I.Механика. Работа. Кинетическая энергия

- В динамике для оценки действия на тело силы вводят величину работы силы.

$$dA = \vec{F} d\vec{s} = |\vec{F}||d\vec{s}|\cos\alpha ,$$

где $\vec{F}$ - сила, $d\vec{s}$ - перемещение под действием силы, α - угол между силой и перемещением. При

$\alpha < \dfrac{\pi}{2}, A > 0$, при $\alpha > \dfrac{\pi}{2}, A < 0$, при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}, A = 0$.

Мощность - работа в единицу времени $P = \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\vec{F} d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$.

Работа на конечном перемещении равна

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = \int_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{s} = \int_{v_1}^{v_2} m\frac{d\vec{s}}{dt} d\vec{v} = \int_{v_1}^{v_2} m\vec{v} d\vec{v} = \left(m\frac{v^2}{2}\right)_{v_1}^{v_2} = m\frac{v_2^2}{2} - m\frac{v_1^2}{2},$$

Где $m\dfrac{v^2}{2}$ - кинетическая энергия тела. Таким образом, работа

равна изменению кинетической энергии (теорема о кинетической

I.Механика. Консервативные силы.

энергии).
В случае действия нескольких сил, сила F есть их равнодействующая.

Потенциальная энергия

Консервативные – силы, работа которых по перемещению тела не зависит от пути перемещения, а зависит от начального и конечного положения. Кроме контактного взаимодействия существуют взаимодействия с физическими полями – одной из форм существования материи. Тело может изменять свойства окружающего пространства, создавая в нем поле, например, гравитационное, электрическое и т.д. Задать поле – определить в каждой точке пространства силу. В гравитационном поле Земли на любое тело в каждой точке вблизи поверхности действует сила $m\vec{g}$.
Работа консервативных сил по замкнутому пути равна нулю (Рис.11)

I.Механика. Консервативные силы. Потенциальная энергия.

1

2

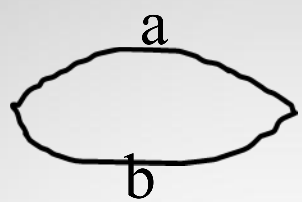


Рис.11

При изменении направления перемещения знак работы меняется на противоположный. $A_{12} = \int_1^2 F(r)\,dr = -A_{01} + A_{02} = U_1 - U_2$

Поле **однородно,** если в любой точке силы, действующие на тело равны по величине и направлению. Если силы не зависят от времени, то поле **стационарно**. Силы в однородном стационарном поле консервативны.

$$A_{12} = \int_1^2 F(r)\,dr$$

- В центральном поле силы $\vec{F}(\vec{r})$ направлены в сторону неподвижного центра, зависят от r и в стационарном поле являются консервативными

$$dA = \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{s} = F(r)\,dr \qquad A_{12} = \int_1^2 F(r)\,dr$$

I.Механика. Консервативные силы. Потенциальная энергия.

В поле консервативных сил можно ввести **потенциальную энергию**, определив ее как взятую с обратным знаком работа по перемещению материальной точки из начала координат в данную точку *P*: $U\left(P\right) = -A_{0P}$. С другой стороны работа равна

$$A_{12} = \int_{1}^{2} F(r)dr = -A_{01} + A_{02} = U_1 - U_2$$

Таким образом, работа в поле консервативных сил равна изменению потенциальной энергии . Для бесконечно малого перемещения по осям координат для работы можно написать:

$$dA = F_x dx = -dU, \quad F_y dy = -dU, \quad F_z dz = -dU.$$

I.Механика. Консервативные силы. Потенциальная энергия.

Тогда сила связана с потенциальной энергией следующим соотношением $\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\vec{i} - \frac{dU}{dy}\vec{j} - \frac{dU}{dz}\vec{k} = -gradU$,

где $$\overrightarrow{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Градиент направлен в сторону максимального увеличения соответствующей величины.

Закон сохранения энергии.

