

## ТЕМА 4: Складові похибок вимірювання

Абсолютна похибка вимірювання  $\Delta x$  — це різниця між результатом вимірювання  $x$  та істинним значенням вимірюваної фізичної величини  $X$  («виміряне мінус істинне»):

$$\Delta_x = x - X \quad (5.1)$$

виражена в одиницях вимірюваної фізичної величини.

Відносна похибка вимірювання  $\delta_x$  дорівнює відношенню абсолютної похибки  $\Delta_x$  до істинного або дійсного значення вимірюваної фізичної величини й виражається в частках одиниці :

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{X} \approx \frac{\Delta_x}{x_D} \quad (5.2)$$

або в процентах:

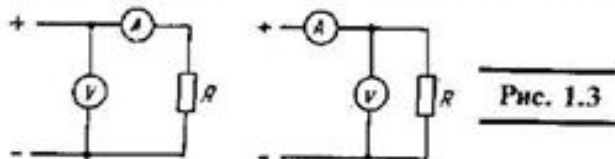
$$\delta_{x\%} = 100 \frac{\Delta_x}{X} \approx 100 \frac{\Delta_x}{x_D} \quad (5.3)$$

### Методична складова похибки вимірювання

Неминуча поява методичної складової похибки також і в разі використання наближеної формули (1.5), що відображує функціональний зв'язок між опором резистора  $r_t$  та його температурою  $t$ . Застосування точнішої формули

$$r = r_0(1 + \alpha \cdot t + \beta \cdot t^2) \quad (5.4)$$

дає змогу зменшити методичну складову похибки, але не до нуля, оскільки і ця формула є наближеною



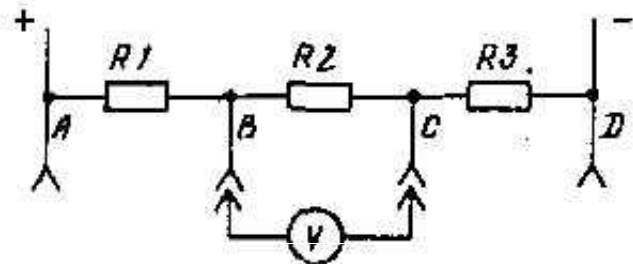


Рис. 1.4

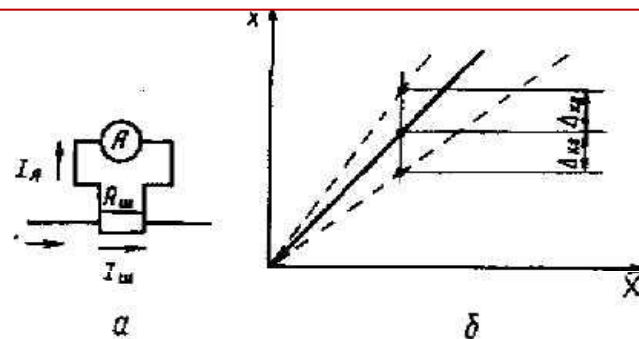


Рис. 1.6

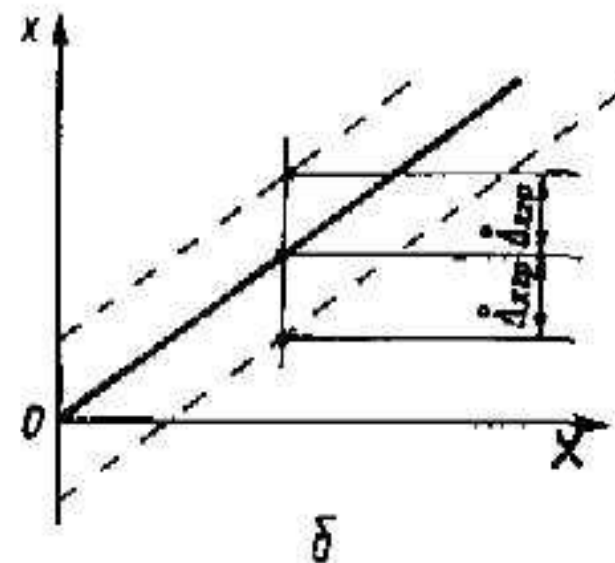
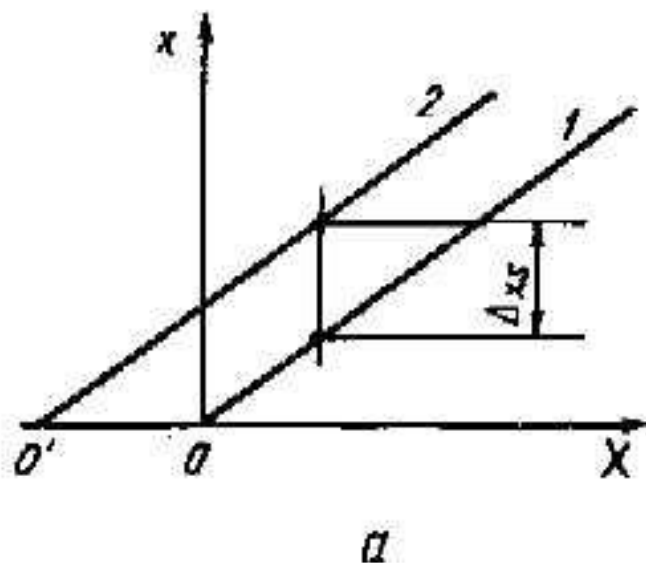


