

# Эквивалентные функции

- Функции  $f$  и  $g$  называются **эквивалентными ( $f \sim g$ )** на множестве  $E$ , если они определены на этом множестве и принимают почти всюду на  $E$  одинаковые значения.

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$$

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

$$\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$$

$$(1 + \alpha(x))^m - 1 \sim m\alpha(x)$$

- Свойства эквивалентных функций:
- **1) рефлексивные**
- **2) симметричные**
- **3) транзитивные**

● **Доказательство транзитивности:**

- Пусть  $f \sim g, g \sim h$  на множестве  $E$ .
- Обозначим через  $E_1$  множество, на котором  $f(x) \neq g(x)$ , через  $E_2$   $g(x) \neq h(x)$ . следовательно  $|E_1| = |E_2| = 0$ .
- Если  $x$  не принадлежит  $G$ , равное пересечению  $E_1, E_2$ . тогда  $f=g, g=h, f=h$ .
- Значит,  $f \sim h$  на подмножестве  $F$  множества  $G$ , но так как  $G$  нулевая мера, то и  $F=0$ .
- Значит,  $f \sim h$ .

- Теорема:
- Если функция  $f$  эквивалентна 0 на измеримом множестве  $E$ , то она интегрируема на  $E$ , причем  $I_E(f) = 0$