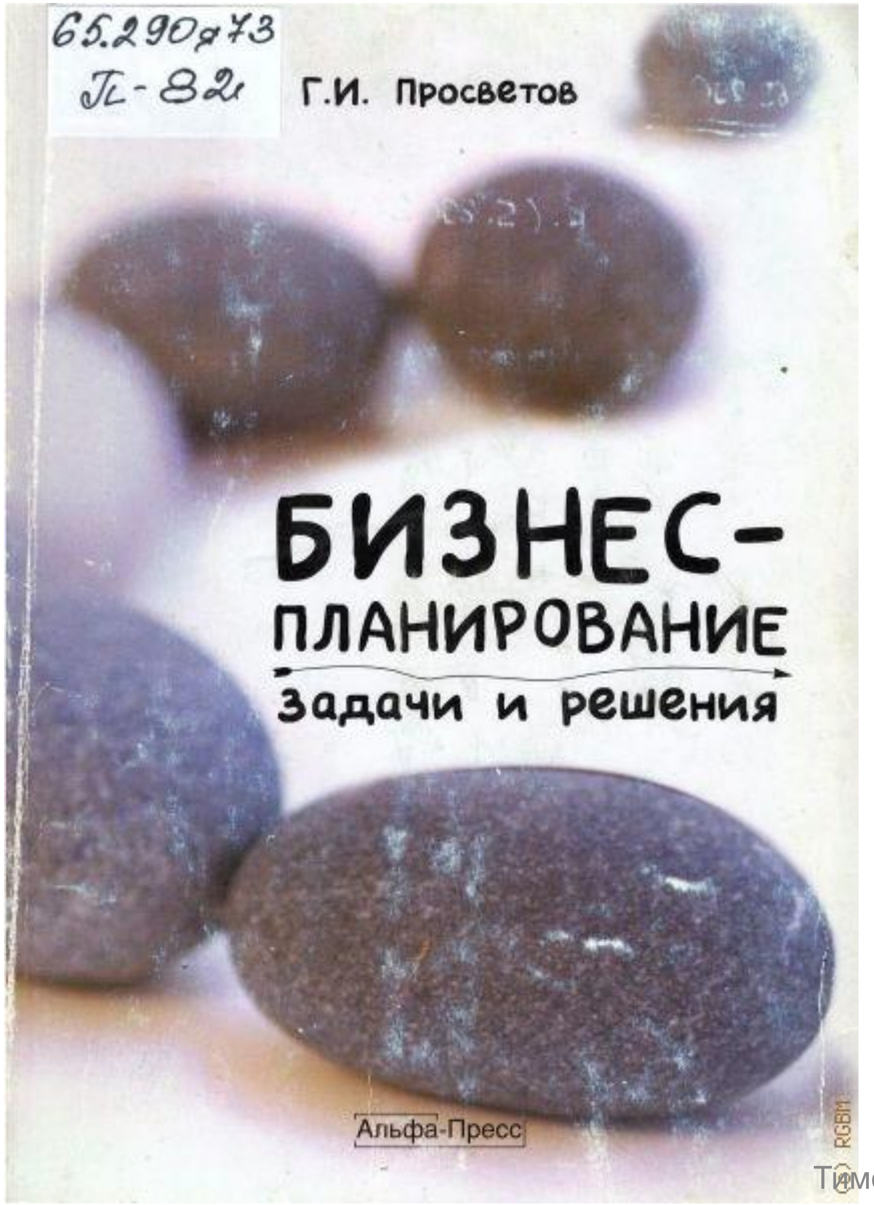
*Кандидат экономических наук, старший преподаватель механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.*




## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

**Аннуитет (финансовая рента) — это ряд последовательных платежей через одинаковые промежутки времени**

**Пример 21. Регулярные взносы в пенсионный фонд — это пример аннуитета**

**Задача 21. Привести пример аннуитета.**

**<u>Rj</u> — это величина отдельного платежа ренты.**
**<u>Срок ренты t —</u> это время от начала реализации ренты до момента последнего платежа.**
**<u>Интервал ренты</u> — это время между двумя последовательными платежами.**
**Если все платежи равны между собой, то это <u>постоянная рента</u>, иначе — <u>переменная</u> рента.**
**Ренты <u>постнумерандо</u> - все платежи осуществляются в конце интервалов ренты**
**Ренты <u>пренумерандо</u> - все платежи осуществляются в начале интервалов ренты = приведенные.**

**Для расчета наращения или дисконтирования платежей используется сложная процентная ставка i**

**Наращенная (будущая) сумма ренты S — это все платежи вместе с процентами на дату последней выплаты**

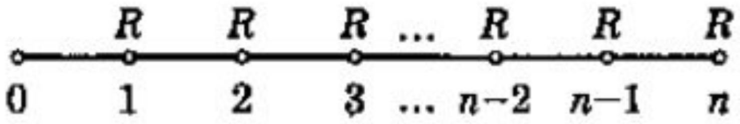
**Современная (приведенная) стоимость ренты A — это все платежи вместе с процентами, пересчитанные на начальный момент времени ренты с помощью операции математического дисконтирования**

**Существуют ренты верные (выплата не ограничена никакими условиями) и условные (выплата обусловлена наступлением какого-то события). Страховые взносы — это пример условной ренты**

**p — число рентных платежей в году, а число m показывает, сколько раз в году начисляются проценты. Ренты, для которых p = m, называются простыми. Ренты, для которых p не равно m, называются общими**

## НАХОЖДЕНИЕ НАРАЩЕННОЙ СУММЫ ДЛЯ ПРОСТОЙ РЕНТЫ ПОСТНУМЕРАНДО

**Пусть R — ежегодные платежи, на которые начисляются проценты в конце каждого года по сложной процентной ставке i, n — срок ренты**




