cdot\rho d\rho d\varphi dz = \iiint\limits_{U'} \rho^2 d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho \int\limits_0^{4-\rho^2} dz$$

$$= \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho \cdot \left[z\Big|_0^{4-\rho^2} \right] = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2\left(4-\rho^2\right) d\rho = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^2 \left(4\rho^2-\rho^4\right) d\rho$$

$$= \int\limits_0^\pi d\varphi \left[\left(\frac{4\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \right)\Bigg|_0^2 \right] = \left(\frac{4}{3}\cdot 2^3 - \frac{2^5}{5} \right) \int\limits_0^\pi d\varphi = \frac{64}{15}\int\limits_0^\pi d\varphi = \frac{64}{15}\cdot\left[\varphi\Big|_0^\pi\right] = \frac{64\pi}{15}.$$

Пример 5

Найти интеграл

$$\iiint\limits_U y\,dx\,dy\,dz,$$

где область U ограничена плоскостями $z = x + 1$, $z = 0$ и цилиндрическими поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ (рисунок 10).

Рис.10

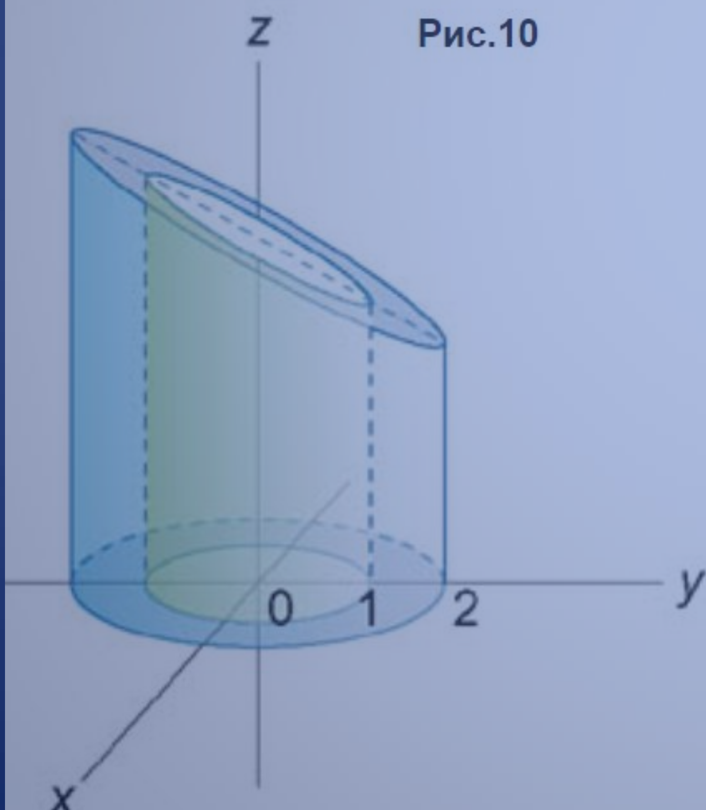
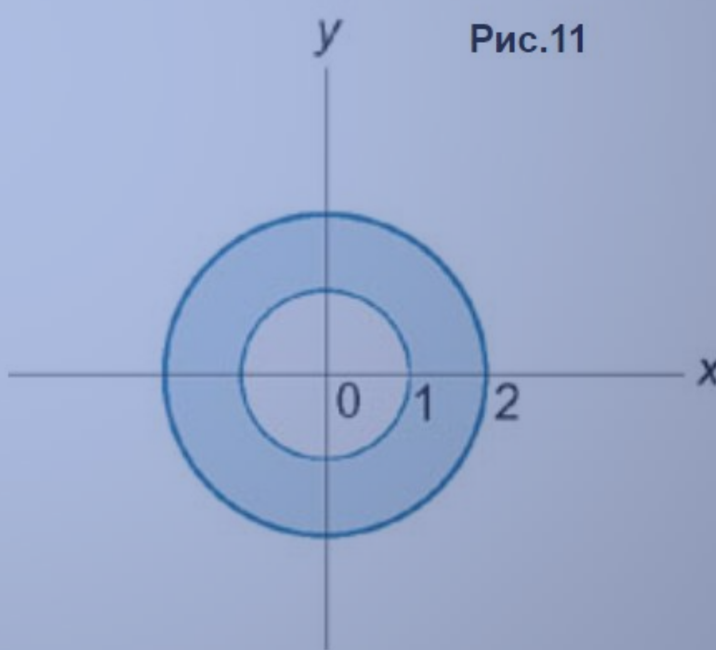


