3. Системы линейных уравнений СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \ldots & +a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \ldots & +a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots & .. & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & \ldots & +a_{nm}\,x_m = b_n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & .. & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad n \times m \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad m \times 1 \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad n \times 1$$

3.1. Решение квадратных систем линейных уравнений ($n=m$, $\det A <> 0$).

3.1.1. С помощью обратной матрицы

$$\boxed{AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B}$$

3.1.2. Метод Крамера

Из предыдущего имеем: $X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & .. & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$x_i = \frac{1}{\det A}\left(b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \dots + b_n A_{ni}\right) =$$

$$= \frac{1}{\det A}\left((-1)^{1+i} b_1 M_{1i} + (-1)^{2+i} b_2 M_{2i} + \dots + (-1)^{n+i} b_n M_{ni}\right) =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_i}{\det A}$$

i

$$\boxed{AX = B \quad \Rightarrow \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}, \qquad i = \overline{1, n}}$$

3.1.3. Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \Leftrightarrow (A|B) \text{ – расширенная матрица}$$

$$\overset{a_1 : a_{11}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}/a_{11} & \dots & a_{1n}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \underset{i=\overline{2,n}}{\overset{a_i - a_{i1}\cdot a_1}{\approx}}$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}/a_{11} & \dots & a_{1n}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{array}\right) \overset{a_2 : \tilde{a}_{22}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}/a_{11} & \dots & a_{1n}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2n}/\tilde{a}_{22} & \tilde{b}_2/\tilde{a}_{22} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{array}\right) \underset{i=\overline{1,n};\ i\neq 2}{\overset{a_i - \tilde{a}_{i2}\cdot a_2}{\approx}}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \tilde{a}_{13} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \tilde{a}_{23} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \dots & \tilde{a}_{3n} & \tilde{b}_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{n3} & \dots & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{array}\right) \dots \approx \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_n \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 \\ x_2 = \tilde{b}_2 \\ \dots \\ x_n = \tilde{b}_n \end{cases}$$

Последовательно исключаем переменные, используя **элементарные преобразования**, пока не приведем матрицу А к диагональному виду

Пример

$$\begin{cases} 2x & -3y & +4z = 0 \\ 5x & & +6z = 7 \\ & 8y & -9z = 10 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -9 & 10 \end{array}\right)$$

1й способ $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 160 - 96 - 135 = -71$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = -48 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{31} = +\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -18$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 45 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -18 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16 \; A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 15$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{48}{71} & \frac{-5}{71} & \frac{18}{71} \\ \frac{-45}{71} & \frac{18}{71} & \frac{-8}{71} \\ \frac{-40}{71} & \frac{16}{71} & \frac{-15}{71} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{48}{71} & \frac{-5}{71} & \frac{18}{71} \\ \frac{-45}{71} & \frac{18}{71} & \frac{-8}{71} \\ \frac{-40}{71} & \frac{16}{71} & \frac{-15}{71} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-35+180}{71} \\ \frac{126-80}{71} \\ \frac{112-150}{71} \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} \frac{145}{71} \\ \frac{46}{71} \\ \frac{-38}{71} \end{pmatrix}}$$

Пример (метод Крамера)

$$\begin{cases} 2x & -3y & +4z = 0 \\ 5x & & +6z = 7 \\ & 8y & -9z = 10 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -9 & 10 \end{array}\right)$$

$$2й \quad способ \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 160 - 96 - 135 = -71$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 7 & 0 & 6 \\ 10 & 8 & -9 \end{vmatrix} = -180 + 224 - 189 = -145 \quad \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-145}{-71}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \\ 0 & 10 & -9 \end{vmatrix} = -126 + 200 - 120 = -46 \quad \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-46}{-71}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \frac{145}{71} \\ \frac{46}{71} \\ \frac{-38}{71} \end{pmatrix}}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -112 + 150 = 38 \quad \Rightarrow z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{38}{-71}$$

Пример (метод Гаусса)

3й способ

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 5x + 6z = 7 \\ 8y - 9z = 10 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -9 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow a_1 : 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -9 & 10 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow a_2 - 5a_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} & -4 & 7 \\ 0 & 8 & -9 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow a_2 : \frac{15}{2} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{15} & \frac{14}{15} \\ 0 & 8 & -9 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 + \frac{3}{2} a_2 \\ a_3 - 8a_2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 - \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{18}{15} & \frac{14}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{15} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{15} & \frac{14}{15} \\ 0 & 0 & -9 + \frac{64}{15} = -\frac{71}{15} & 10 - 8 \cdot \frac{14}{15} = -\frac{38}{15} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow a_3 : \left(\frac{-71}{15}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{18}{15} & \frac{21}{15} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{15} & \frac{14}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{38}{71} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 - \frac{18}{15} a_3 \\ a_2 + \frac{8}{15} a_3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{15} + \frac{18}{15} \cdot \frac{38}{71} = \frac{145}{71} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{15} - \frac{8}{15} \cdot \frac{38}{71} = \frac{46}{71} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{38}{71} \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \frac{145}{71} \\ \frac{46}{71} \\ \frac{-38}{71} \end{pmatrix}}$$

4. Исследование системы линейных уравнений

4.1. Виды систем линейных уравнений.

$$AX = B, \quad A - n \times m, \quad X - m \times 1, \quad B - n \times 1$$

Однородная система ЛУ: $AX = 0$

Решение системы — любой вектор-столбец X, для которого выполняется равенство AX=B.