Рис. 1.5

Інструментальна складова (1.4), мультиплікативна похибка (1.5)  
адитивна похибка (1.6)

## ТЕМА 5: Систематичні похибки вимірювання

Інструментальну систематичну похибку можна виявити перевіркою робочою засобу вимірювань за допомогою зразкового, що має виїду точність. Значення абсолютних похибок  $\Delta_x$  вимірювального приладу обчислюють за формулою

$$\Delta_x = x - x_d \quad (6.1)$$

де  $x$  — показ приладу, що повіряється;  $x_d$  — дійсне значення вимірюваної величини, встановлене за допомогою зразковою вимірювального приладу.

Інструментальну похибку, яка виникає від взаємодії з об'єктом вимірювання, також можна виявити, проаналізувавши умови проведення експерименту.

Експериментальне виключення систематичних похибок здійснюють на основі методу заміщення. Для цього треба спочатку виміряти невідому фізичну величину, в результаті чого дістати вираз

$$x_n = X + \Delta_{x,s}, \quad (6.2)$$

де  $x_n$  - показ приладу;  $X$  - значення невідомої величини;  $\Delta_{x,s}$  - систематична складова похибки.

Нічого не змінюючи у вимірювальній установці, слід ввімкнути замість  $X$  регульовану міру  $X_m$  і дібрати таке її значення, за якого досягається попередній показ приладу. Тоді

$$x_n = X_m + \Delta_{x,s}, \quad (6.3)$$

Порівнюючи (6.3) та (6.4), дістанемо значення невідомої величини :

$$X = X_m \quad (6.4)$$

та обчислимо значення систематичної складової похибки

$$\Delta_{x,s} = x_n - X_m \quad (6.5)$$

Якщо джерело систематичної похибки має спрямовану дію, можна компенсувати її, здійснивши експеримент двічі, — так, щоб систематична похибка увійшла в результати вимірювань з протилежним знаком:

$$x_{n1} = X + \Delta_{x,s}, \quad x_{n2} = X - \Delta_{x,s}, \quad (6.6)$$

Звідси

$$X = (x_{n1} + x_{n2})/2; \quad \Delta_{x,s} = (x_{n1} - x_{n2})/2 \quad (6.7)$$

Інструментальна похибка, що залежить від неточності аналогового вимірювального приладу, обчислюється за формулою:

$$\theta = kN/100 \quad (6.8)$$

Величина  $\theta$  називається надійною межею невиключених залишків систематичних похибок. Якщо таких залишків кілька ( $\theta_1, \theta_2, \dots$ ), то

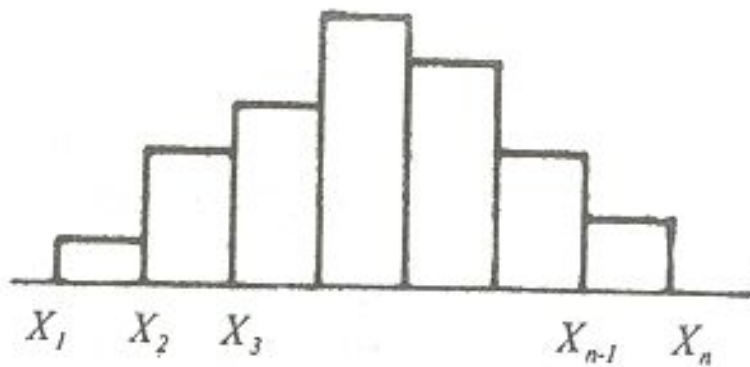
$$\theta = 1,1 \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2} \quad (6.9)$$

де  $\theta_i$  - межа  $i$  - ї невиключеної систематичної похибки;  $m$  —число цих похибок ( $1 < m < 4$ ).

Формула (6.10) відповідає ймовірності  $P = 95 \%$

## ТЕМА 6: Випадкові похибки вимірювання

|               |             |             |             |             |
|---------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Інтервал      | $x_1 - x_2$ | $x_3 - x_3$ | $x_3 - x_4$ | $x_4 - x_5$ |
| Частота $m_i$ | $m_1$       | $m_2$       | $m_3$       | $m_4$       |



a)

