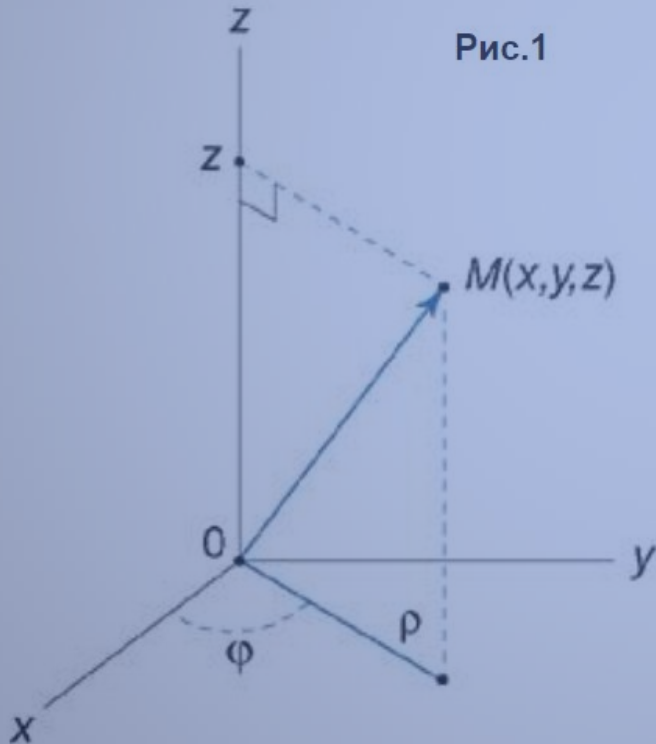


Тройные интегралы в цилиндрических координатах

В цилиндрических координатах положение точки $M(x, y, z)$ в пространстве $Oxyz$ определяется тремя числами – ρ, φ, z , где ρ – длина радиуса-вектора проекции точки M на плоскость Oxy , φ – угол, образованный этим радиусом-вектором с осью Ox (рисунок 1), z – проекция на ось Oz (ее значение одинаково в декартовых и цилиндрических координатах).



Цилиндрические координаты точки связаны с ее декартовыми координатами соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Здесь предполагается, что

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим равен

$$I(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \geq 0.$$

Тогда формула замены переменных при данном преобразовании имеет вид:

$$\iiint_U f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{U'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \, \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz.$$

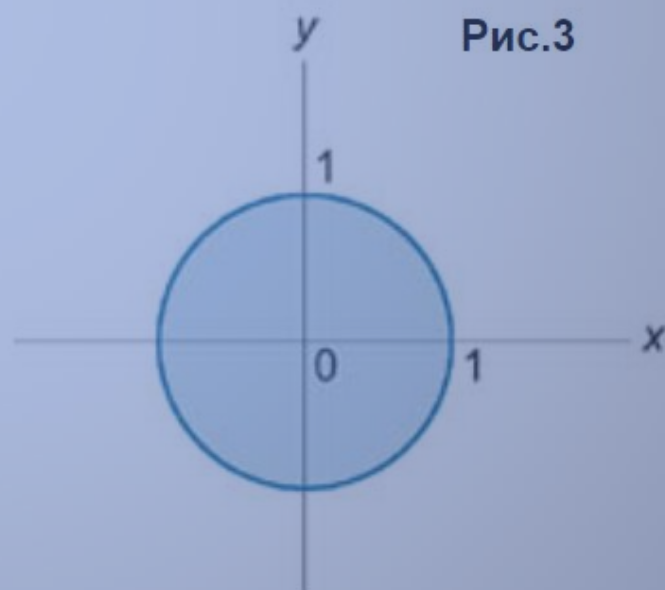
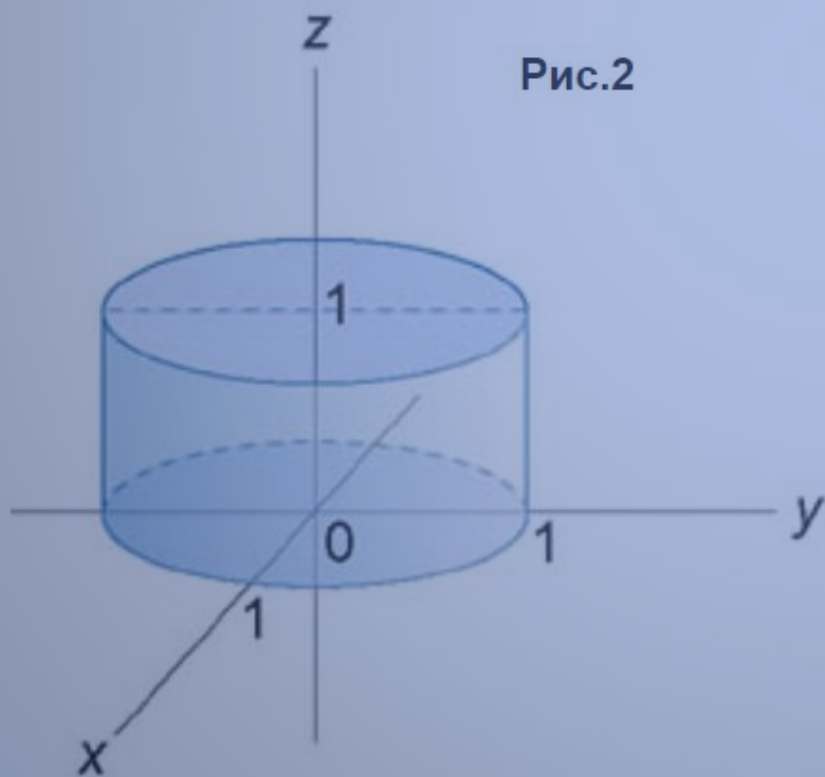
Переход к цилиндрическим координатам упрощает вычисление тройного интеграла в случаях, когда область интегрирования образована цилиндрической поверхностью.

