

# Показательное

```
graph TD; A[Показательное] --> B[уравнение – это уравнение,]; A --> C[неравенство – это неравенство,]; B --> D[содержащее переменную в показателе степени]; C --> D;
```

уравнение –  
это уравнение,

неравенство –  
это неравенство,

содержащее переменную  
в показателе степени

## Уравнения

$$1. \quad a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad a > 0, a \neq 1,$$

равносильно уравнению  $f(x) = g(x)$

**(уравнивание показателей)**

Обоснование:

1) Если степени с равными основаниями, отличными от единицы и большими нуля, равны, то показатели равны;

2) функция монотонна на  $\mathbb{R}$ , поэтому каждое свое значение она принимает при единственном значении аргумента.

$$2. \quad a^{f(x)} = b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

## Неравенства

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$$

1) Равносильно неравенству  $f(x) > g(x)$ ,  $a > 1$

2) Равносильно неравенству  $f(x) < g(x)$ ,  $0 < a < 1$ .

(сравнение показателей)

### Обоснование:

а) Показательная функция *монотонно возрастает (убывает)* на  $\mathbb{R}$ , поэтому *большему (меньшему) значению функции соответствует большее значение аргумента.*

б) Если  $a > 1$ , то из неравенства  $a^u > a^v \Rightarrow u > v$   
если  $0 < a < 1$ , то из неравенства  $a^u > a^v \Rightarrow u < v$ .

## Решите двойные неравенства:

$$1 < 5^x < 125$$

**Решение.**  $1 < 5^x < 125$   
 $5^0 < 5^x < 5^3$

**т.к. показательная функция с основанием  $a = 5$ ,  $a > 1$  возрастает на  $\mathbb{R}$ , то большему значению функции соответствует большее значение аргумента, имеем**

$$0 < x < 3$$

**Ответ:**  $(0; 3)$

$$3 < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$$

**Решение.**  $3 < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$   
 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

**т.к. основание степени  $a = 1/3$ ,  $0 < a < 1$ , то из неравенства**

$$a^u < a^t < a^v \Rightarrow \text{неравенство}$$

$$v < t < u \quad \text{Имеем}$$

$$-1 > x \geq -3$$

$$-3 \leq x < -1$$

**Ответ:**  $[-3; -1)$

# *Функционально-графический метод решения неравенства $f(x) < g(x)$*

---

- 1. Подбором найдем корень уравнения  $f(x)=g(x)$ , используя свойства монотонных функций;**
- 2. Построим схематически графики обеих функций, проходящие через точку с найденной абсциссой;**
- 3. Выберем решение неравенства, соответствующее знаку неравенства;**
- 4. Запишем ответ.**

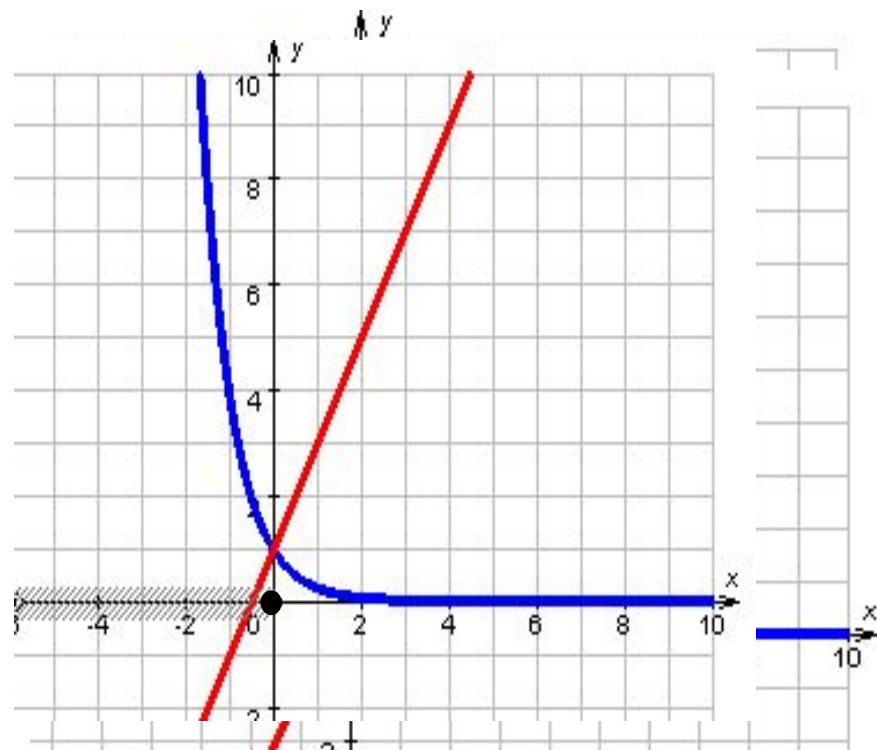
**Решить неравенства,  
используя функционально-графический метод**

1)  $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$

2)  $2^x \leq 3 - \sqrt{x}$

1) Решение.