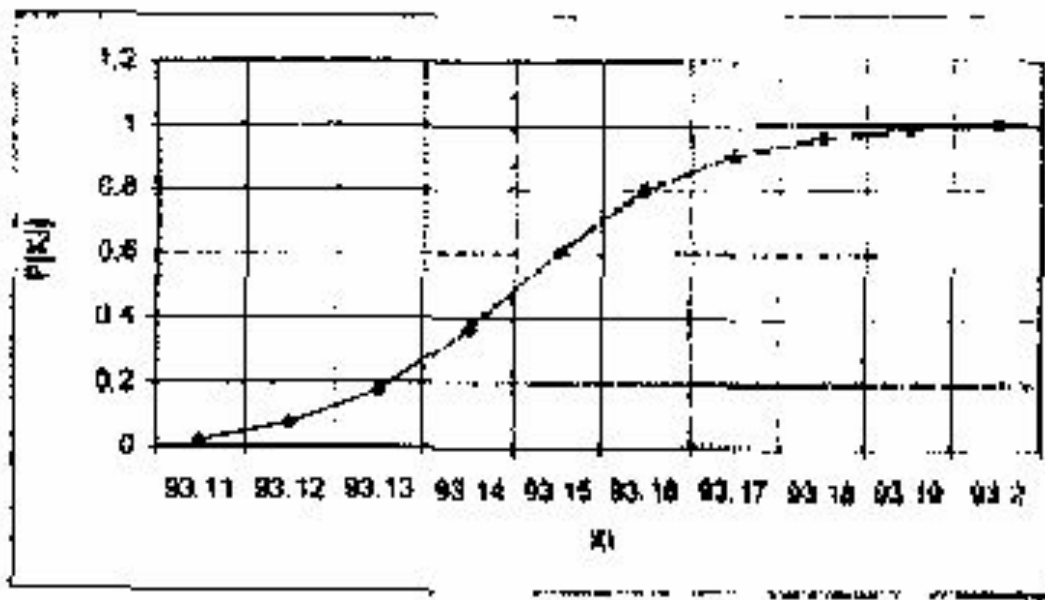
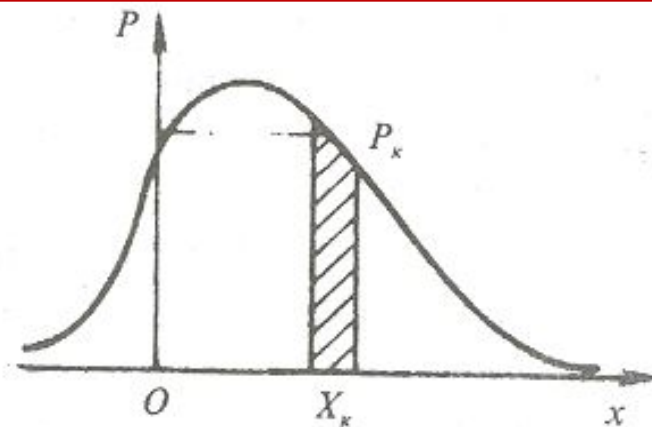


Рисунок 7.2 - Графік функції розподілу ймовірностей

Щільність ймовірності описується виразом  $p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}$ , (7.1) де  $\bar{x}, \sigma_x$  – відповідно середнє арифметичне і СКВ результатів спостережень.

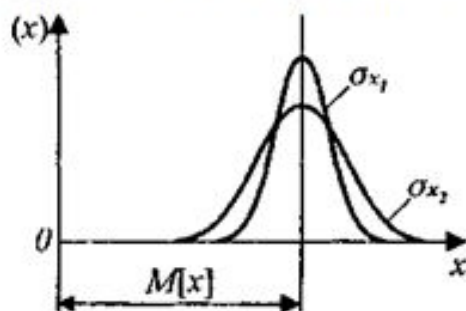


Рис. 7.3. Диференціальні функції нормального закону розподілу  
Функція розподілу нормальної випадкової величини (інтегральна функція розподілу) має такий вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} dx. \quad (7.1)$$

Вираз для інтегральної функції нормованого нормального розподілу є таким:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