**Платеж в конце 1-го года даст наращенную сумму** $R(1+i)^{n-1}$

**Платеж в конце 2-го года даст наращенную сумму** $R(1+i)^{n-2}$

**Платеж в конце 3-го года даст наращенную сумму** $R(1+i)^{n-3}$,

**И т. д.**

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} + \ldots + R(1+i) + R$$

**Мы получили сумму n первых членов геометрической прогрессии с b1 = R и знаменателем q = 1 + i.**

$$S = b_1\frac{q^n-1}{q-1} = R\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

**Пример 22. Вкладчик в течение n = 5 лет вносит в банк R = 1000 руб. Проценты на вклад начисляются по сложной процентной ставке i = 15% годовых.**
**Тогда наращенная (будущая) сумма ренты:**

$$S = R\frac{(1+i)^n-1}{i} = 1000\frac{(1+0{,}15)^5-1}{0{,}15} \approx 6742{,}38 \text{ руб.}$$

**Задача 22. Вкладчик в течение n = 3 лет вносит в банк R = 1200 руб. Проценты на вклад начисляются по сложной процентной ставке i = 14% годовых. Найти наращенную (будущую)**

## НАХОЖДЕНИЕ НАРАЩЕННОЙ СУММЫ ДЛЯ ПРОСТОЙ РЕНТЫ ПОСТНУМЕРАНДО

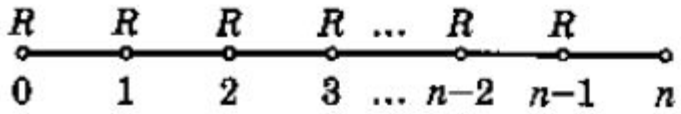
*Замечание.* Мастер функций $f_x$ пакета Excel содержит финансовую функцию БС, которая возвращает наращенную (будущую) сумму ренты $S$ на основе периодических постоянных (равных по величине) платежей $R$ и постоянной процентной ставки $i$.

$f_x$ → *финансовые* → *БС* → *ОК.* Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *Ставка* — это процентная ставка за период (у нас это $i$). *Кпер* — это общее число платежей по аннуитету. *Плт* — это выплата в каждый период (у нас это $R$, берем со знаком «−»). *Пс* — это приведенная стоимость $A$ ренты (если не указана, то по умолчанию полагается равной нулю). *Тип* равен 0 (для ренты постнумерандо) или 1 (для ренты пренумерандо). Если *Тип* не указан, то по умолчанию полагается равным 0. *ОК.* В примере 22 $S$ = БС(0,15; 5; −1000) = 6742,38 руб.

**Задача 22. Вкладчик в течение n = 3 лет вносит в банк R = 1200 руб. Проценты на вклад начисляются по сложной процентной ставке i = 14% годовых. Найти наращенную (будущую)**

# НАХОЖДЕНИЕ НАРАЩЕННОЙ СУММЫ ДЛЯ ПРОСТОЙ РЕНТЫ ПРЕНУМЕРАНДО

**Пусть R — ежегодные платежи, на которые начисляются проценты в начале каждого года по сложной процентной ставке i, n — срок ренты**




**Платеж в начале 1-го года даст наращенную сумму** $R(1+i)^n$
**Платеж в начале 2-го года даст наращенную сумму** $R(1+i)^{n-1}$
**Платеж в начале 3-го года даст наращенную сумму** $R(1+i)^{n-2}$
**И т. д.**

$$S = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots + R(1+i)^2 + R(1+i)$$

**Мы получили сумму n первых членов геометрической прог** $b_1 = R(1+i)$ и знаменателем $q = 1+i$.

$$S = b_1\frac{q^n-1}{q-1} = R(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} = R(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

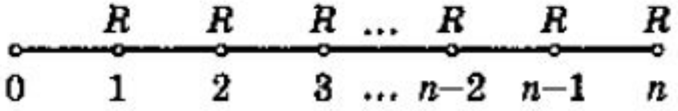
**Пример 23. Определим наращенную (будущую) сумму в примере 22 для ренты пренумерандо. Вкладчик в течение n = 5 лет вносит в банк R = 1000 руб. Проценты на вклад начисляются по сложной процентной ставк**

$$S = R(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i} = 1000(1+0{,}15)\frac{(1+0{,}15)^5-1}{0{,}15} \approx 7753{,}74 \text{ руб.}$$

**Задача 23. Определить наращенную (будущую) сумму в задаче 22 для ренты пренумерандо.**
**Вкладчик в течение n = 3 лет вносит в банк R = 15000 руб. Проценты на вклад начисляются по сложной процентной ставке i = 8% годовых. Найти наращенную (будущую) сумму ренты**

## НАХОЖДЕНИЕ СОВРЕМЕННОЙ СТОИМОСТИ ДЛЯ ПРОСТОЙ РЕНТЫ

Пусть R — ежегодные платежи, на которые начисляются проценты в конце каждого года по сложной процентной ставке i, n — срок ренты. Определим современную стоимость ренты, то есть используем операцию математического дисконтирования




Платеж в конце 1-го года даст современную стоимост $R/(1+i)$

Платеж в конце 2-го года даст современную стоимость $R/(1+i)^2$

Платеж в конце 3-го года даст современную стоимость $R/(1+i)^3$

И т. д.

$$A = R/(1+i) + R/(1+i)^2 + R/(1+i)^3 + \ldots + R/(1+i)^{n-1} + R/(1+i)^n.$$

Мы получили сумму n первых членов геометрической прог $b_1 = R/(1+i)$ и знаменателем $q = 1/(1+i)$

$$A = b_1\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{R}{1+i}\,\frac{1/(1+i)^n-1}{1/(1+i)-1} = R\,\frac{1-1/(1+i)^n}{i}$$

Это современная стоимость простой ренты постнумерандо. Подставив в эту формул $R$ величину $R(1+i)$

$$A = R(1+i)\frac{1-1/(1+i)^n}{i}$$

получим современную стоимость простой ренты пренумерандо

**Пример 24. Определим современную стоимость простой ренты из примера 22**

Вкладчик в течение n = 5 лет вносит в банк R = 1000 руб. Проценты на вклад начисляются по сложной процентной ставке i = 15% годовых.