Для материальной точки $dA = d\left(m\frac{v^2}{2}\right) = -dU$, $d\left(m\frac{v^2}{2}\right) + dU = 0$ и

$$E_{кин} + U = const$$

Это есть закон сохранения энергии: полная энергия материальной точки равная сумме кинетической и потенциальной энергий сохраняется. Этот закон связан с однородностью времени (на оси времени нет выделенных точек).

I.Механика. Закон сохранения энергии

При рассмотрении механической системы необходимо учитывать силы взаимодействия между ее материальными точками. Если они консервативны, то можно ввести потенциальную энергию их взаимодействия как потенциальную энергию одной материальной точки в поле других точек.

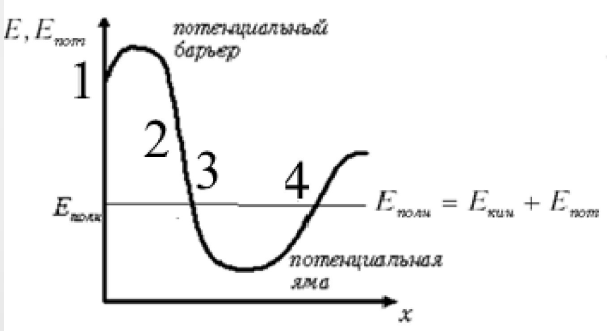
Изменение кинетической энергии механической системы равно работе всех сил (внешних и внутренних), приложенным к ее материальным точкам, а изменение потенциальной энергии системы равно работе всех консервативных сил (внутренних и внешних), взятых с обратным знаком.

$$\Delta E_{кин} = A_{конс} + A_{неконс} = -\Delta\left(U_{внешн} + U_{внутр}\right) + A_{неконс}$$

Изменение механической энергии $\Delta E_{мех} = \Delta\left(E_{кин} + U\right) = A_{неконс}$,
где U – сумма потенциальной энергии взаимодействия материальных точек и потенциальной энергии системы во внешнем поле. Если неконсервативные силы отсутствуют , то полная энергия

I.Механика. Метод Потенциальных кривых

механической системы сохраняется. Системы в которых действуют только консервативные силы (как внутренние, так и внешние) называются **консервативными**. В консервативных системах полная механическая энергия сохраняется. Неконсервативные силы называют диссипативными, например – сила трения, их действие приводит к диссипации (рассеянию) энергии.



Метод Потенциальных кривых

Рассмотрим простейший случай одномерного движения вдоль оси x на графике зависимости потенциальной энергии от координаты x. Участок 1-2 (Рис.12) называют потенциальным барьером, 3-4 потенциальной ямой. Горизонтальная прямая пересекающая кривую в двух точках соответствует некоторому значению полной механической энергии $E_{полн} = E_{кин} + E_{пот}$.

Рис.12

Справа от точки минимума производная – тангенс угла наклона касательной к потенциальной кривой положителен, а сила

I.Механика. Метод Потенциальных кривых

$F = -\frac{dU}{dx}$ отрицательна.

Слева от минимума тангенс угла наклона касательной отрицателен, а сила положительна. В точке минимума сила равна нулю, т.е. это есть положение равновесия. При смещении от этой точки вправо возникает сила возвращающая материальную точку в положение равновесия. Тот же результат будет и при смещении влево. Поэтому равновесие в этом случае является устойчивым. Вблизи максимума потенциального барьера положение равновесия неустойчиво. Пусть $E_{полн}$ – полная энергия материальной точки. Полная энергия $E_{полн} = E_{кин} + E_{пот} \geq E_{пот}$. В точках 3 и 4 пересечения прямой полной энергии с потенциальной кривой полная энергия равна потенциальной, поэтому движение на участке 3-4 возможно, а вне этого отрезка, где $E_{полн} < E_{пот}$ невозможно.

I.Механика. Неупругий и упругий удары.