Совместная система ЛУ: X *существует*

Определенная система ЛУ: X *единственное*

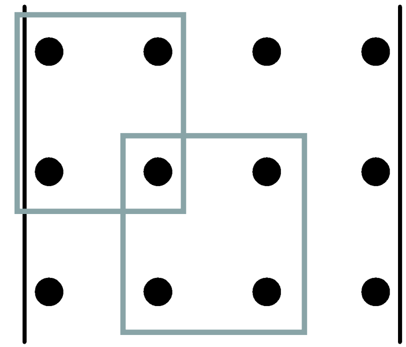
Как определить <= Теорема Кронекера-Капелли

но сначала…

4.2. Ранг матрицы

Минор *k*-го порядка матрицы A

Пример:



<u>Определение</u>. Рангом матрицы называется наивысший порядок минора, отличного от нуля.

<u>Обозначения</u>. r_A, $r(A)$, rang A, Rg A.

<u>Теорема</u>. Ранги эквивалентных матриц равны, т.е. элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Линейная комбинация объектов $a_1, a_2, ..., a_n$

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n, \quad \lambda_i \in R$$

Объекты **линейно зависимы**, если существует их нетривиальная линейная комбинация равная нулю:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = 0, \quad \textit{не все } \lambda_i = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

строки линейно зависимы

$$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0$$

<u>Теорема</u>. Ранг матрицы равен наибольшему числу её линейно независимых строк или столбцов.

$r(A)=\min\{k, l\}$, *где*

k — максимальное число линейно независимых строк A,

l — максимальное число линейно независимых столбцов A.

Следствия для квадратной матрицы.

1. Если определитель квадратной матрицы равен нулю, то её строки (или столбцы) линейно зависимы.
2. Если строки (или столбцы) квадратной матрицы линейно зависимы, то её определитель равен нулю.

Способы вычисления ранга матрицы.

1. Метод окаймляющих миноров.
2. Метод элементарных преобразований.

Метод элементарных преобразований.

1. С помощью элементарных преобразований получить в левом верхней углу единичную (или треугольную) матрицу.
2. Нулевые строки переставлять вниз, а нулевые столбцы - вправо.
3. Ранг матрицы равен порядку полученной единичной или треугольной матрицы.

Пример:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 4\\ 2 & 5 & 3 & 2\\ 4 & 11 & 9 & -2\end{pmatrix}\ \begin{matrix}a^3:3\\ a^4:2\\ \Leftrightarrow\end{matrix}\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\ 2 & 5 & 1 & 1\\ 4 & 11 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}a_2-2a_1\\ a_4-4a_1\\ \Leftrightarrow\end{matrix}\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 3 & 3 & -9\end{pmatrix}\ \begin{matrix}a_1-2a_2\\ a_3-3a_1\\ \Leftrightarrow\end{matrix}\ \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 8\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