Пример 1

Вычислить интеграл

$$\iiint_U (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dx dy dz,$$

где область U ограничена поверхностью $x^2 + y^2 \leq 1$ и плоскостями $z = 0, z = 1$ (рисунок 2).



Решение.

Данный интеграл удобно вычислить в цилиндрических координатах. Проекция области интегрирования на плоскость Oxy представляет собой круг $x^2 + y^2 \leq 1$ или $0 \leq \rho \leq 1$ (рисунок 3).

Заметим, что подынтегральное выражение записывается в виде

$$(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = (x^2 + y^2)^2 = (\rho^2)^2 = \rho^4.$$

Тогда интеграл будет равен

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 \rho d\rho \int_0^1 dz.$$

Здесь во втором интеграле добавлен множитель ρ – якобиан преобразования декартовых координат в цилиндрические. Все три интеграла по каждой из переменной не зависят друг от друга. В результате тройной интеграл легко вычисляется:

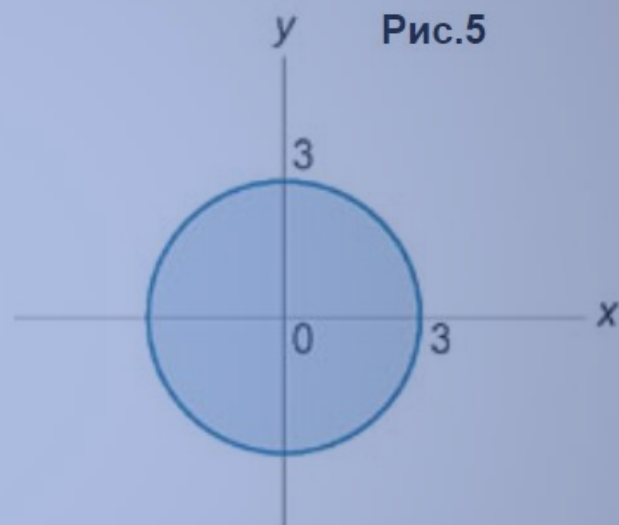
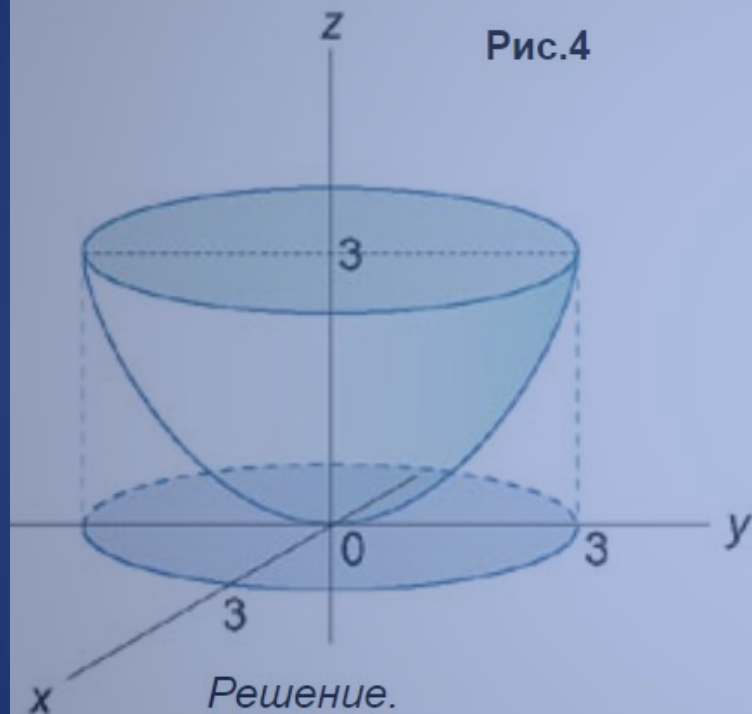
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 \rho d\rho \int_0^1 dz = 2\pi \int_0^1 \rho^5 d\rho \int_0^1 dz = 2\pi \cdot 1 \cdot \int_0^1 \rho^5 d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл

$$\iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

где область U ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 3z$, $z = 3$ (рисунок 4).