1.  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  убывает на  $\mathbb{R}$
2.  $g(x) = 2x + 1$  возрастает на  $\mathbb{R}$
3. Уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет не более одного корня
4. Подбором  $x=0$
5. Строим схематически графики через точку  $(0, 1)$
6. Неравенство выполняется при  $x \leq 0$
7. Ответ:  $\left(-\infty; 0\right]$



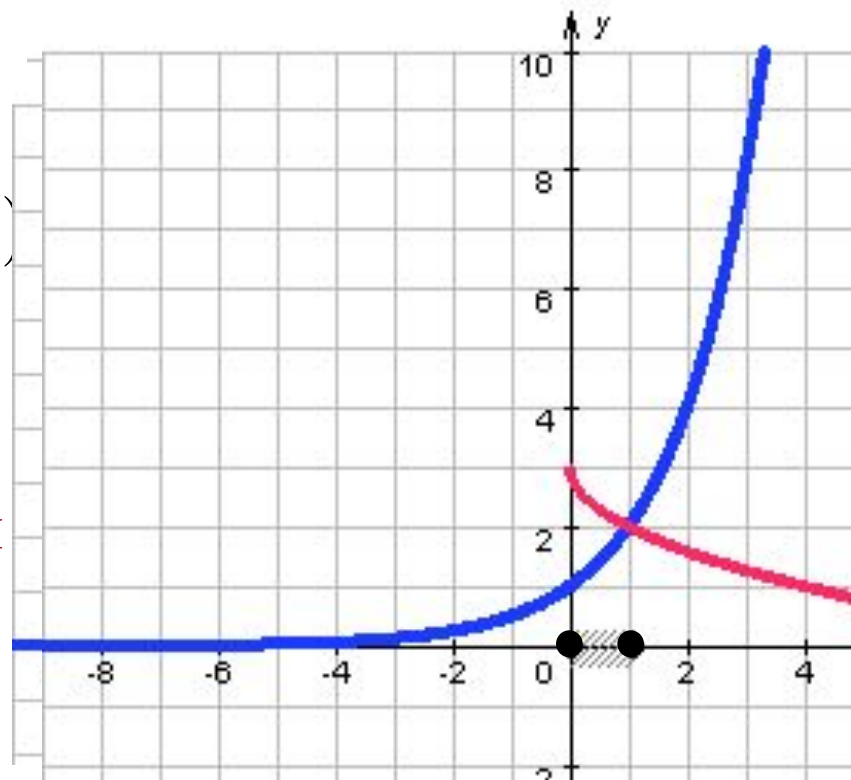
**Решить неравенства,  
используя функционально-графический метод**

1)  $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$

2)  $2^x \leq 3 - \sqrt{x}$

**2) Решение.**

1.  $f(x) = 2^x$  **возраст. на  $\mathbf{R}$**
2.  $g(x) = 3 - \sqrt{x}$  **убывает на  $[0; +\infty)$**
3. Уравнение  $f(x) = g(x)$  **имеет не более одного корня**
4. Подбором  **$x=1$**
5. Строим схематически графики **через точку  $(1, 2)$**
6. Неравенство выполняется при  $0 \leq x \leq 1$
7. Ответ :  $[0; 1]$



- Каков общий вид простейших показательных неравенств?
- Метод решения?

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$$

- 1) Равносильно неравенству  $f(x) > g(x)$ ,  $a > 1$
  - 2) Равносильно неравенству  $f(x) < g(x)$ ,  $0 < a < 1$ .
- (сравнение показателей)

Обоснование: а) Показательная функция монотонно возрастает (убывает) на  $\mathbb{R}$ , поэтому большему (меньшему) значению функции соответствует большее значение аргумента.

б) Если  $a > 1$ , то из неравенства  $a^u > a^v \Rightarrow u > v$   
если  $0 < a < 1$ , то из неравенства  $a^u > a^v \Rightarrow u < v$ .

---