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000\frac{(1+0,15)^5 - 1}{0,15} \approx 6742,38 \text{ руб.}$$

$$A = R\frac{1 - 1/(1+i)^n}{i} = 1000\frac{1 - 1/(1+0,15)^5}{0,15} \approx 3352,16 \text{ руб}$$

**Задача 24. Определить современную стоимость простой ренты из задачи 22.**

Вкладчик в течение n = 5 лет вносит в банк R = 125000 руб. Проценты на вклад начисляются по сложной процентной ставке i = 7% годовых

**Пример 25. Определим современную стоимость простой ренты из примера 23**

Пример 23. Определим наращенную (будущую) сумму в примере 22 для ренты пренумерандо. Вкладчик в течение n = 5 лет вносит в банк R = 1000 руб. Проценты на вклад начисляются по сложной процентной ставке i = 15% годовых

$$A = R(1+i)\frac{1 - 1/(1+i)^n}{i} = 1000(1+0,15)\frac{1 - 1/(1+0,15)^5}{0,15} \approx 3854,98 \text{ руб.}$$

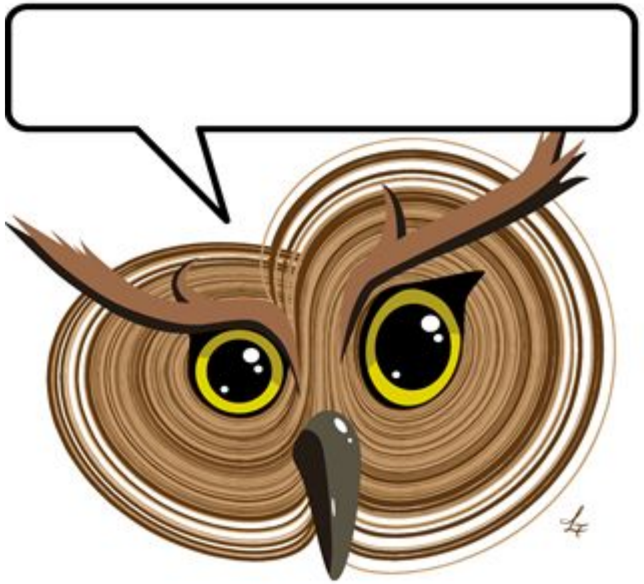
**Задача 25. Определить современную стоимость простой ренты из задачи 23**

Определить наращенную (будущую) сумму в задаче 22 для ренты пренумерандо. Вкладчик в течение n = 3 лет вносит в банк R = 1200 руб. Проценты на вклад начисляются по сложной процентной ставке i = 14% годовых. Найти наращенную (будущую) сумму ренты

*Замечание.* Мастер функций $f_x$ пакета Excel содержит финансовую функцию ПС, которая возвращает приведенную (к текущему моменту) стоимость инвестиций $A$.

$f_x$ → *финансовые* → *ПС* → *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Бс* (необязательный аргумент) указывается требуемое значение будущей стоимости или остатка средств после последней выплаты (если не указано, то по умолчанию полагается равным нулю). *ОК*.

В примере 24 ПС(0,15; 5; −1000) ≈ 3352,16 руб. В примере 25 ПС(0,15; 5; −1000; ; 1) ≈ 3854,98 руб.



## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ОТДЕЛЬНОГО ПЛАТЕЖА ПРОСТОЙ РЕНТЫ

**Зная процентную ставку i, период n и наращенную сумму S (или современную стоимость A) простой ренты, можно определить величину отдельного платежа R. Для простой ренты постнумерандо наращенная (будущая) сумма ренты**

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$R = \frac{Si}{(1+i)^n - 1}$$

**Пример 26. Определим размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке i = 12% годовых для накопления через n = 3 года суммы S = 50000 руб**

$$R = \frac{Si}{(1+i)^n - 1} = \frac{50000 \times 0{,}12}{(1+0{,}12)^3 - 1} \approx 14817{,}45 \text{ руб}$$

**Задача 26. Определить размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке i = 10% годовых для накопления через n = 5 года суммы S = 570000 руб.**

**Для простой ренты пренумерандо наращенная (будущая) сумма ренты**

$$S = R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow R = \frac{Si}{(1+i)((1+i)^n - 1)}$$

**Пример 27. Пусть в примере 26 платежи осуществляются в начале года.**

**Определим размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке i = 12% годовых для накопления через n = 3 года суммы S = 50000 руб**

$$R = \frac{Si}{(1+i)((1+i)^n - 1)} = \frac{50000 \times 0{,}12}{(1+0{,}12)((1+0{,}12)^3 - 1)} \approx 13229{,}87 \text{ руб.}$$

**Задача 27. Решить задачу 26 при условии, что платежи осуществляются в начале года.**

**Определить размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке i = 14% годовых для накопления через n = 4 года суммы S = 70000 руб.**

Для простой ренты постнумерандо современная стоимость

$$A = R\frac{1-1/(1+i)^n}{i} \Rightarrow R = \frac{Ai}{1-1/(1+i)^n}$$

Пример 28. Взят кредит на сумму А = 50000 руб. сроком на л — 3 года под 14% годовых. Тогда размер ежегодных погасительных платежей в конце года

$$R = \frac{Ai}{1-1/(1+i)^n} = \frac{50000\times 0,14}{1-1/(1+0,14)^3} = 21536,57 \text{ руб.}$$

Задача 28. Взят кредит на сумму А = 60000 руб. сроком на п = 4 года под 15% годовых. Найти размер ежегодных погасительных платежей в конце года.