Решение.

Область интегрирования изображена на рисунке 4. Для вычисления интеграла перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Дифференциал при этом равен $dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$ (ρ – якобиан).

Уравнение параболической поверхности принимает вид:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 3z \quad \text{или} \quad \rho^2 = 3z.$$

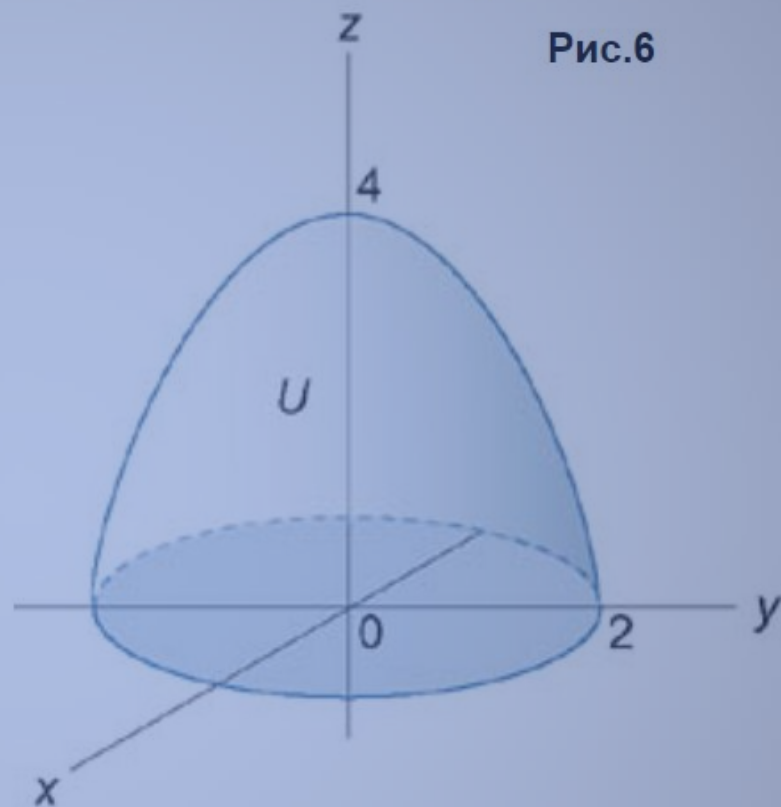
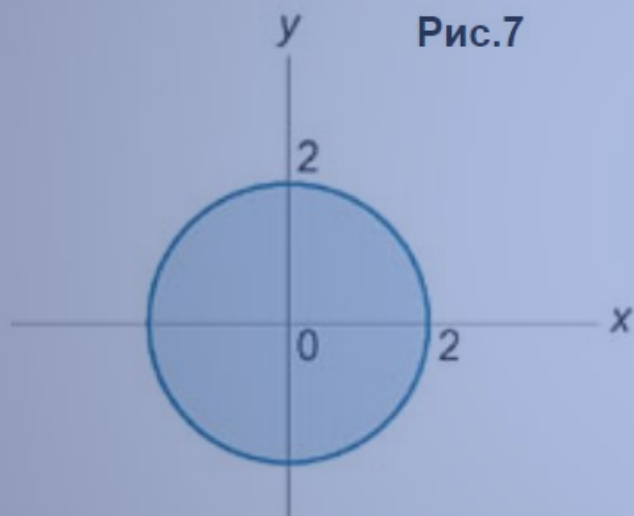
Проекция области интегрирования U на плоскость Oxy представляет собой окружность $x^2 + y^2 \leq 9$ радиусом $\rho = 3$ (рисунок 5). Координата ρ изменяется в пределах от 0 до 3, угол φ – от 0 до 2π и координата z – от $\frac{\rho^2}{3}$ до 3. В результате интеграл будет равен

$$\begin{aligned} I &= \iiint_U (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{U'} \rho^2 \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^3 \, d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^3 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^3 \, d\rho \cdot \left[z \Big|_{\frac{\rho^2}{3}}^3 \right] \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^3 \left(3 - \frac{\rho^2}{3} \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(3\rho^3 - \frac{\rho^5}{3} \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\left(\frac{3\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{18} \right) \Big|_0^3 \right] \\ &= \left(\frac{3 \cdot 81}{4} - \frac{729}{18} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{81}{4} \cdot 2\pi = \frac{81\pi}{2}. \end{aligned}$$

Пример 3

Используя цилиндрические координаты, найти значение интеграла

$$I = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{4-x^2-y^2} y^2 dz.$$



Решение.

