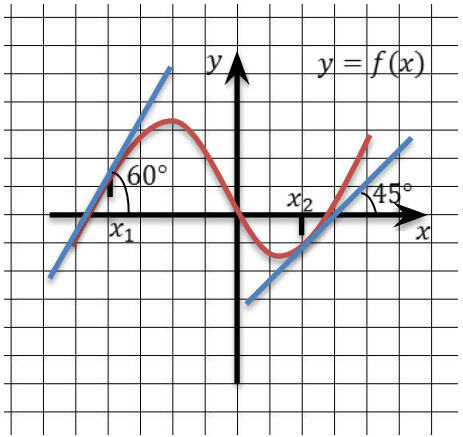
Алгоритм отыскания производной

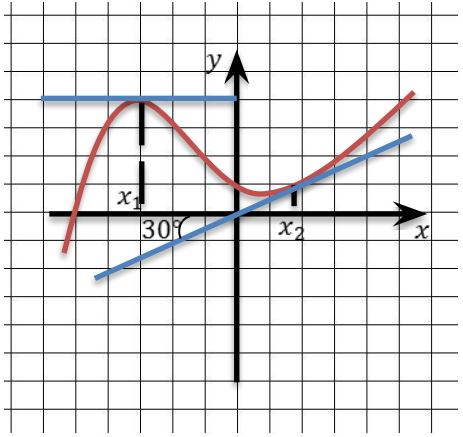
Упражнение:

На рисунках изображены графики некоторых функций. Определите значения производных соответствующих функций в точках x_1 и x_2.



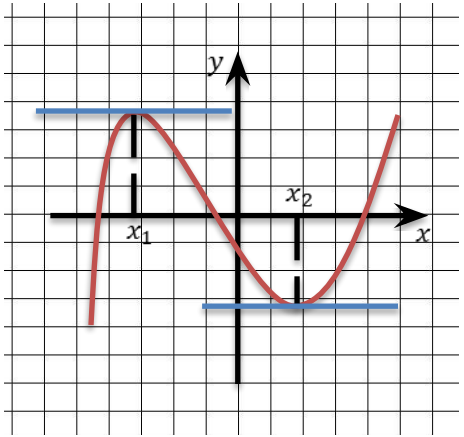
$f'(x_1) = tg\ 60° = \sqrt{3}$

$f'(x_2) = tg\ 45° = 1$



$f'(x_1) = tg\ 0° = 0$

$f'(x_2) = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$



$f'(x_1) = tg\ 0° = 0$

$f'(x_2) = tg\ 0° = 0$

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$:

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример:

Найти производную функции $y = C$.

Решение:

1. $f(x) = C$
2. $f(x + \Delta x) = C$
3. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$
4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

Ответ: $(C)' = 0$.

Пример:

Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$
2. $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x+\Delta x}$
3. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$
4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right) = -\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(x(x+\Delta x)\right)} = -\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0}(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x \cdot x} = -\frac{1}{x^2}$

Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Пример:

Найти производную функции $y = 7x + 4$ по алгоритму.

Решение:

1. $f(x) = (7x + 4)$
2. $f(x + \Delta x) = 7(x + \Delta x) + 4$
3. $\Delta y = \quad - \quad = \quad - \quad = 7x + 7\Delta x + 4 - 7x - 4 =$

   $= 7\Delta x$
4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7\Delta x}{\Delta x} = 7$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 7 = 7$

Ответ: $(7x + 4)' = 7$.

Пример:

Найти производную функции $y = x^2 + 5x - 3$ в точке $x_0 = -1$ по алгоритму.

Решение:

1. $\boldsymbol{f(x) = (x^2 + 5x - 3)}$
2. $\boldsymbol{f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 3}$
3. $\Delta y = \quad - \quad = \quad - \quad =$

   $= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5x + 5\Delta x - 3 - x^2 - 5x + 3 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5\Delta x$
4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + 5 + \Delta x)}{\Delta x} = \Delta x + 2x + 5$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2x + 5) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} 5 = 0 + 2x + 5 = 2x + 5$

$f'(x) = 2x + 5 \Longrightarrow f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 5 = -2 + 5 = 3$

Ответ: 3.

Пример:

Найти производную функции $y = \frac{x^2}{4} - x$ в точке $x_0 = 2$.

Решение:

1. $f(x) = \frac{x^2}{4} + x$

2. $f(x + \Delta x) = \frac{(x+\Delta x)^2}{4} - (x + \Delta x)$

3. $\Delta y = \quad - \quad = \quad - \quad = \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{4} -$

$-x - \Delta x + x = \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{4} - \Delta x = \Delta x\left(\frac{2x+\Delta x}{4} - 1\right)$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x\left(\frac{2x+\Delta x}{4}-1\right)}{\Delta x} = \frac{2x+\Delta x}{4} - 1$

5. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{2x+\Delta x}{4} - 1\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{2x+\Delta x}{4} - \lim\limits_{\Delta x\to 0} 1 = \frac{2x}{4} - 1 = \frac{x}{2} - 1$

Ответ: 0.

$$f'(x) = \frac{x}{2} - 1$$

$$f'(2) = \frac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Пример:

Найти производную функции $y = \frac{3}{x^2} - 7$.

Решение:

1. $f(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 7\right)$

2. $f(x + \Delta x) = \frac{3}{(x+\Delta x)^2} - 7$

3. $\Delta y = \quad - \quad = \quad - \quad = \frac{3x^2 - 3\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{x^2(x+\Delta x)^2} =$

$= \frac{-6x\Delta x - 3(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2} = \frac{\Delta x(-6x - 3\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x(-6x-3\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}}{\Delta x} = \frac{-6x-3\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$

5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-6x-3\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}(-6x-3\Delta x)}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}(x^2(x+\Delta x)^2)} = \frac{-6\lim\limits_{\Delta x \to 0} x - 3\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} x^2 \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0}(x+\Delta x)^2} = \frac{-6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}$

Ответ: $\left(\frac{3}{x^2} - 7\right)' = -\frac{6}{x^3}$.

Пример:

Найти производную функции $y = \sqrt{x+1}$.

Решение:

1. $f(x) = \sqrt{x+1}$
2. $f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x+1}$
3. $\Delta y = \quad = \quad - \quad = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}} =$

$= \frac{x+\Delta x+1-x-1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} 1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\sqrt{x+\Delta x+1}+\lim\limits_{\Delta x \to 0}\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

Ответ: $\left(\sqrt{x+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.