- Пусть два тела движутся вдоль прямой, соединяющей их центры, а после столкновения движутся вместе. Такой удар называется неупругим и центральным. Запишем закон сохранения импульса,

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

где $m_1, \vec{v}_1$ - масса и скорость первого тела, $m_2, \vec{v}_2$ - масса и скорость второго тела, $\vec{v}$ - скорость их совместного движения. При неупругом ударе действуют диссипативные силы, поэтому полная энергия не сохраняется.

Рассмотрим упругий центральный удар двух тел, движущихся вдоль оси *x*, и запишем для него законы сохранения импульса и энергии.

$$m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = m_1u_{1x} + m_2u_{2x}$$

$$\frac{m_1v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2v_{2x}^2}{2} = \frac{m_1u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2u_{2x}^2}{2}$$

Перепишем уравнения. Собрав слева слагаемые, относящиеся к

I.Механика. Неупругий и упругий удары.

первому телу, а справа ко второму.

$$m_1(v_{1x}^2 - u_{1x}^2) = m_2(v_{2x}^2 - u_{2x}^2)$$
$$m_1(v_{1x} - u_{1x}) = m_2(u_{2x} - v_{2x})$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$(v_{1x} + u_{1x}) = (u_{2x} + v_{2x})$$

Добавим к нему уравнение $m_1(v_{1x} - u_{1x}) = m_2(u_{2x} - v_{2x})$ и решив полученную систему уравнений, получим.

$$\vec{v}_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_{1x} - (m_1 - m_2)\vec{v}_{2x}}{m_1 + m_2}$$

Примеры решения задач

Задача 22. Найдите мощность в момент времени $t = 2$ с, развиваемую силой, приложенной к материальной точке массой $m =$.

I.Механика. Неупругий и упругий удары.

0,5 кг, движение под действием которой происходит по закону: $x = 5 - 3t^2 + 5t^3 - t^4$ (м).

- **Решение.** Мощность определяется соотношением $P = F_x v_x$
- Скорость равна $v_x = \dfrac{dx}{dt} = -6t + 15t^2 - 4t^3$;

сила $F_x = m\dfrac{dv_x}{dt} = m\left(-6 + 30t - 12t^2\right)$, где m – масса точки.

Мощность в момент времени $t = 2$с равна:

$$P = m\left(-6t + 15t^2 - 4t^3\right)\left(-6 + 30t - 12t^2\right) = 48$$ Вт.

Задача 23. Найдите кинетическую энергию тела, движущегося из состояния покоя из начала координат вдоль оси x под действием силы $F_x = 5x^4$ в точке $x = 3$ м. Потенциальная энергия тела не меняется.

Решение. Работа силы равна изменению кинетической энергии.

I.Механика. Неупругий и упругий удары.

Работа на бесконечно малом отрезке оси x равна $dA=F_x\,dx$, а на конечном участке $\Delta E_{кин} = A = \int_0^x 5x^4 dx = x^5\Big|_0^3 = 243$ Дж

Задача 24. Найдите потенциальную энергию камня, брошенного с поверхности земли под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, в высшей точке его траектории, если его кинетическая энергия в начальный момент равна 40 Дж. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. В высшей точке траектории скорость камня равна $v_0 \cos\alpha$. В соответствии с законом сохранения энергии потенциальная энергия равна:

$$E_{пот} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} = \frac{mv_0^2}{2}(1-\cos^2\alpha) = 10 \text{ Дж.}$$

Задача 25. Найдите количество тепла Q, выделившееся при неупругом столкновении тела массой $m_1 = 0{,}4$ кг, двигавшегося со скоростью $v = 6$ м/с, с неподвижным телом массой $m_2 = 0{,}2$ кг.

I.Механика. Неупругий и упругий удары.

Решение. Запишем законы сохранения энергии и импульса для неупругого удара:

$$2m_2v_0 = 3m_2v,$$

$$\frac{2m_2v_0^2}{2} = \frac{3m_2v^2}{2} + Q,$$

где – скорость тел после удара. Решая эту систему уравнений, получим:

$$Q = \frac{2m_2v_0^2}{2} - \frac{3m_2v^2}{2} = \frac{2m_2v_0^2}{2} - \frac{3m_2(2/3v_0)^2}{2} = \frac{m_2v_0^2}{3} = 2,4 \text{ Дж}$$

- **Задача 26.** Определите кинетическую энергию ствола орудия вследствие отдачи при вылете снаряда массой *m* = 25 кг с кинетической энергией 140 кДж, если масса ствола орудия *M* = 175 кг.