Область интегрирования U изображена на рисунке 6. Ее проекция на плоскость Oxy представляет собой круг $x^2 + y^2 = 2^2$ (рисунок 7).

Новые переменные в цилиндрических координатах будут изменяться в пределах

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 4 - \rho^2.$$

Подставляя $x = \rho \cos \varphi$ и $y = \rho \sin \varphi$, найдем значение интеграла:

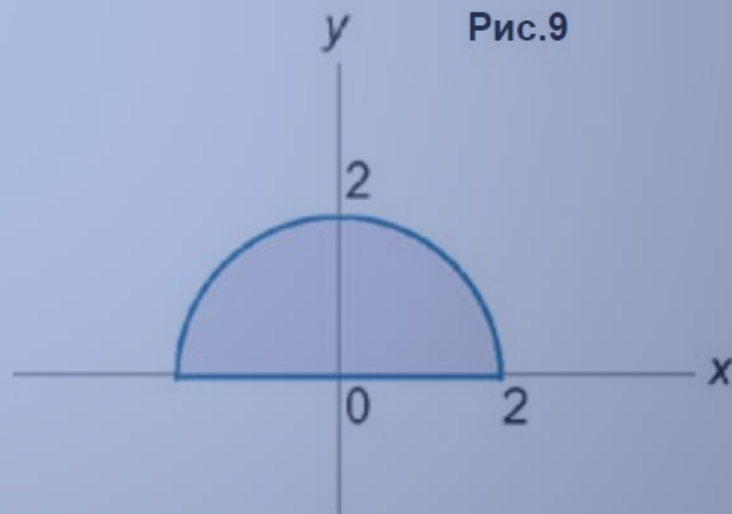
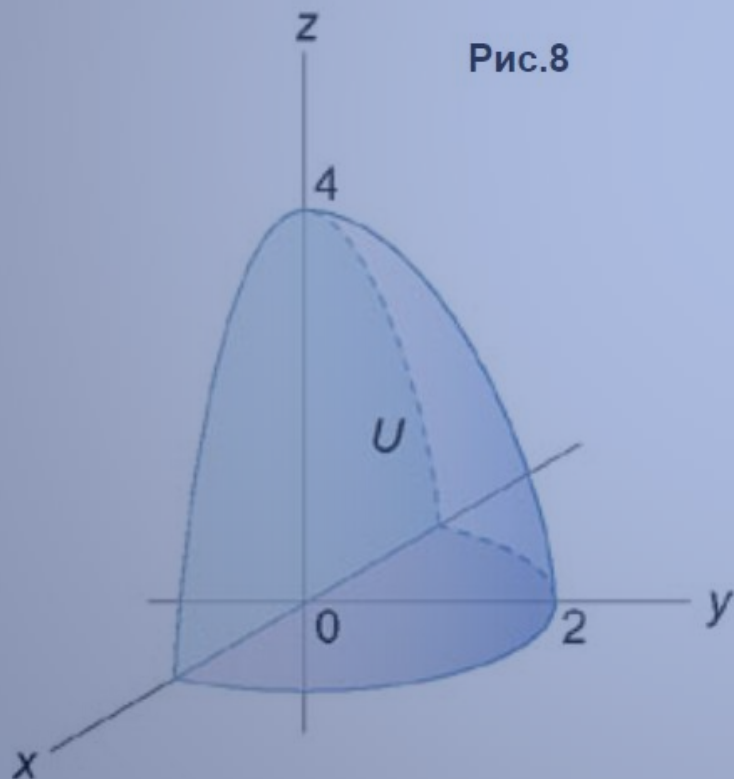
$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{4-x^2-y^2} y^2 dz = \iiint_U y^2 dx dy dz = \iiint_{U'} (\rho \sin \varphi)^2 \rho d\rho d\varphi dz = \iiint_{U'} \rho^3 \sin^2 \varphi d\rho d\varphi dz \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^3 (4 - \rho^2) d\rho = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^2 (4\rho^3 - \rho^5) d\rho = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \cdot \left[\left(\frac{4\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^2 \right] \\ &= \left(2^4 - \frac{2^6}{6} \right) \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \\ &= \frac{8}{3} \left[\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \right] = \frac{8}{3} \cdot 2\pi = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

Пример 4

Вычислить интеграл, используя цилиндрические координаты:

$$\iiint_U \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

Область U ограничена параболоидом $z = 4 - x^2 - y^2$, цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$ (рисунок 8).