Для простой ренты пренумерандо современная стоимость

$$A = R(1 + i)\frac{1 - 1/(1+i)^n}{i}. \quad \Rightarrow \quad R = \frac{Ai}{(1+i)(1 - 1/(1+i)^n)}$$

**Пример 29. Пусть в примере 28 платежи осуществляются в начале каждого года. Тогда**

**Пример 28. Взят кредит на сумму А = 50000 руб. сроком на л — 3 года под 14% годовых. Тогда размер ежегодных погасительных платежей в конце года**

$$R = \frac{Ai}{(1+i)(1 - 1/(1+i)^n)} = \frac{50000 \times 0{,}14}{(1+0{,}14)(1 - 1/(1+0{,}14)^3)} \approx 18891{,}73 \text{ руб.}$$

**Задача 29. Решить задачу 28 при условии, что платежи осуществляются в начале каждого года.**

**Задача 28. Взят кредит на сумму А = 60000 руб. сроком на п = 4 года под 15% годовых. Найти размер ежегодных погасительных платежей в конце года.**

*Замечание.* Мастер функций $f_x$ пакета Excel содержит финансовую функцию ПЛТ, которая возвращает сумму периодического платежа для аннуитета на основе постоянства сумм платежей и постоянства процентной ставки.

$f_x$ → *финансовые* → *ПЛТ* → *OK*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *OK*.

В примере 26 ПЛТ(0,12; 3; ; 50000) ≈ −14817,45 руб. В примере 27 ПЛТ(0,12; 3; ; 50000; 1) ≈ −13229,87 руб. В примере 28 ПЛТ(0,14; 3; 50000) ≈ −21536,57 руб. В примере 29 ПЛТ(0,14; 3; 50000; ; 1) = −18891,73 руб.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРОКА ПРОСТОЙ РЕНТЫ

**Зная величину отдельного платежа R, процентную ставку i и наращенную сумму S (или современную стоимость A) простой ренты, можно определить количество выплат n.**

**Для простой ренты постнумерандо наращенная (будущая) сумма ренты**

$$S = b_1\frac{q^n - 1}{q - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

**Отсюда** $(1+i)^n - 1 = Si/R \Rightarrow (1+i)^n = 1 + Si/R \Rightarrow n\ln(1+i) = \ln(1 + Si/R) \Rightarrow n = \dfrac{\ln(1+Si/R)}{\ln(1+i)}$

**Подставив в последнюю формулу вместо R выражение R(1 + i), мы получим срок ренты пренумерандо**

$$n = \ln\left(1 + \frac{Si}{R(1+i)}\right)/\ln(1+i)$$

Пример 30. Размер ежегодных платежей R = 5000 руб., процентная ставка i = 12% годовых, наращенная сумма S = 30000 руб. Определим сроки простых рент постнумерандо и пренумерандо.

Для ренты постнумерандо

$$n = \ln(1 + Si/R)/\ln(1 + i) = \ln(1 + 30000 \times 0{,}12/5000)/\ln(1 + 0{,}12) \approx 4{,}8 \text{ лет}$$

Для ренты пренумерандо

$$n = \ln\left(1 + \frac{Si}{R(1 + i)}\right)/\ln(1 + i) = \ln\left(1 + \frac{30000 \times 0{,}12}{5000(1 + 0{,}12)}\right)/\ln(1 + 0{,}12) = 4{,}4 \text{ лет}$$

Задача 30. Размер ежегодных платежей R = 180000 руб., процентная ставка i = 12% годовых, наращенная сумма S = 640000 руб. Определить сроки простых рент постнумерандо

Для простой ренты постнумерандо современная стоимость

$$A = R\frac{1-1/(1+i)^n}{i} \Rightarrow n = -\frac{\ln(1 - Ai/R)}{\ln(1+i)}$$

Подставив в последнюю формулу вместо R выражение R(1 + i), мы получим срок ренты пренумерандо:

$$n = -\ln\left(1 - \frac{Ai}{R(1+i)}\right)/\ln(1+i)$$

Пример 31. Определим сроки погашения кредита A = 30000 руб. при ежегодных платежах R = 9000 руб. и процентной ставке i = 15% годовых для рент постнумерандо и пренумерандо.

Для ренты постнумерандо

$$n = -\ln(1 - Ai/R)/\ln(1+i) = -\ln(1 - 30000\times0{,}15/9000)/\ln(1+0{,}15) = 5 \text{ лет.}$$

Для ренты пренумерандо

$$n = -\ln\left(1 - \frac{Ai}{R(1+i)}\right)/\ln(1+i) = -\ln\left(1 - \frac{30000\times0{,}15}{9000(1+0{,}15)}\right)/\ln(1+0{,}15) = 4{,}1 \text{ лет.}$$

Задача 31. Определить сроки погашения кредита A = 45000 руб. при ежегодных платежах R = 12000 руб. и процентной ставке i = 11% годовых для рент постнумерандо и пренумерандо.

**Пример 31. Определим сроки погашения кредита A = 30000 руб. при ежегодных платежах R = 9000 руб. и процентной ставке i = 15% годовых для рент постнумерандо и пренумерандо.**

**Для ренты постнумерандо**

$$n = -\ln(1 - Ai/R)/\ln(1 + i) = -\ln(1 - 30000 \times 0{,}15/9000)/\ln(1 + 0{,}15) = 5 \text{ лет.}$$

**Для ренты пренумерандо**

$$n = -\ln\left(1 - \frac{Ai}{R(1+i)}\right)/\ln(1+i) = -\ln\left(1 - \frac{30000 \times 0{,}15}{9000(1 + 0{,}15)}\right)/\ln(1 + 0{,}15) \approx 4{,}1 \text{ лет.}$$

*Замечание.* Мастер функций $f_x$ пакета Excel содержит финансовую функцию КПЕР, которая возвращает общее количество периодов выплаты $n$ для аннуитета на основе периодических постоянных выплат и постоянной процентной ставки.

