Абсолютная и относительная погрешность округления

Для оценки погрешности вводятся понятия абсолютной и относительной погрешности.

Пусть x — точное значение некоторой величины (нам оно неизвестно и никогда не будет известно, поскольку определяется с помощью измерений, страдающих неточностями); a — приближенное значение той же величины ($a \approx x$). Абсолютная погрешность приближенного числа a определяется как $\Delta_a = |x - a|$. Но поскольку x неизвестно, то и абсолютную погрешность мы узнать не можем! Чтобы разрешить парадокс, вводят предельную абсолютную погрешность Δ_a^* — такое значение, которое абсолютная погрешность заведомо не превзойдет при данном способе измерений

$$|x - a| \le \Delta_a^* \quad x = a \pm \Delta_a^*,$$

Δ_a^* называется допусками. Никакое изделие не может быть изготовлено с абсолютно точным соблюдением номинальных размеров, допуски показывают возможные (допустимые) отклонения от номинала.

Итак, абсолютная погрешность оценивает точность измерений, но эта оценка неполна, поскольку не учитывает характерный размер изучаемого явления (объекта). Так, например, абсолютная погрешность в 1 см при измерении длины комнаты — вероятно, вполне приемлемая точность, но при измерении роста человека эта же погрешность будет сочтена непозволительно грубой.

Более информативным показателем качества измерений является относительная погрешность δ_a (соответственно предельная относительная погрешность δ_a^*) приближенного числа a как отношение абсолютной погрешности (предельной абсолютной погрешности) к модулю числа a

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}, \quad \delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|}.$$

Относительная погрешность является величиной безразмерной, т. е. не зависит от выбора системы единиц измерения, что позволяет сравнивать качество измерений разнородных величин (бессмысленным является вопрос о том, что больше: 1 кг или 1 м, — но сравнение качества измерений массы и длины в терминах относительной погрешности вполне допустимо). Измеряется δ_a (δ_a^*) в долях единицы или в процентах.

Пример. Согласно ныне действующим (2015 г.) определениям международного Комитета по константам для науки и технологии входящая в закон всемирного тяготения гравитационная постоянная

$$\gamma = \left(6.67259 \pm 0.00085\right) \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2},$$

а заряд электрона

$$e = \left(1.602\,17733 \pm 0.000\,00049\right) \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

Сравнить точность определения этих фундаментальных физических постоянных.

Решение. Для гравитационной постоянной предельная относительная погрешность

$$\delta_\gamma^* = \frac{0.00085}{6.67259} = 1.27 \cdot 10^{-4},$$

а для заряда электрона

$$\delta_e^* = \frac{0.000\,00049}{1.602\,17733} = 3.1 \cdot 10^{-7}.$$

Таким образом, в последнем случае относительная погрешность оказывается на три порядка меньшей, т. е. заряд электрона определен существенно *точнее*, чем гравитационная постоянная.

A – точное число
a –приближенное число
Δa - абсолютная погрешность приближенного числа a:
$\Delta a = |A - a|$

Определение.
Предельной **абсолютной погрешностью** называется число Δa, такое что $|A – a| \leq \Delta a$.

$$A = a \pm \Delta a$$

Точное число А находится в границах между $a - \Delta a$ и $a + \Delta a$

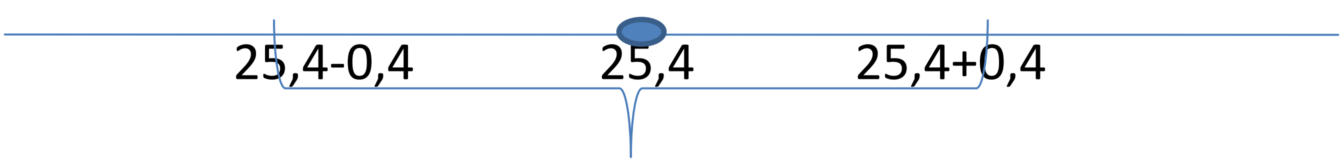
Например, A = 25,4; a = 25 то

$$\Delta a = |A-a| = |25{,}4 – 25| = 0{,}4$$

$$25{,}4 - 0{,}4 < 25{,}4 < 25{,}4 + 0{,}4$$

$$25 < \pm{,}4 < 25{,}8$$

$$A = 25{,}4 \quad 0{,}4$$



Пример.

Укажите абсолютную погрешность для приближенных чисел: $a = 8{,}6$; $b = 8{,}60$; $c = 3200$; $d = 3{,}2 \cdot 10^{n}$

Решение:

$\Delta a \leq 0{,}1$

$\Delta b \leq 0{,}01$

$\Delta c \leq 1$

$\Delta d \leq 0{,}1 \cdot 10^{3} = 100$

Определение.
Относительной погрешностью приближенного числа называется отношение абсолютной погрешности приближенного числа Δa на приближенное число а

Относительная погрешность $\delta = \frac{\Delta a}{a}$

Относительная погрешность записывается в процентах: $\delta = \frac{0,4}{25} = 0,016 = 1,6\%$

Пример.

Угол $\alpha = 22^0 20' 30''$

Абсолютная погрешность: $\Delta a = 30''$

Относительная погрешность:

$$\delta = \frac{\Delta a}{a} = \frac{30''}{22^0 20' 30''} \cdot 100\% = 0,04\%$$

Пример **Какое из чисел более точное?** $\frac{9}{19}$ или $\sqrt{103}$

$\Delta a = |A - a|$

$|A – a| \leq \Delta a.$

a) $\frac{9}{19} = 0,47368... \approx 0,474$

Вычислим предельную абсолютную погрешность:

$\Delta a = |0,47368 - 0,474| = 3,2 \cdot 10^{-4} \leq 0,0004$

Вычислим предельную относительную погрешность:

$$\delta = \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,0004}{0,474} \approx 8 \cdot 10^{-4} = 0,08\%$$

b) $\sqrt{103} = 10,14889... \approx 10,149$

Вычислим предельную абсолютную погрешность:

$\Delta a = |10,14889 - 10,149| = 1,1 \cdot 10^{-4} \leq 0,0002$

Вычислим предельную относительную погрешность:

$$\delta = \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,0002}{10,149} \approx 2 \cdot 10^{-5} = 0,002\%$$

Равенство $\sqrt{103} = 10,149$ более точнее, чем $\frac{9}{19} = 0,474$,

т.к. $0,002\% < 0,08\%$