Решение.

Изобразив схематически область интегрирования U , находим, что ее проекция на плоскость Oxy (область D) представляет собой полукруг радиусом $\rho = 2$ (рисунок 9).

Перейдем к цилиндрическим координатам, применяя подстановки

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz.$$

Новые переменные будут изменяться в пределах

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq 4 - \rho^2.$$

Теперь вычисляем интеграл:

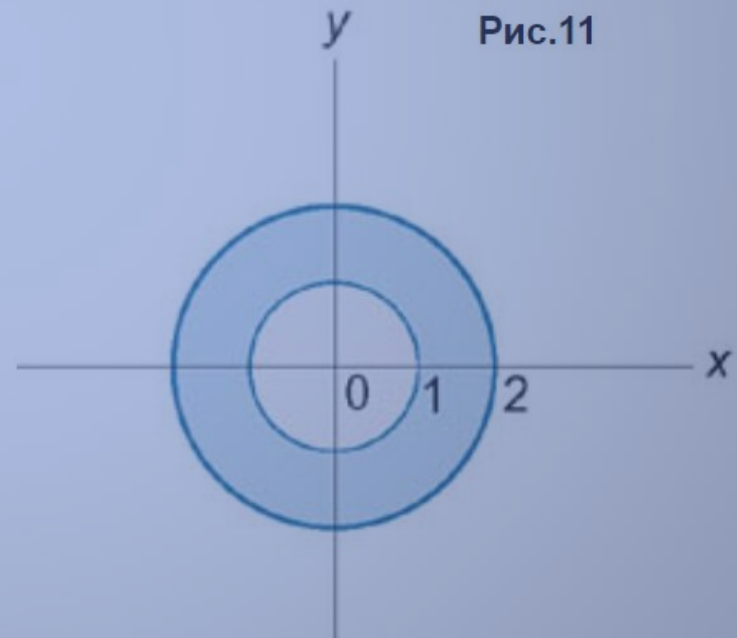
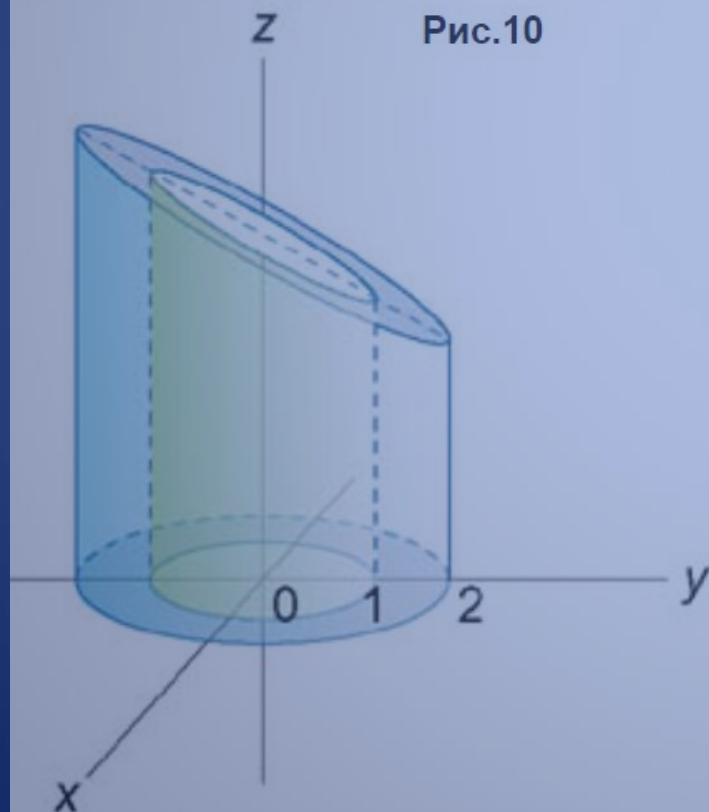
$$\begin{aligned} I &= \iiint_U \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \iiint_{U'} \rho \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \iiint_{U'} \rho^2 d\rho d\varphi dz = \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_0^{4-\rho^2} dz \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho \cdot \left[z \Big|_0^{4-\rho^2} \right] = \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 \rho^2 (4 - \rho^2) d\rho = \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 (4\rho^2 - \rho^4) d\rho \\ &= \int_0^\pi d\varphi \left[\left(\frac{4\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^2 \right] = \left(\frac{4}{3} \cdot 2^3 - \frac{2^5}{5} \right) \int_0^\pi d\varphi = \frac{64}{15} \int_0^\pi d\varphi = \frac{64}{15} \cdot [\varphi]_0^\pi = \frac{64\pi}{15}. \end{aligned}$$

Пример 5

Найти интеграл

$$\iiint_U y dx dy dz,$$

где область U ограничена плоскостями $z = x + 1$, $z = 0$ и цилиндрическими поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ (рисунок 10).



