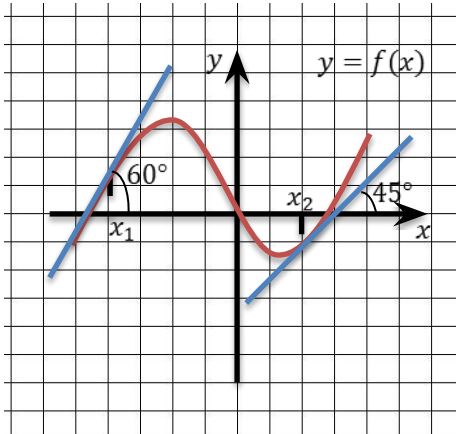


Алгоритм отыскания производной

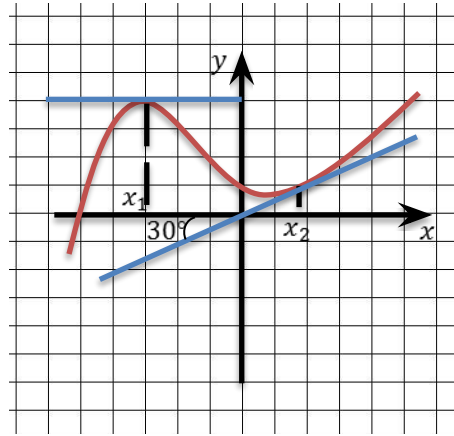
Упражнение:

На рисунках изображены графики некоторых функций. Определите значения производных соответствующих функций в точках x_1 и x_2 .



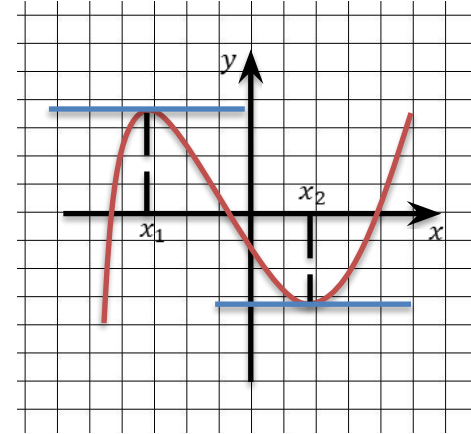
$$f'(x_1) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$f'(x_2) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$



$$f'(x_1) = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

$$f'(x_2) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$f'(x_1) = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

$$f'(x_2) = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$:

1. Зафиксировать значение x , найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx , перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример:

● Найти производную функции $y = C$.

Решение:

1. $f(x) = C$

2. $f(x + \Delta x) = C$

3. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$

5. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$

Ответ: $(C)' = 0$.

Пример:

● Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение:

$$1. f(x) = \frac{1}{x}$$

$$2. f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$$

$$3. \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$4. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right) = -\frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x(x + \Delta x))} = -\frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)} = -\frac{1}{x \cdot x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Пример:

● Найти производную функции $y = 7x + 4$ по алгоритму.

Решение:

1. $f(x) = (7x + 4)$

2. $f(x + \Delta x) = 7(x + \Delta x) + 4$

3. $\Delta y = \quad - \quad = \quad - \quad = 7x + 7\Delta x + 4 - 7x - 4 =$
 $= 7\Delta x$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7\Delta x}{\Delta x} = 7$

5. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 7 = 7$

Ответ: $(7x + 4)' = 7$.

Пример:

Найти производную функции $y = x^2 + 5x - 3$ в точке $x_0 = -1$ по алгоритму.

Решение:

1. $f(x) = (x^2 + 5x - 3)$

2. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 3$

3. $\Delta y = \quad - \quad = \quad - \quad =$
 $= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5x + 5\Delta x - 3 - x^2 - 5x + 3 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5\Delta x$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + 5 + \Delta x)}{\Delta x} = \Delta x + 2x + 5$

5. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x + 5) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 5 = 0 + 2x + 5 = 2x + 5$

$f'(x) = 2x + 5 \implies f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 5 = -2 + 5 = 3$

Ответ: 3.

Пример:

Найти производную функции $y = \frac{x^2}{4} - x$ в точке $x_0 = 2$.

Решение:

$$1. f(x) = \frac{x^2}{4} - x$$

$$f'(x) = \frac{x}{2} - 1$$

$$f'(2) = \frac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$2. f(x + \Delta x) = \frac{(x + \Delta x)^2}{4} - (x + \Delta x)$$

$$3. \Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2}{4} - (x + \Delta x) - \left(\frac{x^2}{4} - x \right) = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{4} -$$

$$-x - \Delta x + x = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{4} - \Delta x = \Delta x \left(\frac{2x + \Delta x}{4} - 1 \right)$$

$$4. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x \left(\frac{2x + \Delta x}{4} - 1 \right)}{\Delta x} = \frac{2x + \Delta x}{4} - 1$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{2x + \Delta x}{4} - 1 \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{4} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = \frac{2x}{4} - 1 = \frac{x}{2} - 1$$

Ответ: 0.

Пример:

Найти производную функции $y = \frac{3}{x^2} - 7$.

Решение:

$$1. f(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 7\right)$$

$$2. f(x + \Delta x) = \frac{3}{(x + \Delta x)^2} - 7$$

$$3. \Delta y = \quad - \quad = \quad - \quad = \frac{3x^2 - 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)}{x^2(x + \Delta x)^2} =$$

$$= \frac{-6x\Delta x - 3(\Delta x)^2}{x^2(x + \Delta x)^2} = \frac{\Delta x(-6x - 3\Delta x)}{x^2(x + \Delta x)^2}$$

$$4. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x(-6x - 3\Delta x)}{x^2(x + \Delta x)^2}}{\Delta x} = \frac{-6x - 3\Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6x - 3\Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-6x - 3\Delta x)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x^2(x + \Delta x)^2)} = \frac{-6 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x - 3 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^2 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)^2} = \frac{-6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3}{x^2} - 7\right)' = -\frac{6}{x^3}.$$

Пример:

● Найти производную функции $y = \sqrt{x+1}$.

Решение:

$$1. f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$2. f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x + 1}$$

$$3. \Delta y = \sqrt{x + \Delta x + 1} - \sqrt{x + 1} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x + 1} - \sqrt{x + 1})(\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x + 1})}{\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x + 1}} =$$

$$= \frac{x + \Delta x + 1 - x - 1}{\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x + 1}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x + 1}}$$

$$4. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x + 1}}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x + 1}}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x + 1}} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x + 1})} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{x + \Delta x + 1} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{x + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}$$

$$\text{Ответ: } (\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$