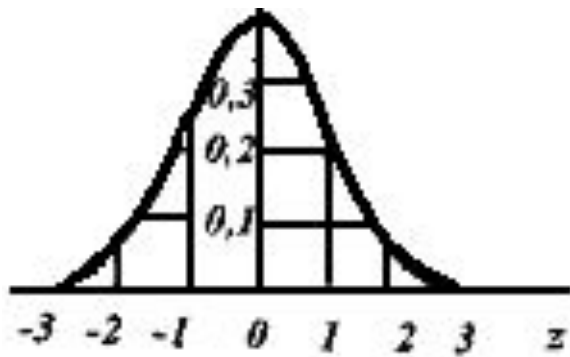


Рис. 7.4 Диференціальна функція ННЗР

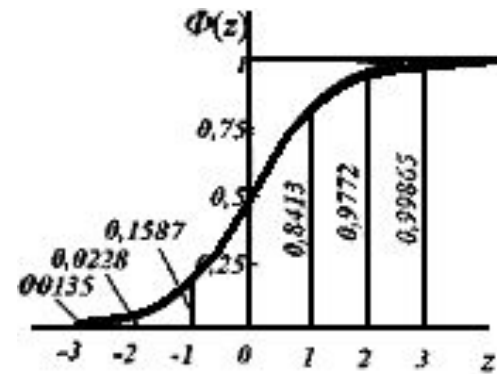


Рис. 7.5 Інтегральна функція ННЗР

За допомогою інтегральної функції ННЗР  $\Phi(z)$  можна визначити довірчу ймовірність  $\bar{P}$  попадання однократного спостереження  $x$  в заданій границі  $(M[x] - z_p \cdot \sigma_x) \dots (M[x] + z_p \cdot \sigma_x)$ . Це здійснюють таким чином:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \bar{P} \{ (M[x] - z_p \cdot \sigma_x) < x \leq (M[x] + z_p \cdot \sigma_x) \} = \bar{P} \{ -z_p < z \leq +z_p \} = \\ &= \int_{-z_p}^{+z_p} p(z_p) dz = \Phi(+z_p) - \Phi(-z_p) = 2\Phi(+z_p) - 1. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Аналогічним чином можна визначити довірчу ймовірність  $\bar{P}$  попадання однократного спостереження  $x$  і в несиметричну відносно осі  $Oz$  зону. В цьому випадку

$$\bar{P} = \Phi(z_\epsilon) - \Phi(z_\eta), \quad (7.4)$$

де  $z_\epsilon$  і  $z_\eta$  - відповідно верхня і нижня границі несиметричної зони;  $\Phi(z_\epsilon)$  і  $\Phi(z_\eta)$  - значення інтегральної функції для  $z = z_\epsilon$  і  $z = z_\eta$  які отримані згідно додатку Г.

Вказані вище граничні значення випадкової величини  $(M[x] - z_p \cdot \sigma_x)$  і  $(M[x] + z_p \cdot \sigma_x)$  називаються довірчими границями результату спостереження  $x$  з довірчою ймовірністю  $\bar{P}$ .

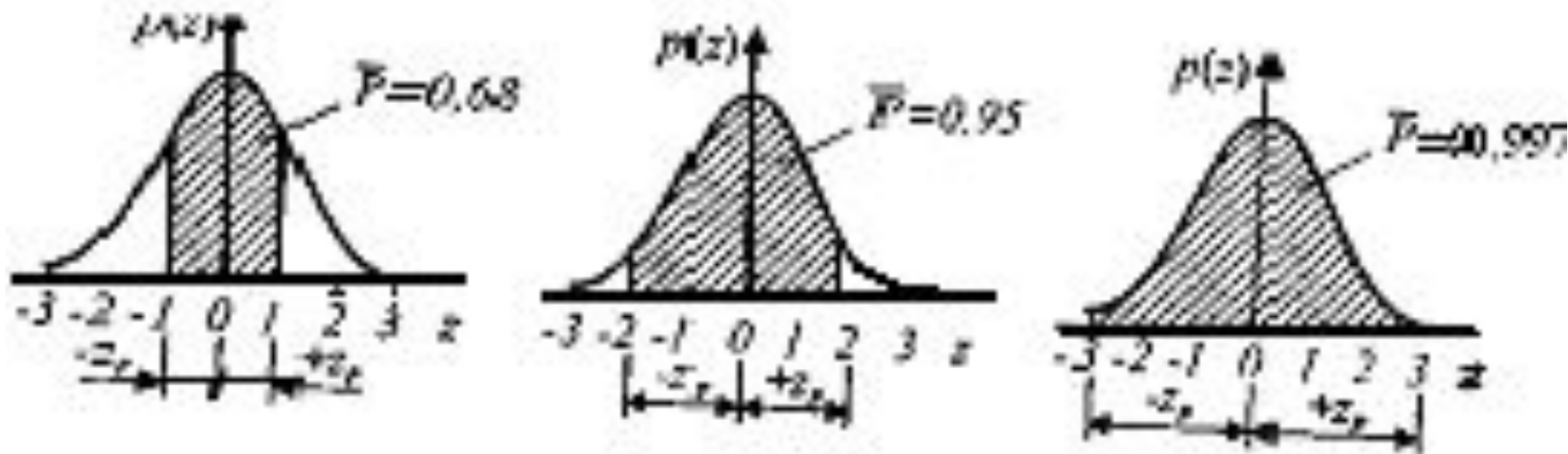


Рис. 7.6 Нормовані відхилення і ймовірність випадкових вимірювань з цими відхиленнями

Ймовірність  $P$  попадання результату спостереження  $x$  в симетричний інтервал  $(\bar{x} - z_p \cdot \sigma_x) \dots (\bar{x} + z_p \cdot \sigma_x)$  для нормального закону розділу результатів спостережень також може бути визначена ще таким чином:

$$\bar{P} = \Phi(+z_p) - \Phi(-z_p) = 2\Phi(+z_p) - 1 = 2\Phi_0(z_p) \quad (7.5)$$

де функції  $\Phi_0(z_p)$  - це нормована функція Лапласа (інтеграл Лапласа), яка в свою чергу визначається так:

$$\Phi_0(z_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (7.6)$$

Значення  $\Phi_0(z_p)$  приведені в додатку Е, а також можуть бути визначені згідно () таким чином:



$$\Phi_0(z_p) = \Phi(+z_p) - 0,5, \quad (7.7)$$

$\Phi(+z_p)$  - значення нормованої інтегральної функції, що приведені в додатку Д.