Рис.11



Решение.

Вычислим данный интеграл в цилиндрических координатах. Из условия

$$0 \le z \le x + 1$$

следует, что

$$0 \le z \le \rho \cos \varphi + 1.$$

Область интегрирования в плоскости Oxy представляет собой кольцо, ограниченное окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$ (рисунок 11). Следовательно, переменные ρ и φ изменяются в интервале

$$1 \le \rho \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Находим интеграл:

$$I = \iiint\limits_{U} y dx dy dz = \iiint\limits_{U'} \rho \sin\varphi \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \iiint\limits_{U'} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho \int\limits_0^{\rho\cos\varphi+1} dz$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho \cdot \left[z\Big|_0^{\rho\cos\varphi+1} \right] = \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 \left(\rho\cos\varphi + 1\right) d\rho$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^2 \left(\rho^3\cos\varphi + \rho^2\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \cdot \left[\left(\frac{\rho^4}{4}\cos\varphi + \frac{\rho^3}{3} \right)\Bigg|_{\rho=1}^{\rho=2} \right]$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi \left[\left(4\cos\varphi + \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{\cos\varphi}{4} + \frac{1}{3} \right) \right] d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi \left(\frac{15}{4}\cos\varphi + \frac{7}{3} \right) d\varphi$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{15}{4}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{7}{3}\sin\varphi \right) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{15}{8}\sin 2\varphi + \frac{7}{3}\sin\varphi \right) d\varphi$$

$$= \left(-\frac{15}{16}\cos 2\varphi - \frac{7}{3}\cos\varphi \right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Этот результат закономерен, поскольку область U симметрична относительно плоскости Oxz, а подынтегральная функция является четной.

Тройные интегралы в сферических координатах

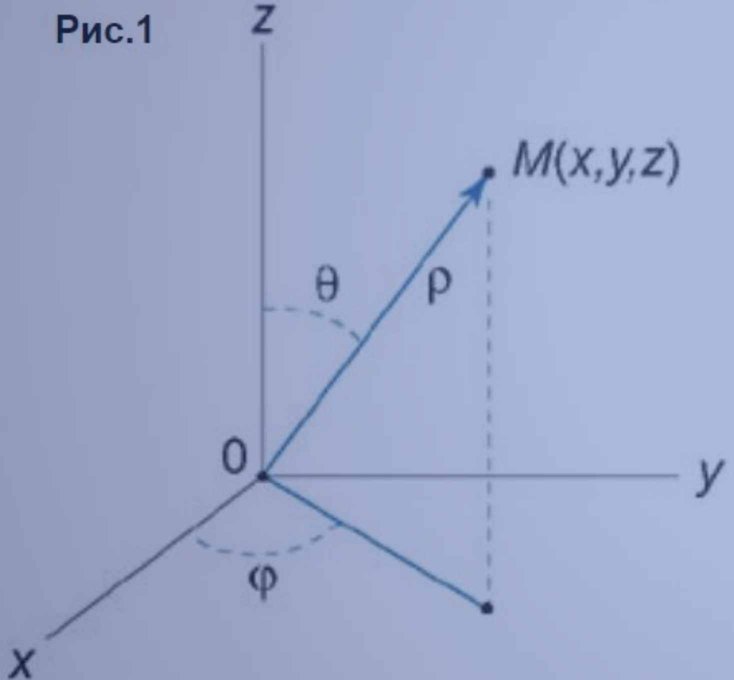
Сферическими координатами точки $M\,(x, y, z)$ называются три числа – ρ, φ, θ, где

ρ – длина радиуса-вектора точки M;

φ – угол, образованный проекцией радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость Oxy и осью Ox;

θ – угол отклонения радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ от положительного направления оси Oz (рисунок 1).