Решение.

Вычислим данный интеграл в цилиндрических координатах. Из условия

$$0 \leq z \leq x + 1$$

следует, что

$$0 \leq z \leq \rho \cos \varphi + 1.$$

Область интегрирования в плоскости Oxy представляет собой кольцо, ограниченное окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$ (рисунок 11). Следовательно, переменные ρ и φ изменяются в интервале

$$1 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Находим интеграл:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_U y dx dy dz = \iiint_{U'} \rho \sin \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \iiint_{U'} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_0^{\rho \cos \varphi + 1} dz \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho \cdot \left[z \Big|_0^{\rho \cos \varphi + 1} \right] = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^2 (\rho \cos \varphi + 1) d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^2 (\rho^3 \cos \varphi + \rho^2) d\rho = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \cdot \left[\left(\frac{\rho^4}{4} \cos \varphi + \frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_{\rho=1}^{\rho=2} \right] \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \varphi \left[\left(4 \cos \varphi + \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{\cos \varphi}{4} + \frac{1}{3} \right) \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi \left(\frac{15}{4} \cos \varphi + \frac{7}{3} \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{15}{4} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{7}{3} \sin \varphi \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{15}{8} \sin 2\varphi + \frac{7}{3} \sin \varphi \right) d\varphi \\ &= \left(-\frac{15}{16} \cos 2\varphi - \frac{7}{3} \cos \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Этот результат закономерен, поскольку область U симметрична относительно плоскости Oxz , а подынтегральная функция является четной.

Тройные интегралы в сферических координатах

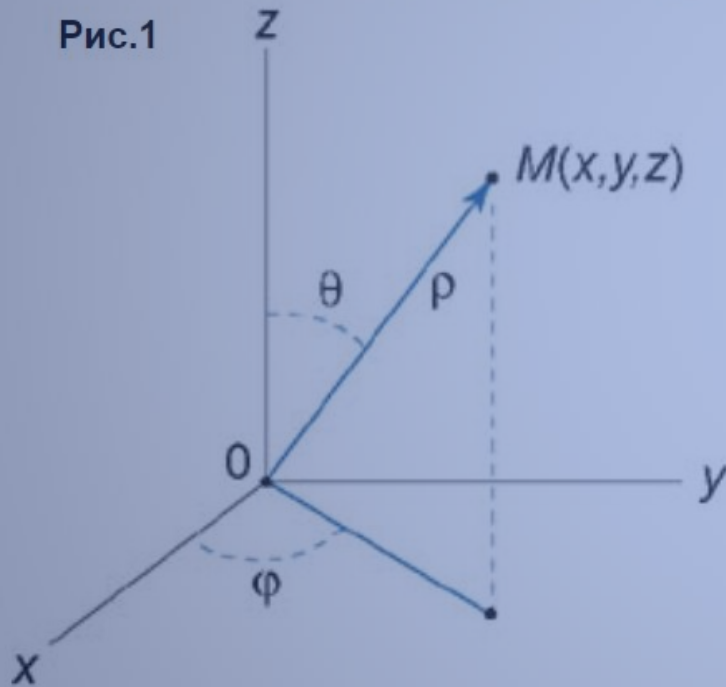
Сферическими координатами точки $M(x, y, z)$ называются три числа – ρ, φ, θ , где

ρ – длина радиуса-вектора точки M ;

φ – угол, образованный проекцией радиуса-вектора \overrightarrow{OM} на плоскость Oxy и осью Ox ;

θ – угол отклонения радиуса-вектора \overrightarrow{OM} от положительного направления оси Oz (рисунок 1).

Рис.1



Обратите внимание, что определения ρ, φ в сферических и цилиндрических координатах отличаются друг от друга.

Сферические координаты точки связаны с ее декартовыми координатами соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta,$$

где $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$.

Якобиан перехода от декартовых координат к сферическим имеет вид:

$$I(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\rho \sin \theta \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по второму столбцу, получаем

$$\begin{aligned} I(\rho, \varphi, \theta) &= \rho \sin \varphi \sin \theta \cdot \begin{vmatrix} \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta \end{vmatrix} + \rho \cos \varphi \sin \theta \cdot \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta \end{vmatrix} \\ &= \rho \sin \varphi \sin \theta (-\rho \sin \varphi \sin^2 \theta - \rho \sin \varphi \cos^2 \theta) + \rho \cos \varphi \sin \theta (-\rho \cos \varphi \sin^2 \theta - \rho \cos \varphi \cos^2 \theta) \\ &= \rho \sin \varphi \sin \theta \cdot (-\rho \sin \varphi) \cdot 1 + \rho \cos \varphi \sin \theta \cdot (-\rho \cos \varphi) \cdot 1 = -\rho^2 \sin \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \\ &= -\rho^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Соответственно, абсолютное значение якобиана равно

$$|I(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \sin \theta.$$

Следовательно, формула замены переменных при преобразовании декартовых координат в сферические имеет вид:

$$\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{U'} f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Тройной интеграл удобнее вычислять в сферических координатах, когда область интегрирования U представляет собой шар (или некоторую его часть) и/или когда подынтегральное выражение имеет вид $f(x^2 + y^2 + z^2)$.