4.3. Теорема Кронекера-Капелли

Пусть $AX=B$ некоторая СЛУ, *A-nxm* тогда

1) Если r(A)=r(A|B), то система совместная

Нет строк типа 0=5

1а) Если r(A)=r(A|B)=m, то система совместная и определенная

Сколько неизвестных, столько и разных уравнений => решение единственное

1б) Если r(A)=r(A|B)<m, то с-ма совместная и неопределенная

Неизвестных больше, чем уравнений => решение общее, зависит от С

2) Если r(A)<r(A|B), то система несовместная

ЕСТЬ строки типа 0=5

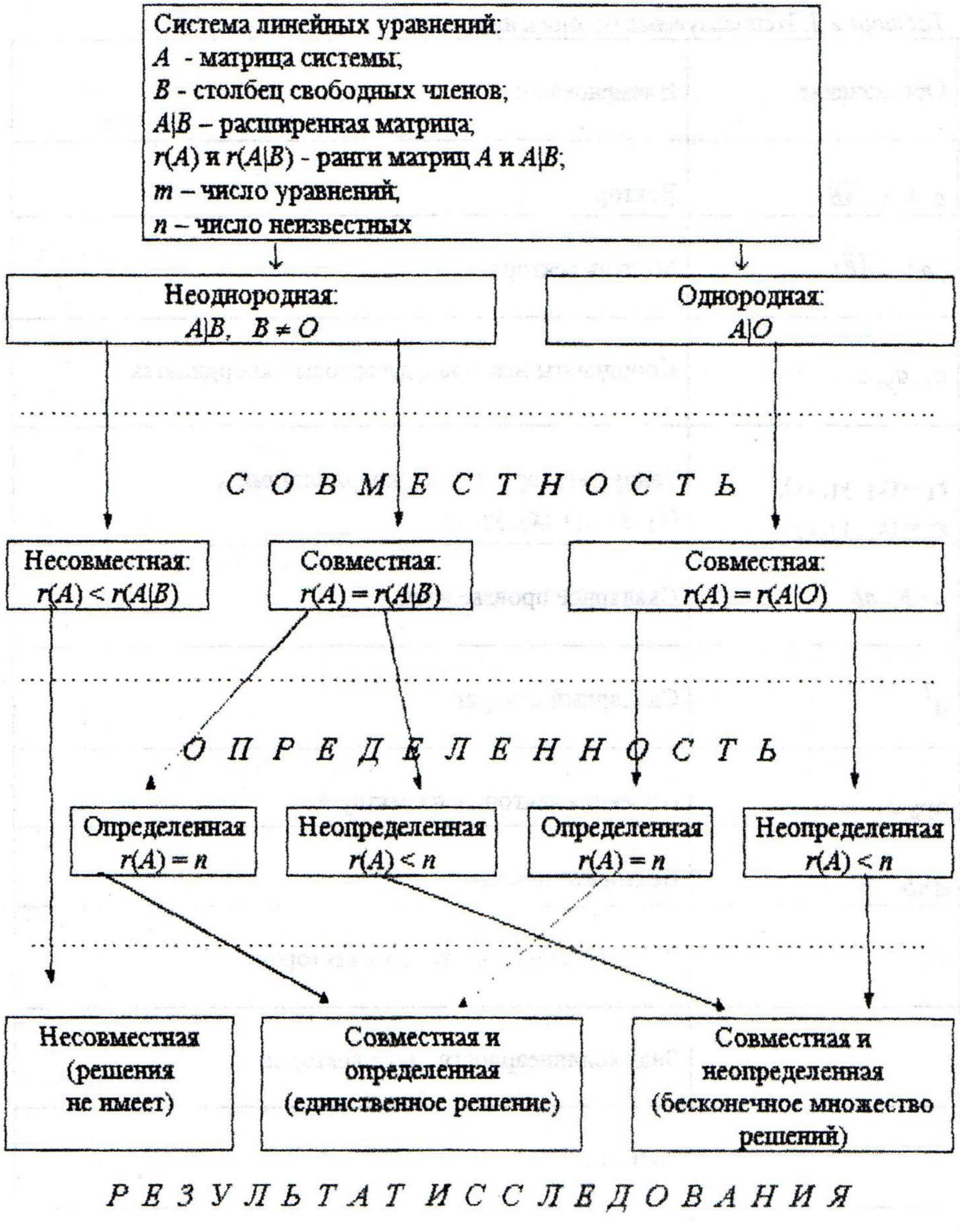
Замечания об однородной системе $AX = 0$.

1. Она всегда совместна (всегда есть нулевое решение).
2. Нулевое решение существует, только если $r(A) < n$, или $\det A = 0$.

Порядок исследования системы линейных уравнений.

1. Исследование совместности:
   (а) однородная - неоднородная?
   (б) теорема Кронекера-Капелли.
2. Исследование неопределённости:
   (а) $r(A) = n$?

Схема исследования системы линейных уравнений



Пример

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ 4x + 4y + 4z = 20 \end{cases}$$

Проверяем на совместность. Если совместна, то решаем

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 20 \end{array}\right| \overset{a_4/4}{\Leftrightarrow} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right| \overset{\substack{a_2 - 2a_1 \\ a_3 - a_1}}{\Leftrightarrow} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$r(A) = 2$, $r(A|B) = 3$, $r(A) \neq r(A|B)$ => система несовместна и решения не имеет.

Ещё пример

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ 4x + 4y = 20 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & 0 & 20 \end{array}\right| \overset{a_4/4}{\Leftrightarrow} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right| \overset{\substack{a_2 - 2a_1 \\ a_3 - a_1}}{\Leftrightarrow} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right|$$

$r(A) = 3$, $r(A|B) = 3$, $n = 3$ => система совместная и определённая. Продолжаем…

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1/3 & 10/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 10/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

(2; 3; -1)

И ещё пример

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 4 \\ 2x & -y & +3z & = & -2 \\ 3x & & +4z & = & 2 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & -10 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$r(A) = 2$, $r(A|B) = 2$, $n = 3$ => система совместная и неопределённая. Продолжаем…

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1/3 & 10/3 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 10/3 \end{array}\right|$$

$x = 2/3-4/3z$, $y = 10/3+1/3z$