Нерівність у перших фігурних дужках виразу () легко може бути перетворена ще до такого виду:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \bar{P} \{M[x] - z_p \cdot \sigma_x < x \leq M[x] + z_p \cdot \sigma_x\} = \\ &= \bar{P} \{\bar{x} - z_p \cdot \sigma_x < M[x] \leq \bar{x} + z_p \cdot \sigma_x\} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Це означає, що істинне значення вимірюваної величини знаходиться в межах довірчого інтервалу  $(\bar{x} - z_p \cdot \sigma) \dots (\bar{x} + z_p \cdot \sigma)$  з відповідною довірчою ймовірністю  $\bar{P}$ .

**Довірчою границею випадкового відхилення результатів спостережень**, що відповідає довірчій ймовірності  $\bar{P}$ , називається половина довірчого інтервалу  $(-z_p \cdot \sigma \dots +z_p \cdot \sigma)$ .

Таким чином, результат вимірювання, визначений на основі однократного спостереження  $x_1$ , записується таким чином:

$$x = x_1 \pm z_p \cdot \sigma_x, \quad \bar{P} = 2 \cdot \Phi(+z_p) - 1 = 2 \cdot \Phi_0(+z_p), \quad (7.9)$$

де  $\sigma_x$  - СКВ даного виду вимірювань, яке повинно бути наперед відомим або вказаним в нормативній документації (атестаті) на даний вид вимірювання;  $z_p$  - коефіцієнт довіри, яким задаються і який визначає вибрану довірчу ймовірність відхилень.

## Числові характеристики випадкових похибок

Математичне сподівання  $M[x]$  визначається як початковий момент першого порядку кривої розподілу:

$$M[x] = a_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx. \quad (7.10)$$

Вираз для математичного сподівання похибки вимірювань є таким:

$$\begin{aligned} M[\Delta] &= M[(x - Q)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - Q) \cdot p(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} Q \cdot p(x) dx = M[x] - Q \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = M[x] - Q = \Delta_m. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Систематична похибка визначається як відхилення математичного сподівання результатів спостережень від істинного значення вимірюваної величини:

$$\Delta_m = M[x] - Q, \quad (7.12)$$

а випадкова похибка - це різниця між результатом однократного спостереження і математичним сподіванням результатів:

$$\Delta_{p_i} = x_i - M[x], \quad (7.13)$$

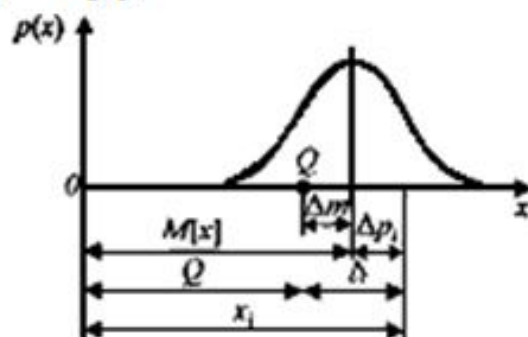


Рис. 7.3. Характеристики систематичної і випадкової похибок

## Параметри розподілу випадкових похибок

Початковим моментом  $r$ -го порядку випадкової величини  $x$  є число, яке визначається таким чином:

$$a_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot p(x) dx, \quad (7.14)$$

яке ще можна назвати математичним сподіванням  $r$ -ої степені випадкової величини  $x$ .

Найчастіше як параметр розподілу випадкових величин використовується початковий момент першого порядку

$$a_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx = M[x], \quad (7.15)$$

який називається математичним сподіванням випадкової величини. Для дискретної випадкової величини математичне сподівання (вибірковий початковий момент першого порядку) визначається так:

$$a_1 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{P}_i = M[x], \quad (3.16)$$

де  $\bar{P}_i$  – ймовірність появи випадкового значення  $x_i$  яку визначають як  $1/n$ , якщо  $n$ -загальна кількість спостережень, або як відношення кількості однакових спостережень в кожній із  $n$  таких груп до загальної кількості спостережень.

В практиці визначення параметрів розподілу в деяких випадках використовують початковий момент другого порядку

$$a_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x) dx, \quad (7.17)$$

який для дискретних величин має назву вибіркового моменту другого порядку і який визначають таким чином:

$$a_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \bar{P}_i, \quad (7.18)$$

Початкові моменти вищих порядків практично не використовуються для характеристики розподілу випадкових величин.