Решение. Из закона сохранения импульса следует, что $mv = MV$ и $V = \frac{mv}{M}$, где v – скорость снаряда, *V* –скорость ствола.

Кинетическая энергия ствола после выстрела равна:

I.Механика. Неупругий и упругий удары.

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{Mm^2v^2}{2M^2} = \frac{m}{M}\frac{mv^2}{2} = 20 \text{ кДж.}$$

Задача 27. Шар массой 3*m*, движущийся со скоростью v_0 = 10 м/с, испытывает упругое центральное соударение с покоящимся шаром массой *m*. Найдите скорость первого шара после удара.

Решение. Запишем законы сохранения импульса и энергии для этого упругого удара:

$$3mv_0 = 3mv_1 + mv_2,$$

$$\frac{3mv_0^2}{2} = \frac{3mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

где v_2 – скорость второго шара после удара.

Соберем в левой части уравнений слагаемые, относящиеся к первому шару:

I.Механика. Неупругий и упругий удары.

$$3m(v_0 - v_1) = mv_2,$$

$$\frac{3m(v_0^2 - v_1^2)}{2} = \frac{mv_2^2}{2}.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим $v_0 + v_1 = v_2$ и система уравнений примет вид:

$$3(v_0 - v_1) = v_2,$$

$$v_0 + v_1 = v_2.$$

Решая эту систему уравнений, получим $v_1 = \frac{1}{2}v_0 = 5$ м/с.

Задача 28. . Потенциальная энергия частицы имеет вид: $E_p = 2x^3 + 3y^2 - z^5$(Дж). Найдите величину силы, действующей на частицу, когда она находится в точке с координатами (2,3,1).

- **Решение.** Сила определяется следующим соотношением:

$$F = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) = -\left(6x^2\vec{i} + 6y\vec{j} - 5z^4\vec{k}\right) = -(24\vec{i} + 18\vec{j} - 5\vec{k})$$

- Откуда $F = \sqrt{24^2 + 18^2 + 5^2} = 30,4$ н.

I.Механика. Неупругий и упругий удары.

Задача 29. Частица находится в центральном поле сил, где ее потенциальная энергия зависит от расстояния до центра поля по закону: $E_p = a/r^2 - b/r$, где $a = 3\cdot10^{-33}$ Дж·м^2 , $b = 6\cdot10^{-24}$ Дж·м. Найдите расстояние r_0, соответствующее равновесному положению частицы.

Решение. В положении равновесия сила, действующая на частицу равна нулю: $F = -\frac{dE_p}{dr} = \frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2} = 0$, откуда положению равновесия соответствует координата $r_0 = \frac{2a}{b} = \frac{2\cdot3\cdot10^{-33}}{6\cdot10^{-24}} = 1$нм.

- **Задача 30.** Найдите, сколько процентов от первоначальной кинетической энергии $E_{кин0}$ тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0=30 м/с, составляет его кинетическая энергия $E_{кин}$ на высоте 15 м. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. В соответствии с законом сохранения энергии:

$E_{кин0} = E_{кин} + E_{пот}$, где $E_{пот}$- конечная потенциальная энергия.

I.Механика. Неупругий и упругий удары.

$E_{кин} = E_{кин0} - E_{пот} = \frac{mv_0^2}{2} - mgh$, что составляет

$$\frac{E_{кин}}{E_{кин0}} = \frac{\frac{mv_0^2}{2} - mgh}{\frac{mv_0^2}{2}} = 1 - \frac{2gh}{v_0^2} = 1 - \frac{300}{900} = 0,67 = 67\%$$

от первоначальной кинетической энергии.