$f_x$ → *финансовые* → *КПЕР* → *OK*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *OK*.

В примере 30 КПЕР(0,12; –5000; ;30000) = 4,8 и КПЕР(0,12; –5000; ; 30000; 1) ≈ 4,4. В примере 31 КПЕР(0,15; –9000; 30000) ≈ 5 и КПЕР(0,15; –9000; 30000; ; 1) ≈ 4,1.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ПРОСТОЙ РЕНТЫ

**Зная величину отдельного платежа R, количество выплат n и наращенную сумму S (или современную стоимость A) простой ренты, можно попытаться найти процентную ставку. Но получается нелинейное уравнение**

Мастер функций $f_x$ пакета Excel содержит финансовую функцию СТАВКА, которая возвращает процентную ставку по аннуитету за один период. Значение функции вычисляется путем итерации и может давать нулевое значение или несколько значений. Если последовательные результаты функции СТАВКА не сходятся с точностью 0,0000001 после 20 итераций, то СТАВКА возвращает сообщение об ошибке #число!.

$f_x$ → *финансовые* → *СТАВКА* → *OK*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Предположение* указывается предполагаемая величина процентной ставки (если значение не указано, то по умолчанию оно равно 10%). *OK*.

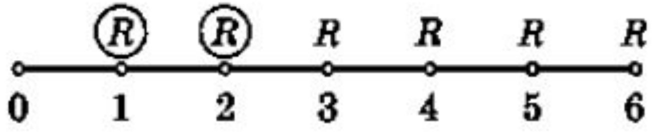
**Пример 32. Определим, под какую процентную ставку нужно вносить каждый год R = 5000 руб., чтобы через n = 5 лет накопить сумму S = 40000 руб.**
**Для ренты постнумерандо СТАВКА(5; -5000; ; 40000) = 24%.**
**Для ренты пренумерандо СТАВКА(5; -5000; ; 40000; 1) =16%**

**Задача 32. Определить, под какую процентную ставку нужно вносить каждый год R = 6000 руб., чтобы через п = 4 года накопить сумму S = 35000 руб.**

## ОТЛОЖЕННАЯ РЕНТА

**Срок реализации отложенных рент откладывается на некоторое время — период отсрочки.**
**Пример 33. Простая рента с ежегодными платежами R = 1000 руб., процентной ставкой i = 12% годовых и сроком n = 4 года отложена на 2 года. Найдем наращенную сумму S и современную стоимость A ренты.**

**Добавим к нашей ренте на бумаге платежи R = 1000 руб. в конце 1-го и 2-го годов.**




**Получили простую ренту сроком n = 6 лет. Ее наращенная сумма**

$$S_1 = R\frac{(1+i)^{n_1}-1}{i} = 1000\frac{(1+0{,}12)^6-1}{0{,}12} \approx 8115{,}19 \text{ руб.}$$

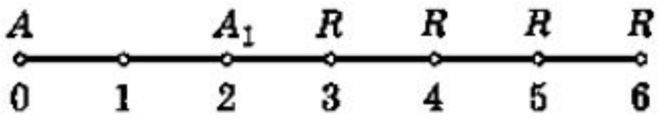
**Но эта простая рента состоит из простой ренты сроком n2 = 2 года (добавленные на бумаге платежи) и нашей отложенной ренты.**
**Для добавленной ренты наращенная сумма в конце 2-**

$$S_2 = R\frac{(1+i)^{n_2}-1}{i} = 1000\frac{(1+0{,}12)^2-1}{0{,}12} \approx 2120 \text{ руб.}$$

а в конце 6-го года — $S_3 = S_2(1+i)^{6-2} = 2120(1+0{,}12)^4 \approx 3335{,}86$ руб.

Отсюда $S = S_1 - S_3 = 8115{,}19 - 3335{,}86 = 4779{,}33$ руб.

Для нахождения современной стоимости A отложенной ренты можно применить аналогичный прием. Но мы поступим иначе.




Найдем приведенную стоимость нашей ренты через 2 года:

$$A_1 = R\frac{1-1/(1+i)^n}{i} = 1000\,\frac{1-1/(1+0{,}12)^4}{0{,}12} \approx 3037{,}35$$

A теперь применим к сумме A операцию математического дисконтирования со сложной процентной ставкой i = 12% годовых

$$A = A_1/(1+i)^2 = 3037{,}35/(1+0{,}12)^2 \approx 2421{,}36 \text{ руб.}$$

Задача 33. Простая рента с ежегодными платежами r = 1200 руб., процентной ставкой i = 14% годовых и сроком n = 5 лет отложена на 3 года. Найти наращенную сумму S и современную стоимость A ренты.

## СВЕДЕНИЕ ОБЩЕЙ РЕНТЫ К ПРОСТОЙ РЕНТЕ

**Пусть p — число рентных платежей в году, а число m показывает, сколько раз в году начисляются проценты. Для общей ренты p не равно m, а для простой ренты p = m.**

**W и R — величины выплат общей и простой рент соответственно,**
**p — число рентных платежей в году для общей ренты,**
**m — число интервалов начисления процентов в году,**
**j и i — процентные ставки за интервал начисления процентов общей и простой рент соответственно,**
**n — общее число интервалов начисления процентов.**

**Данные ренты эквивалентны, то есть процентные ставки за периоды рент совпадают и эквивалентные этим рентам значения, соответствующие одному и тому же моменту времени, совпадак**

$$(1+j)^p = (1+i)^m \Rightarrow j = (1+i)^{m/p} - 1$$

**Наращенные суммы для обеих рент одинаковь**

$$R\frac{(1+i)^m-1}{i} = W\frac{(1+j)^p-1}{j} \Rightarrow \frac{R}{i} = \frac{W}{j} \Rightarrow R = Wi/j = Wi/((1+i)^{m/p}-1)$$