Рис.1



Обратите внимание, что определения ρ, φ в сферических и цилиндрических координатах отличаются друг от друга.

Сферические координаты точки связаны с ее декартовыми координатами соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = \rho\cos\theta,$$

где $\rho \geq 0,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi.$

Якобиан перехода от декартовых координат к сферическим имеет вид:

$$I(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по второму столбцу, получаем

$$I(\rho,\varphi,\theta) = \rho\sin\varphi\sin\theta \cdot \begin{vmatrix} \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} + \rho\cos\varphi\sin\theta \cdot \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \rho\sin\varphi\sin\theta\left(-\rho\sin\varphi\sin^2\theta - \rho\sin\varphi\cos^2\theta\right) + \rho\cos\varphi\sin\theta\left(-\rho\cos\varphi\sin^2\theta - \rho\cos\varphi\cos^2\theta\right)$$

$$= \rho\sin\varphi\sin\theta \cdot (-\rho\sin\varphi) \cdot 1 + \rho\cos\varphi\sin\theta \cdot (-\rho\cos\varphi) \cdot 1 = -\rho^2\sin\theta\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)$$

$$= -\rho^2\sin\theta.$$

Соответственно, абсолютное значение якобиана равно

$$|I(\rho,\varphi,\theta)| = \rho^2\sin\theta.$$

Следовательно, формула замены переменных при преобразовании декартовых координат в сферические имеет вид:

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{U'} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Тройной интеграл удобнее вычислять в сферических координатах, когда область интегрирования U представляет собой шар (или некоторую его часть) и/или когда подынтегральное выражение имеет вид $f\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Иногда выгодно использовать т.н. *обобщенные сферические координаты*, связанные с декартовыми формулами

$$x = a\rho\cos\varphi\sin\theta,\;\; y = b\rho\sin\varphi\sin\theta,\;\; z = c\rho\cos\theta.$$

В этом случае якобиан равен

$$I(\rho,\varphi,\theta) = -abc\rho^2\sin\theta.$$

Пример 1

Найти интеграл $\iiint\limits_U \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, где область интегрирования U − шар, заданный уравнением $x^2+y^2+z^2=25$.

Решение.

Поскольку область U представляет собой шар, и к тому же подынтегральное выражение является функцией, зависящей от $f\left(x^2+y^2+z^2\right)$, то перейдем к сферическим координатам. Сделаем замену:

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z=\rho\cos\theta,$$

Новые переменные изменяются в пределах: $0\le\rho\le5,\ \ 0\le\varphi\le2\pi,\ \ 0\le\theta\le\pi.$

Учитывая якобиан $\rho^2\sin\theta$, записываем интеграл в виде:

$$I=\iiint\limits_U\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz=\iiint\limits_{U'}\rho\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^5\rho^3d\rho\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^5\rho^3d\rho\left[\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}\right]=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^5\rho^3d\rho\left(-\cos\pi+\cos0\right)=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^5\rho^3d\rho$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot\left[\left(\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^5\right]=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot\frac{5^4}{4}=\frac{625}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{625}{2}\cdot2\pi=625\pi.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\iiint\limits_U e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz,$

где область U представляет собой единичный шар $x^2+y^2+z^2 \le 1.$

Решение.