Иногда выгодно использовать т.н. *обобщенные сферические координаты*, связанные с декартовыми формулами

$$x = a\rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = b\rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c\rho \cos \theta.$$

В этом случае якобиан равен

$$I(\rho, \varphi, \theta) = -abc\rho^2 \sin \theta.$$

Пример 1

Найти интеграл $\iiint_U \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, где область интегрирования U – шар, заданный уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Решение.

Поскольку область U представляет собой шар, и к тому же подынтегральное выражение является функцией, зависящей от $f(x^2 + y^2 + z^2)$, то перейдем к сферическим координатам. Сделаем замену:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta,$$

Новые переменные изменяются в пределах: $0 \leq \rho \leq 5, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$.

Учитывая якобиан $\rho^2 \sin \theta$, записываем интеграл в виде:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_U \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \iiint_{U'} \rho \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 d\rho [(-\cos \theta)|_0^\pi] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 d\rho (-\cos \pi + \cos 0) = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 d\rho \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\left(\frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^5 \right] = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{5^4}{4} = \frac{625}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{625}{2} \cdot 2\pi = 625\pi. \end{aligned}$$

Пример 2

Вычислить интеграл
$$\iiint_U e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz,$$

где область U представляет собой единичный шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Решение.

Центр данного шара расположен в начале координат. Следовательно, в сферических координатах область интегрирования U описывается неравенствами $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Записывая интеграл в сферических координатах, получаем

$$\begin{aligned} I &= \iiint_U e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz = \iiint_{U'} e^{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \iiint_{U'} e^{\rho^3} \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Как видно, тройной интеграл вырождается в произведение трех однократных интегралов, каждый из которых вычисляется независимо. В результате находим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \left[\varphi \Big|_0^{2\pi} \right] \cdot \int_0^1 \left(e^{\rho^3} \cdot \frac{1}{3} d\rho^3 \right) \cdot \left[(-\cos \theta) \Big|_0^\pi \right] \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{3} \left[\left(e^{\rho^3} \right) \Big|_{\rho^3=0}^{\rho^3=1} \right] \cdot (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2\pi}{3} \cdot (e - 1) \cdot 2 = \frac{4\pi}{3} (e - 1). \end{aligned}$$

Пример 3

Вычислить интеграл $\iiint_U xyz dx dy dz$, где область U представляет собой часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, расположенную в первом октанте $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Решение.

Перейдем к сферическим координатам. Сделаем замену переменных:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta, \quad dx dy dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Новые переменные будут изменяться в пределах:

$$0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тогда интеграл в сферических координатах равен

$$\begin{aligned} I &= \iiint_U xyz dx dy dz = \iiint_{U'} [\rho \cos \varphi \sin \theta \cdot \rho \sin \varphi \sin \theta \cdot \rho \cos \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^5 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi d\varphi \right) \int_0^R \rho^5 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^R \rho^5 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d(\sin \theta) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^R \rho^5 d\rho \cdot \left[\left(\frac{\sin^4 \theta}{4} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^R \rho^5 d\rho \cdot (\sin^4 \frac{\pi}{2} - \sin^4 0) = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^R \rho^5 d\rho \cdot 1 \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \cdot \left[\left(\frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^R \right] = \frac{R^6}{48} \left[\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{R^6}{96} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{R^6}{96} \cdot 2 = \frac{R^6}{48}. \end{aligned}$$

Пример 4

Найти тройной интеграл

$$\iiint_U \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz,$$

где область U ограничена эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение.

Для вычисления интеграла перейдем к обобщенным сферическим координатам путем следующей замены переменных:

$$x = a\rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = b\rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c\rho \cos \theta.$$

Модуль якобиана данного преобразования равен $|I| = abc\rho^2 \sin \theta$.