Центральним моментом k-го порядку (k-им центральним моментом) випадкової величини x називається математичне сподівання k-ої степені її відхилення від математичного сподівання  $M[x]$ :

$$m_k = M[x - M[x]]^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^k \cdot p(x) dx. \quad (7.19)$$

Перший центральний момент завжди дорівнює нулю:

$$m_1 = M[x - M[x]] = M[x] - M[x] = 0$$

В практиці визначення параметрів розподілу широко використовується центральний момент другого порядку, який ще називається дисперсією:

$$m_2 = D[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^2 \cdot p(x) dx. \quad (7.20)$$

Для дискретних величин вибіркового центральний момент другого порядку визначають так:

$$m_2 = D[x] = \sum_{i=1}^n (x_i - M[x])^2 \cdot \bar{P}_i. \quad (7.21)$$

Третій центральний момент  $m_3$ , розраховується таким чином:

$$m_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^3 \cdot p(x) dx, \quad (7.22)$$

а для дискретної випадкової величини вибіркового центральний момент третього порядку визначають так:

$$m_3 = \sum_{i=1}^n (x_i - M[x])^3 \cdot \bar{P}_i, \quad (7.23)$$

використовують для оцінки асиметрії кривої розподілу за допомогою коефіцієнта асиметрії

$$k_{ac} = m_3 / \sigma^3. \quad (7.24)$$

Центральний момент четвертого порядку, визначається таким чином:

$$m_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^4 \cdot p(x) dx, \quad (7.25)$$

а для дискретної випадкової величини так:

$$m_4 = \sum_{i=1}^n (x_i - M[x])^4 \cdot \bar{P}_i, \quad (7.26)$$

використовують для оцінки плосковершинності або гостровершинності кривої розподілу за допомогою коефіцієнта ексцесу, який в свою чергу розраховують так:

$$k_{\text{екс}} = m_4 / \sigma^4 - 3. \quad (7.27)$$

Для нормального закону розподілу  $k_{\text{екс}}=0$ , для гостровершинної кривої розподілу  $k_{\text{екс}}>0$ , а для плосковершинної  $k_{\text{екс}}<0$  (рис. 7.5).

Між центральними і початковими моментами є такі залежності, які мають практичне застосування:

$$\begin{aligned} m_2 &= a_2 - a_1^2, \\ m_3 &= a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3, \\ m_4 &= a_4 - 4a_1a_3 + 6a_1^2a_2 - 3a_1^4, \end{aligned} \quad (7.28)$$

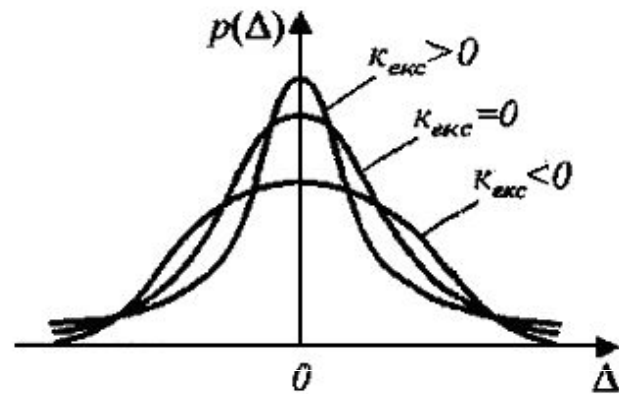
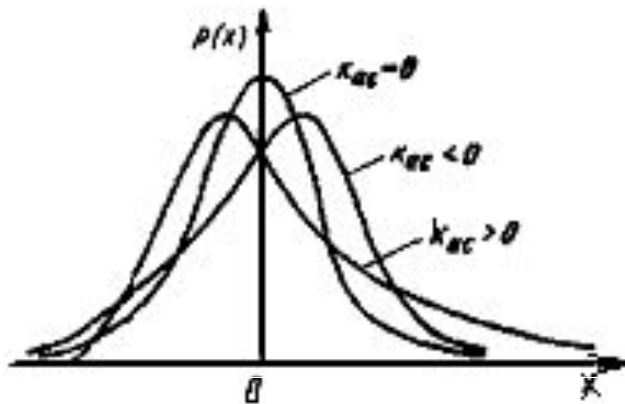


Рис 7.4 Залежність форми кривих розподілу від коефіцієнта асиметрії

Рис. 7.5. Залежність форми кривої розподілу від коефіцієнта ексцесу

## ТЕМА 7: Динамічні похибки

Динамічна похибка на виході ЗВТ

$$\Delta_0(t) = y(t) - y_n(t). \quad (8.1)$$

Часова динамічна похибка

$$\Delta_0(t) = y(t) - y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t-\tau) - g_n(t-\tau)]x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [h'(t-\tau) - h'_n(t-\tau)]x(\tau)d\tau. \quad (8.2)$$

Якщо  $x(t) = X_0 l(t)$  тобто в момент часу  $t=0$  на вхід ЗВТ подали сигнал сталого значення  $X_0$ , то динамічна похибка

$$\Delta_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [h'(\tau) - h'_n(\tau)]X_0 l(t-\tau)d\tau = X_0 [h(t) - h_n(t)]. \quad (8.3)$$