**Пример 34. Заменим общую ренту сроком 3 года с выплатами по W = 15000 руб. в конце каждого полугодия и начислением процентов по ставке 12% годовых ежеквартально простой рентой с поквартальными выплатами.**

$$p = 2,\ m = 4,\ i = 0{,}12/m = 0{,}12/4 = 0{,}03$$

**Поквартальные выплаты**

$$R = Wi/((1 + i)^{m/p} - 1) = 15000\times 0{,}03/((1 + 0{,}03)^{4/2} - 1) = 7389{,}16 \text{ руб.}$$

**Задача 34. Заменить общую ренту сроком 3 года с выплатами по W = 20000 руб. в конце каждого квартала и начислением процентов по ставке 15% годовых ежемесячно простой рентой с ежемесячными выплатами.**

## НАРАЩЕННАЯ СУММА ОБЩЕЙ РЕНТЫ

**Подставив в формулу для наращенной суммы простой ренты**

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ выражение } R = Wi/((1+i)^{m/p} - 1)$$

**мы найдем наращенную сумму общей ре** $S = \frac{Wi}{(1+i)^{m/p} - 1} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = W\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{m/p} - 1}$.

**Здесь n — это общее количество интервалов начисления процентов за весь срок ренты**

**Пример 35. Найдем наращенную сумму общей ренты сроком 3 года с выплатами по W = 5000 руб. в конце каждого квартала и начислением процентов по ставке 14% годовых по полугодиям.**

$$p = 4,\ m = 2,\ i = 0{,}14/m = 0{,}14/2 = 0{,}07,\ n = 3m = 3 \times 2 = 6$$

$$S = W\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{m/p} - 1} = 5000\frac{(1+0{,}07)^6 - 1}{(1+0{,}07)^{2/4} - 1} \approx 72763{,}56 \text{ руб.}$$

**Задача 35. Найти наращенную сумму общей ренты сроком 2 года с выплатами по W = 7000 руб. в конце каждого квартала и начислением процентов по ставке 11% годовых ежемесячно.**

## СОВРЕМЕННАЯ СТОИМОСТЬ ОБЩЕЙ РЕНТЫ

**Подставив в формулу для современной стоимости простой ренты**

$$A = R\frac{1 - 1/(1+i)^n}{i}$$ выражение $R = Wi/((1+i)^{m/p} - 1)$,

мы найдем современную стоимость общей ренты:

$$A = \frac{Wi}{(1+i)^{m/p} - 1} \times \frac{1 - 1/(1+i)^n}{i} = W\frac{1 - 1/(1+i)^n}{(1+i)^{m/p} - 1}.$$

**Пример 36. Найдем современную стоимость общей ренты из примера 35.**

**Пример 35. Найдем наращенную сумму общей ренты сроком 3 года с выплатами по W = 5000 руб. в конце каждого квартала и начислением процентов по ставке 14% годовых по полугодиям.**

$$A = W\frac{1 - 1/(1+i)^n}{(1+i)^{m/p} - 1} = 5000\frac{1 - 1/(1+0{,}07)^6}{(1+0{,}07)^{2/4} - 1} = 48485{,}43 \text{ руб}$$

**Задача 36. Найти современную стоимость общей ренты из задачи 35.**

**Задача 35. Найти наращенную сумму общей ренты сроком 2 года с выплатами по W = 7000 руб. в конце каждого квартала и начислением процентов по ставке 11% годовых ежемесячно**

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТОЙ РЕНТЫ В ОБЩУЮ РЕНТУ

**Необходимость в таком преобразовании возникает, когда нужно найти величину выплат общей ренты по заданному значению наращенной суммы или современной стоимости.**

$$R = Wi/((1+i)^{m/p} - 1). \text{ Отсюда } W = R((1+i)^{m/p} - 1)/i$$

**Пример 37. Выдан кредит A = 40000 руб. на 2 года по ставке 12% годовых ежемесячно. Определим размер поквартальных платежей W.**

$$p = 4,\ m = 12,\ i = 0{,}12/m = 0{,}12/12 = 0{,}01,\quad n = 2m = 2\times 12 = 24$$

$$R = \frac{Ai}{1 - 1/(1+i)^n} = \frac{40000\times 0{,}01}{1 - 1/(1+0{,}01)^{24}} = 1882{,}94 \text{ руб.}$$

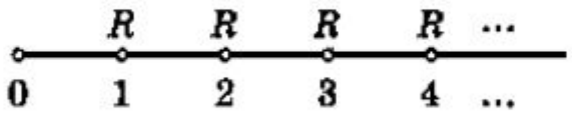
$$W = R((1+i)^{m/p} - 1)/i = 1882{,}94((1+0{,}01)^{12/4} - 1)/0{,}01 = 5705{,}5 \text{ руб.}$$

**Задача 37. Выдан кредит A = 50000 руб. на 3 года по ставке 16% годовых ежеквартально. Определить размер полугодовых платежей W.**

# ПРОСТАЯ БЕССРОЧНАЯ РЕНТА

**Бессрочная рента не ограничена никаким сроком**

срок ренты $n \to \infty$




Современная стоимость простой бессрочной ренты

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(R\frac{1 - 1/(1+i)^n}{i}\right) = R/i.$$ Отсюда $R = Ai$.