Центр данного шара расположен в начале координат. Следовательно, в сферических координатах область интегрирования U описывается неравенствами $0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi.$

Записывая интеграл в сферических координатах, получаем

$$I = \iiint\limits_U e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz = \iiint\limits_{U'} e^{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \iiint\limits_{U'} e^{\rho^3}\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 e^{\rho^3}\rho^2 d\rho \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta.$$

Как видно, тройной интеграл вырождается в произведение трех однократных интегралов, каждый из которых вычисляется независимо. В результате находим

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 e^{\rho^3}\rho^2 d\rho \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \left[\varphi\Big|_0^{2\pi}\right] \cdot \int\limits_0^1 \left(e^{\rho^3} \cdot \frac{1}{3}d\rho^3\right) \cdot \left[(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3}\left[\left(e^{\rho^3}\right)\Big|_{\rho^3=0}^{\rho^3=1}\right] \cdot (-\cos\pi + \cos 0) = \frac{2\pi}{3} \cdot (e-1) \cdot 2 = \frac{4\pi}{3}(e-1).$$

Пример 3

Вычислить интеграл $\iiint\limits_U xyzdxdydz$, где область U представляет собой часть шара $x^2+y^2+z^2 \le R^2$,

расположенную в первом октанте $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

Решение.

Перейдем к сферическим координатам. Сделаем замену переменных:

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\;\; y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\;\; z=\rho\cos\theta,\;\; dxdydz=\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Новые переменные будут изменяться в пределах:

$$0\le\rho\le R,\;\; 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\;\; 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

Тогда интеграл в сферических координатах равен

$$I=\iiint\limits_U xyzdxdydz=\iiint\limits_{U'}\left[\rho\cos\varphi\sin\theta\cdot\rho\sin\varphi\sin\theta\cdot\rho\cos\theta\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta\right]$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^R\rho^5d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin2\varphi d\varphi\right)\int\limits_0^R\rho^5d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\varphi d\varphi\int\limits_0^R\rho^5d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\left(\sin\theta\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\varphi d\varphi\int\limits_0^R\rho^5d\rho\cdot\left[\left(\frac{\sin^4\theta}{4}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\varphi d\varphi\int\limits_0^R\rho^5d\rho\cdot\left(\sin^4\frac{\pi}{2}-\sin^40\right)=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\varphi d\varphi\int\limits_0^R\rho^5d\rho\cdot1$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\varphi d\varphi\cdot\left[\left(\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^R\right]=\frac{R^6}{48}\left[\left(-\frac{\cos2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{R^6}{96}(-\cos\pi+\cos0)=\frac{R^6}{96}\cdot2=\frac{R^6}{48}.$$

Пример 4

Найти тройной интеграл

$$\iiint\limits_U \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz,$$

где область U ограничена эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Решение.
Для вычисления интеграла перейдем к обобщенным сферическим координатам путем следующей замены переменных:

$$x = a\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = c\rho\cos\theta.$$

Модуль якобиана данного преобразования равен $|I| = abc\rho^2\sin\theta$. Поэтому для дифференциалов справедливо соотношение

$$dxdydz = abc\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

В новых координатах интеграл принимает вид:

$$I = \iiint\limits_{U} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{U'} \left[\frac{(a\rho\cos\varphi\sin\theta)^2}{a^2} + \frac{(b\rho\sin\varphi\sin\theta)^2}{b^2} + \frac{(c\rho\cos\theta)^2}{c^2} \right] abc\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \iiint\limits_{U'} \left[\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta \right] abc\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \iiint\limits_{U'} \left[\rho^2\sin^2\theta \underbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}_{1} + \rho^2\cos^2\theta \right] abc\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \iiint\limits_{U'} \rho^2 \underbrace{\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)}_{1} abc\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta = abc \iiint\limits_{U'} \rho^4\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Область интегрирования U' в сферических координатах представляет собой параллелепипед и определяется неравенствами

$$0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi.$$

Тогда тройной интеграл становится равным

$$I = abc \iiint\limits_{U'} \rho^4 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta = abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho \cdot \left[(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} \right]$$

$$= abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho \cdot (-\cos\pi + \cos 0) = 2abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho = 2abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\left(\frac{\rho^5}{5} \right)\Big|_0^1 \right]$$

$$= \frac{2abc}{5} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2abc}{5} \cdot \left[\varphi\Big|_0^{2\pi} \right] = \frac{2abc}{5} \cdot 2\pi = \frac{4abc\pi}{5}.$$

Пример 5

Вычислить интеграл $$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 dz,$$

используя сферические координаты.