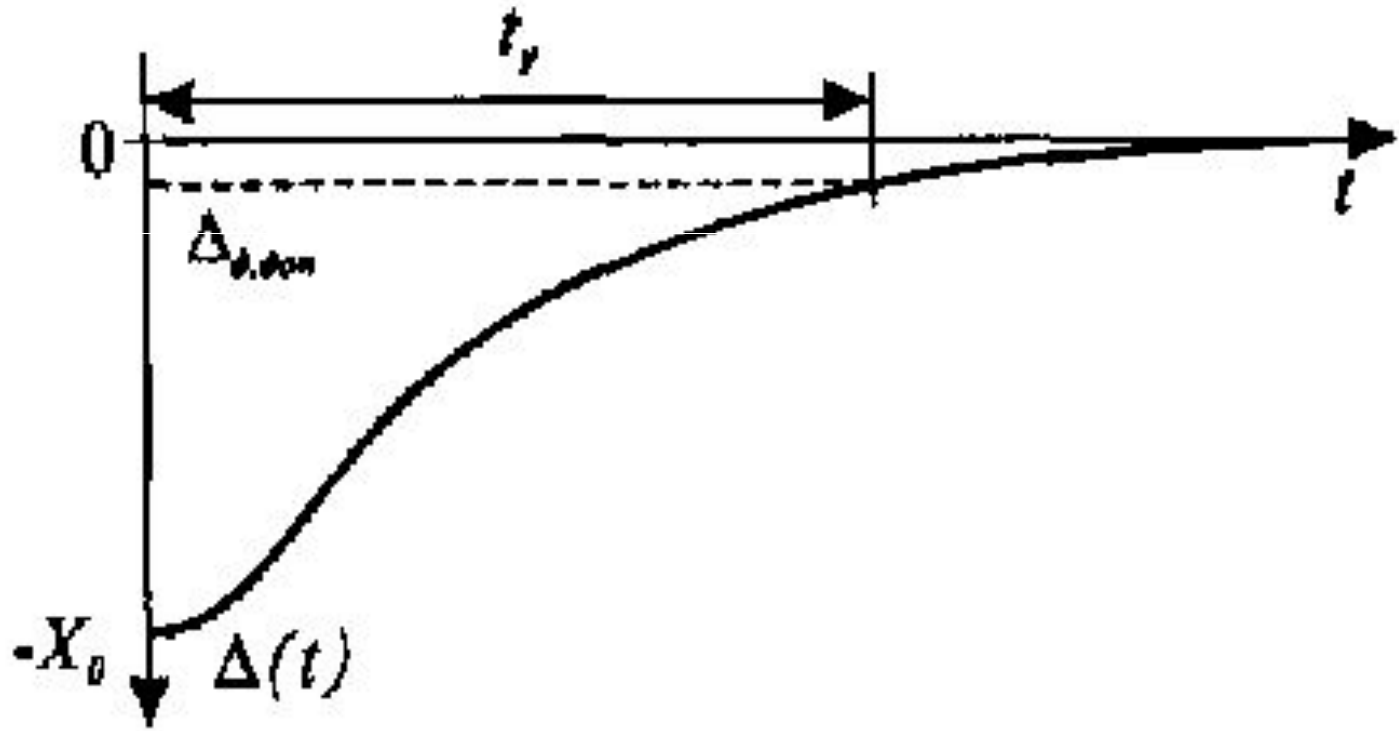


Рисунок 8.1 – Часова динамічна похибка та час усталення вихідного сигналу

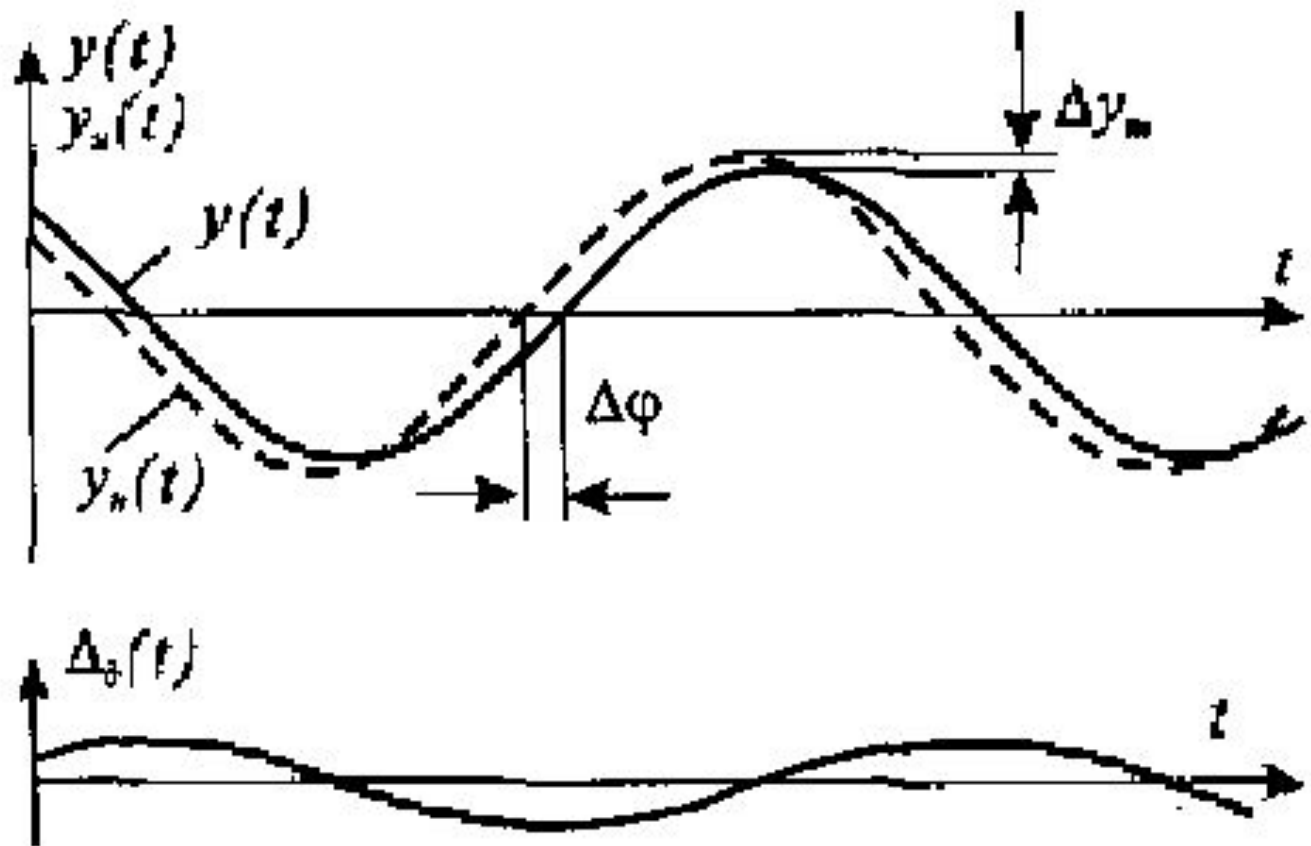


Рисунок 8.2 – Динамічна похибка при подачі на вхід ЗВТ гармонійного сигналу



Відносну зміну амплітуди вихідного сигналу від необхідного (номінального) значення  $x_m A_n(\omega)$  називають амплітудно-частотною похибкою (відносною) ЗВТ (рис. 8.3),

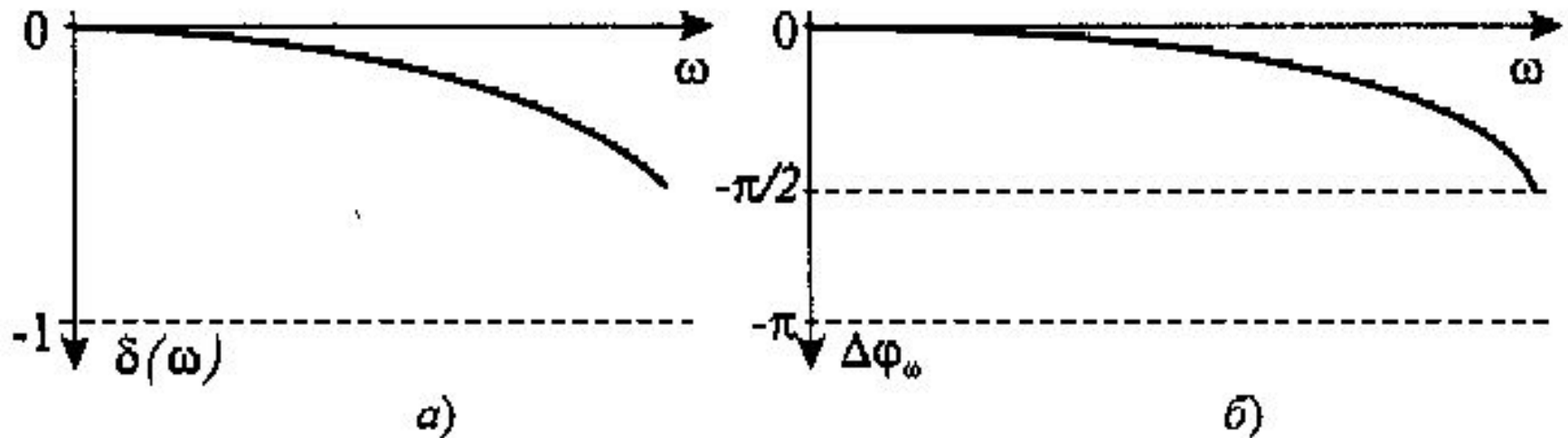
$$\delta_\omega = \frac{x_m A(\omega) - x_m A_n(\omega)}{x_m A_n(\omega)} = \frac{A(\omega)}{A_n(\omega)} - 1, \quad (8.4)$$

а зміну фази - фазочастотною похибкою (рис. 8.3,6):

$$\Delta\varphi_\omega = \varphi(\omega) - \varphi_n(\omega). \quad (8.5)$$

Тут  $A_n(\omega)$  і  $\varphi_n(\omega)$  - номінальні (чи бажані) АЧХ і ФЧХ ЗВТ.

Оскільки при регулярних вимірювальних сигналах динамічні похибки є систематичними, то в певних випадках їх



*Рис. 5.15. Амплітудно – та фазочастотна динамічні похибки*

Рисунок 8.3 – Амплітудно- та фазочастотна динамічні похибки

Technische Universität  
Darmstadt  
Dякую за увагу!