**Пример 38. Инвестирование суммы A = 40000 руб. под i - 5% годовых обеспечивает выплаты**
**R = Ai = 40000 X 0,05 = 2000 руб. в конце каждого года.**

**Задача 38. Сумму A = 50000 руб. инвестировали под i = 4% годовых. Найти размер ежегодных выплат в конце каждого года.**

# ОБЩАЯ БЕССРОЧНАЯ РЕНТА

**Общая бессрочная рента — это бессрочная рента, для которой период выплат отличается от периода начисления процентов.**

**Пример 39. Найдем современную стоимость общей бессрочной ренты с выплатами по W = 5000 руб. в конце каждого квартала и начислением процентов по ставке 12% годовых ежемесячно.**

$p = 4,\ m = 12,\ i = 0{,}12/m = 0{,}12/12 = 0{,}01$

$R = Wi/((1+i)^{m/p} - 1) = 5000 \times 0{,}01/((1+0{,}01)^{12/4} - 1) \approx 1650{,}11$ руб.

Тогда современная стоимость $A = R/i = 1650{,}11/0{,}01 = 165011$ руб

**Задача 39. Найти современную стоимость общей бессрочной ренты с выплатами по W = 8000 руб. в конце каждого полугодия и начислением процентов по ставке 16% годовых ежеквартально.**

## БЕССРОЧНАЯ РЕНТА ПРЕНУМЕРАНДО

**Бессрочная рента пренумерандо отличается от бессрочной ренты постнумерандо только платежом в момент времени t = 0. Поэтому для простой бессрочной ренты пренумерандо современная стоимость A = R + R/i, а для общей бессрочной ренты пренумерандо современная стоимость**

$$= W + \frac{Wi}{i((1+i)^{m/p} - 1)} = W + \frac{W}{(1+i)^{m/p} - 1} = \frac{W}{1 - 1/(1+i)^{m/p}}$$

**A = W + R/i**

**Пример 40. Найдем современную стоимость общей бессрочной ренты с выплатами по W = 10000 руб. в начале каждого квартала и начислением процентов по ставке 18% годовых по полугодиям.**

$$p = 4,\ m = 2,\ i = 0{,}18/m = 0{,}18/2 = 0{,}09$$

Современная стоимость $A = W/(1 - 1/(1+i)^{m/p}) = 10000/(1 - 1/(1+0{,}09)^{2/4}) \approx 237114{,}52$ руб

**Задача 40. Найти современную стоимость общей бессрочной ренты с выплатами по W = 9000 руб. в начале каждого полугодия и процентной ставкой 12% годовых ежеквартально.**

# Арифметика ипотеки

Ипотека — это кредитование под залог жилья. Как начисляются и уплачиваются проценты? Каков план погашения долга?

## ВАРИАНТ 1: АННУИТЕТ

Пример 134. Банк выдает кредит на сумму А = 30000 долл., срок n= 5 лет, процентная ставка i = 5% годовых. Составим план погашения долга.
Один из возможных вариантов — простая рента постнумерандо.

$$R = Ai/(1 - 1/(1+i)^n) = 30000 \times 0{,}05/(1 - 1/(1+0{,}05)^5) \approx 6929{,}24 \text{ долл}$$

Всего за 5 лет будет выплачено 5X6929,24 = 34646,2 долл.

Задача 134. Банк выдает кредит на сумму А = 40000 долл., срок n = 10 лет, процентная ставка i = 10% годовых. Составить план погашения долга с помощью простой ренты постнумерандо

# ВАРИАНТ 2: СПРАВЕДЛИВЫЙ, НО НЕ ОЧЕНЬ УДОБНЫЙ

Кредит погашается равномерно с уплатой процентов на остаток долга. Платеж в j-й год определяется формулой $A/n$ (1/n-я часть суммы кредита) + $iA(n + 1 - j)/n$ ($i$% от остатка долга на начало j-го года)

Пример 134. Банк выдает кредит на сумму A = 30000 долл., срок n= 5 лет, процентная ставка i = 5% годовых.

Пример 135. Применим этот вариант в примере 134. Заполним таблицу. Для нулевого года указан только остаток долга. Во 2-м столбце указана 1/n = 1/5-я часть кредита.

Каждое число 3-го столбца равно 5% от числа из последнего столбца предыдущей строки. 4-й столбец (выплата в j-м году) — это сумма соответствующих чисел из 2-го и 3-го столбцов. Каждое число последнего столбца есть разность числа из последнего столбца предыдущей строки и числа из 2-го столбца этой же строки. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Всего за 5 лет будет выплачено 34500 долл. Это несколько меньше, чем в предыдущем варианте (поэтому вариант справедливый). Но выплаты смещены к началу срока погашения кредита (поэтому для заемщика вариант не очень удобный). Схема типична для российского банка

| Год | 1/n–я часть суммы кредита | 5% от остатка долга | Суммарная выплата | Остаток долга |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 30000 |
| 1 | 6000 | 1500 | 7500 | 24000 |
| 2 | 6000 | 1200 | 7200 | 18000 |
| 3 | 6000 | 900 | 6900 | 12000 |
| 4 | 6000 | 600 | 6600 | 6000 |
| 5 | 6000 | 300 | 6300 | 0 |
| Сумма | 30000 | 4500 | 34500 | |

Задача 135. Применить этот вариант в задаче 134

## ВАРИАНТ 3: ПРОСТОЙ, НО ГРАБИТЕЛЬСКИЙ

**К основной сумме долга прибавляются простые проценты за 5 лет. И все это делится на срок погашения кредита. Такова ежегодная выплата.**

**Пример 134. Банк выдает кредит на сумму А = 30000 долл., срок n= 5 лет, процентная ставка i = 5% годовых.**

**Пример 136. Применим этот вариант в примере 134. (30000 + 0,05х5х30000)/5 = 37500/5 = 7500 долл.**
**Всего за 5 лет будет выплачено 37500 долл. Здесь заемщик платит проценты на всю сумму кредита в течение всего срока погашения, даже на ту часть долга, которую он уже вернул.**