Поэтому для дифференциалов справедливо соотношение

$$dx dy dz = abc\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

В новых координатах интеграл принимает вид:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_U \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz \\ &= \iiint_{U'} \left[\frac{(a\rho \cos \varphi \sin \theta)^2}{a^2} + \frac{(b\rho \sin \varphi \sin \theta)^2}{b^2} + \frac{(c\rho \cos \theta)^2}{c^2} \right] abc\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \\ &= \iiint_{U'} [\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta] abc\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \\ &= \iiint_{U'} \left[\rho^2 \sin^2 \theta \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 + \rho^2 \cos^2 \theta \right] abc\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \\ &= \iiint_{U'} \rho^2 \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 abc\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = abc \iiint_{U'} \rho^4 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Область интегрирования U' в сферических координатах представляет собой параллелепипед и определяется неравенствами

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Тогда тройной интеграл становится равным

$$\begin{aligned} I &= abc \iiint_{U'} \rho^4 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho \cdot [(-\cos \theta)|_0^\pi] \\ &= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho \cdot (-\cos \pi + \cos 0) = 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho = 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\left(\frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{2abc}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2abc}{5} \cdot [\varphi|_0^{2\pi}] = \frac{2abc}{5} \cdot 2\pi = \frac{4abc\pi}{5}. \end{aligned}$$

Пример 5

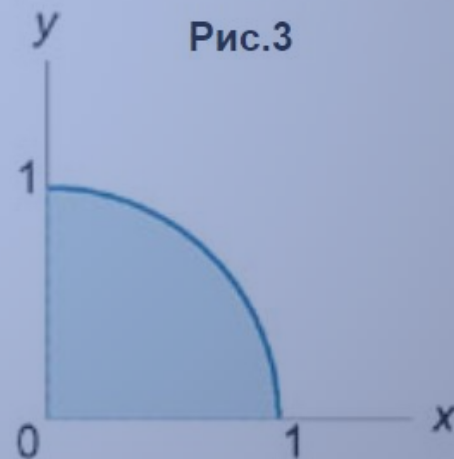
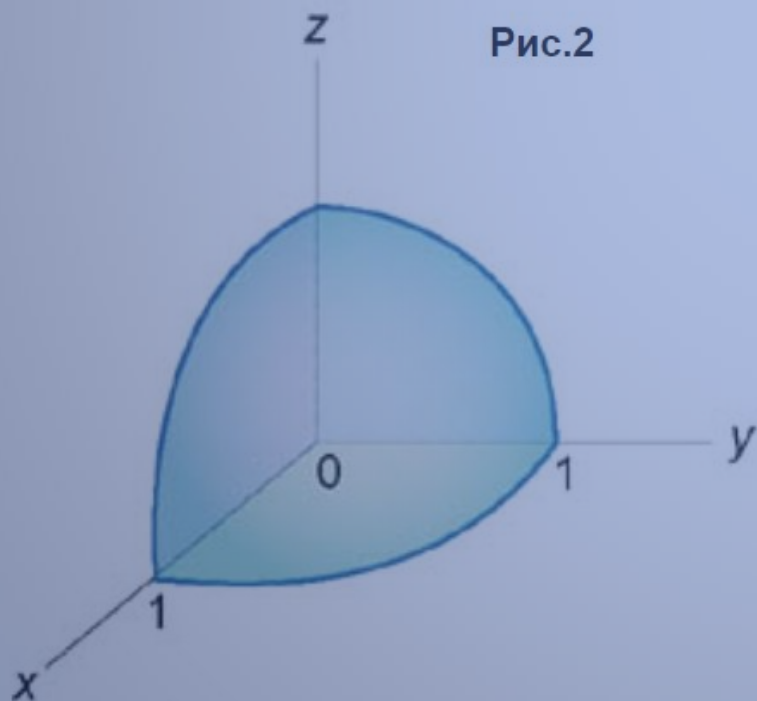
Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^2 dz,$

используя сферические координаты.

Решение.

Область интегрирования представляет собой часть шара, расположенная в первом октанте (рисунки 2, 3) и, следовательно, ограничена неравенствами

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$



Учитывая, что подынтегральное выражение равно

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + z^2)^2 &= \left[(\rho \cos \varphi \sin \theta)^2 + (\rho \sin \varphi \sin \theta)^2 + (\rho \cos \theta)^2 \right]^2 \\ &= \left[\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta \right]^2 = \left[\rho^2 \sin^2 \theta \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 + \rho^2 \cos^2 \theta \right]^2 \\ &= \left[\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta \right]^2 = \left[\rho^2 \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 \right]^2 = \rho^4,\end{aligned}$$

а дифференциалы связаны соотношениями $dx dy dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$, получаем

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (\rho^4 \cdot \rho^2 d\rho) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^6 d\rho \cdot \left[(-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^6 d\rho \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^6 d\rho \cdot 1 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \left[\left(\frac{\rho^7}{7} \right) \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{7} \cdot \left[\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{1}{7} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{14}.\end{aligned}$$

