

Математический анализ
2 семестр
Занятие №9

Несобственные интегралы
второго рода

Занятие 9. Несобственные интегралы 2го рода

Будем называть c особой точкой, если $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$.

Если b является особой точкой, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx .$$

Если a является особой точкой, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Если c является особой точкой и $c \in (a; b)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx$$

Занятие 9. Несобственные интегралы 2го рода

Вычислить (или показать расходимость) следующих интегралов

$$\int_1^e \frac{dx}{x \ln x} = +\infty$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln |\ln(1 + \varepsilon)| = -\infty$$

$$\int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x \ln x} = \int_{1+\varepsilon}^e \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln(x)| \Big|_{1+\varepsilon}^e = \ln |\ln(e)| - \ln |\ln(1 + \varepsilon)|$$

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$

2. $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

6. $\int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx$

3. $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$

7. $\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

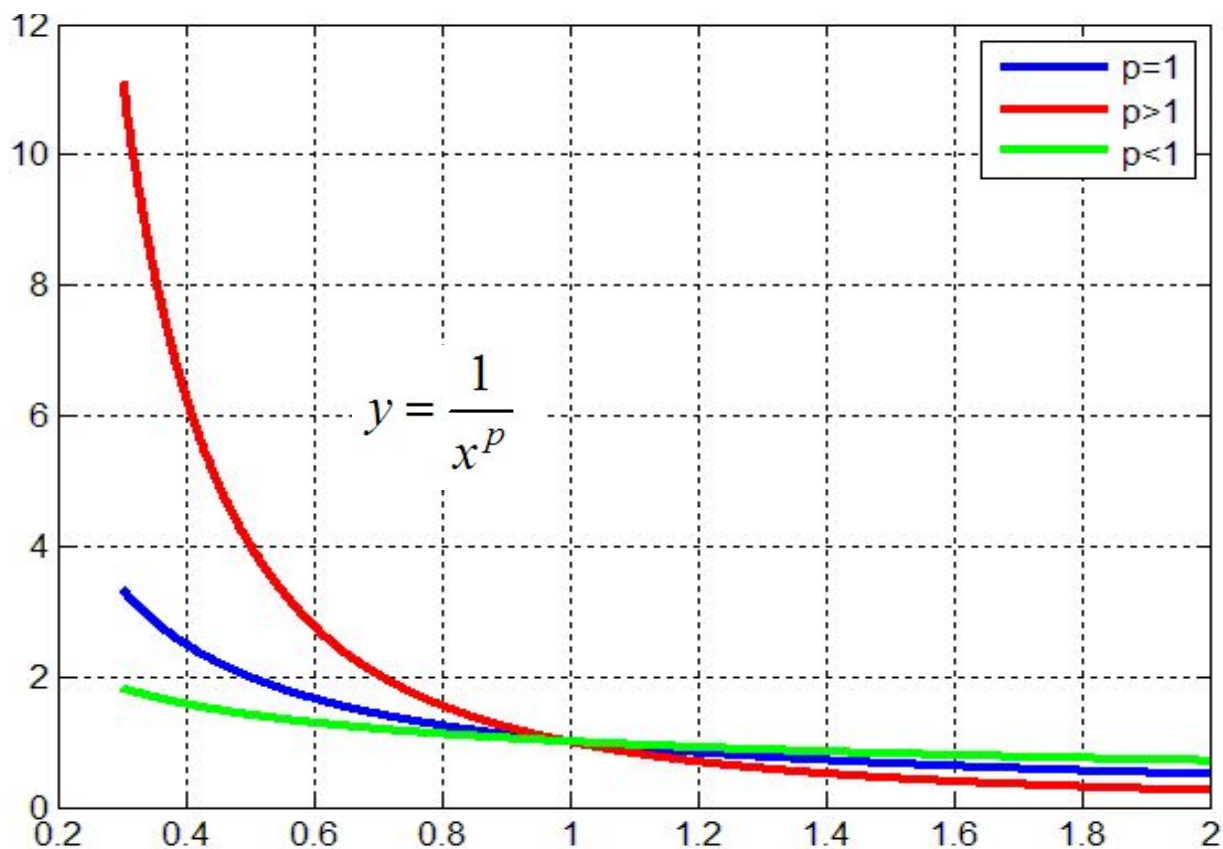
4. $\int_0^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Занятие 9. Несобственные интегралы 2го рода

Практический признак сходимости

Пусть b особая точка и $\exists \lim_{x \rightarrow b} (b-x)^\lambda f(x) = K, 0 < K < +\infty$.

Тогда $\int_a^b f(x) dx$ сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$.



Занятие 9. Несобственные интегралы 2го рода

Выяснить сходимость интегралов, не вычисляя их.

Учебный пример:

Вариант 1: особая точка $x = 0$.

$$\int_0^1 \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[5]{x^2 + x^4}} dx \quad \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[5]{x^2 + x^4}} \sim \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \sim \frac{1}{x^{2/5}} \quad \lambda = \frac{2}{5} < 1$$

интеграл сходится

1. $\int_0^1 \frac{x + 1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$

2. $\int_0^1 \frac{1 - x}{\sqrt[3]{x^5 + x^7}} dx$

3. $\int_0^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Занятие 9. Несобственные интегралы 2го рода

Выяснить сходимость интегралов, не вычисляя их.

Учебный пример:

Вариант 2: особая точка $x = 0$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln \cos x}{\sqrt{x^5 + x^7}} dx \quad \text{интеграл сходится}$$

$$\frac{\ln \cos x}{\sqrt{x^5 + x^7}} \sim \frac{\ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)}{\sqrt{x^5}} \sim \frac{-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x^5}} \sim -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} \quad \lambda = \frac{1}{2} < 1$$

Занятие 9. Несобственные интегралы 2го рода

Выяснить сходимость интегралов, не вычисляя их.

1. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

2. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^3}} dx$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

5. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$

6. $\int_0^1 \frac{(e^x - 1)\sqrt{x}}{\ln(1+x^2)} dx$

Занятие 9. Несобственные интегралы 2го рода

Выяснить сходимость интегралов, не вычисляя их.

Учебный пример:

Вариант 3: особая точка $x \neq 0$.

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{1-x^3}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} dx \quad \text{Особая точка } x=1$$

$$\frac{\sqrt[4]{1-x^3}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = \frac{\sqrt[4]{(1-x)(x^2+x+1)}}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)^2}} = \frac{(1-x)^{1/4}}{(1-x)^{2/3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{5/12}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}$$

$$\lambda = \frac{5}{12} < 1 \quad \text{интеграл сходится}$$

Занятие 9. Несобственные интегралы 2го рода

Выяснить сходимость интегралов, не вычисляя их.

1.
$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} dx$$

2.
$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

3.
$$\int_1^5 \frac{dx}{(x^3-1)^{2/3}}$$

4.
$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{1-x^3}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} dx$$

5.
$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

6.
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$



Спасибо за
внимание

Занятие окончено