Решение.

Область интегрирования представляет собой часть шара, расположенная в первом октанте (рисунки 2, 3) и, следовательно, ограничена неравенствами

$$0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

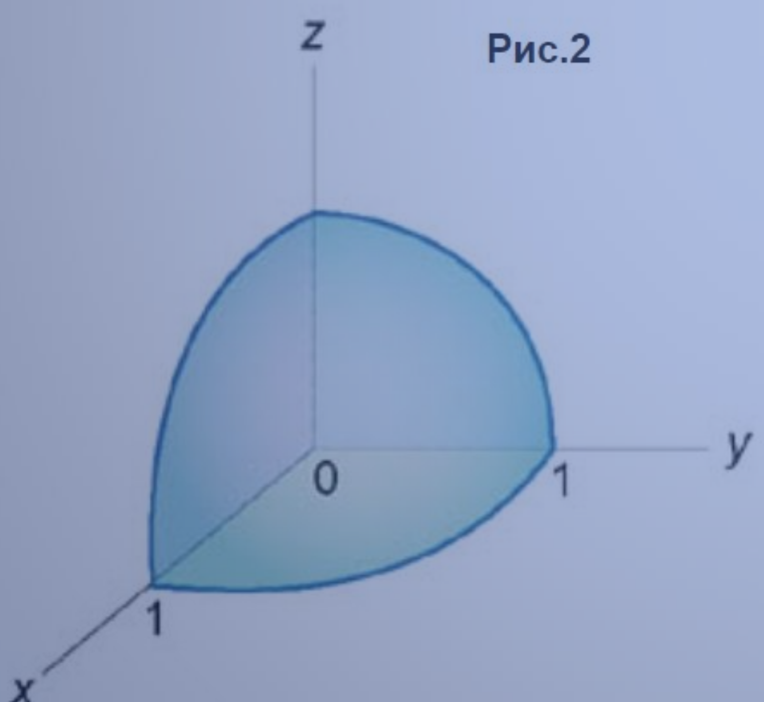


Рис.2

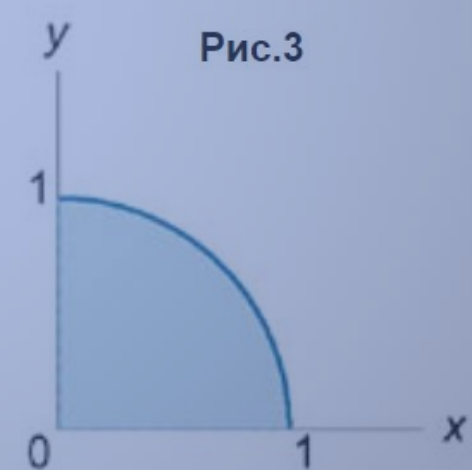


Рис.3

Учитывая, что подынтегральное выражение равно

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=\left[(\rho\cos\varphi\sin\theta)^2+(\rho\sin\varphi\sin\theta)^2+(\rho\cos\theta)^2\right]^2$$

$$=\left[\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta\right]^2=\left[\rho^2\sin^2\theta\underbrace{\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}_{1}+\rho^2\cos^2\theta\right]^2$$

$$=\left[\rho^2\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta\right]^2=\left[\rho^2\underbrace{\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)}_{1}\right]^2=\rho^4,$$

а дифференциалы связаны соотношениями $dxdydz=\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$, получаем

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho^4\cdot\rho^2d\rho\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\rho^6d\rho\cdot\left[\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\rho^6d\rho\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\rho^6d\rho\cdot 1$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cdot\left[\left(\frac{\rho^7}{7}\right)\Bigg|_0^1\right]=\frac{1}{7}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{7}\cdot\left[\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{1}{7}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{14}.$$