**Задача 136. Что обещает грабительский вариант в задаче 134?**

**Задача 134. Банк выдает кредит на сумму А = 40000 долл., срок n = 10 лет, процентная ставка i = 10% годовых. Составить план погашения долга с помощью простой ренты постнумерандо**

## ВАРИАНТ 4: «ХВОСТ», ПОГАШАЕМЫЙ В КОНЦЕ СРОКА

**Заемщик вносит в течение n 1 года определенную фиксированную сумму плюс проценты на остаток долга, а в последний год возвращает остаток долга и проценты по нему.**

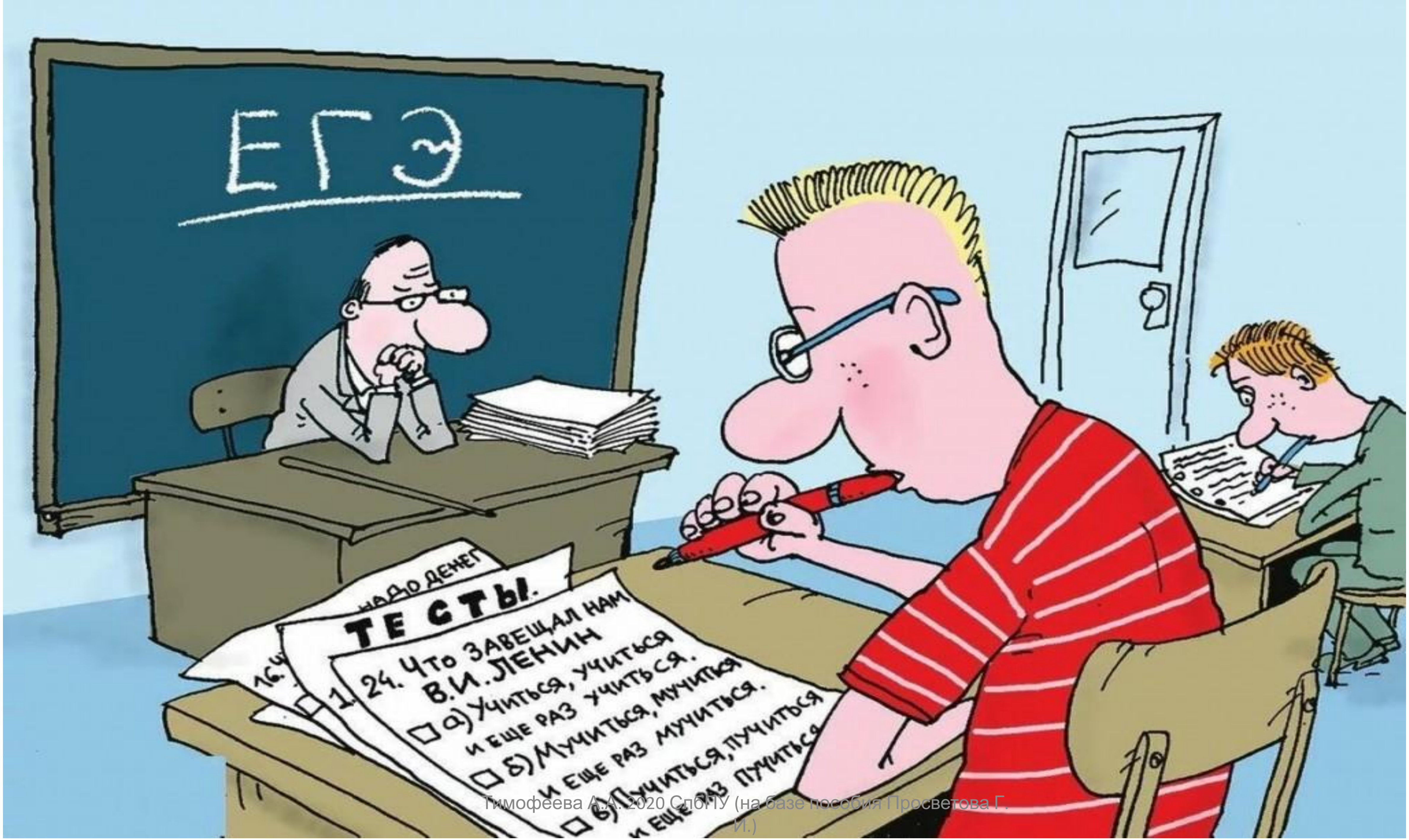
**Пример 137. Применим этот вариант в примере 134. Пусть размер ежегодного платежа равен 5000 долл.**

**Пример 134. Банк выдает кредит на сумму A = 30000 долл., срок n= 5 лет, процентная ставка i = 5% годовых.**

| Год | 1/n–я часть суммы кредита | 5% от остатка долга | Суммарная выплата | Остаток долга |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 30000 |
| 1 | 5000 | 1500 | 6500 | 25000 |
| 2 | 5000 | 1250 | 6250 | 20000 |
| 3 | 5000 | 1000 | 6000 | 15000 |
| 4 | 5000 | 750 | 5750 | 10000 |
| 5 | 10000 | 500 | 10500 | 0 |
| Сумма | 30000 | 5000 | 35000 | |

**Задача 137. Применить этот вариант в задаче 134, приняв размер основного ежегодного платежа (без процентов) 3000 долл.**

**Задача 134. Банк выдает кредит на сумму A = 40000 долл., срок n = 10 лет, процентная ставка i = 10% годовых. Составить план погашения долга с помощью простой ренты постнумерандо**


ЕГЭ
НАДО ДЕНЕГ
ТЕСТЫ.
24. Что ЗАВЕЩАЛ НАМ В.И.ЛЕНИН
а) Учиться, учиться и еще раз учиться.
б) Мучиться, мучиться и еще раз мучиться.
Пучиться, пучиться
и еще раз пучиться