ТЕМА 4: Складові похибок вимірювання

<u>Абсолютна похибка</u> вимірювання Δ_X — це різниця між результатом вимірювання x та істинним значенням вимірюваної фізичної величини X («виміряне мінус істинне»):

$$\Delta_x = x - X \qquad (5.1)$$

виражена в одиницях вимірюваної фізичної величини.

<u>Відносна похибка</u> вимірювання δ_X дорівнює відношенню абсолютної похибки Δ_x до істинного або дійсного значення вимірюваної фізичної величини й виражається в частках одиниці :

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{X} \approx \frac{\Delta_x}{x_Д} \qquad (5.2)$$

або в процентах:

$$\delta_{x\%} = 100\frac{\Delta_x}{X} \approx 100\frac{\Delta_x}{x_Д} \qquad (5.3)$$

<u>Методична складова похибки вимірювання</u>

Неминуча поява методичної складової похибки також і в разі використання наближеної формули (1.5), що відображує функціональний зв'язок між опором резистора r_t та його температурою t. Застосування точнішої формули

$$r = r_0(1 + \alpha \cdot t + \beta \cdot t^2) \qquad (5.4)$$

дає змогу зменшити методичну складову похибки, але не до нуля, оскільки і ця формула є наближеною

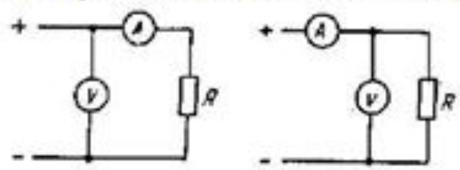


Рис. 1.3

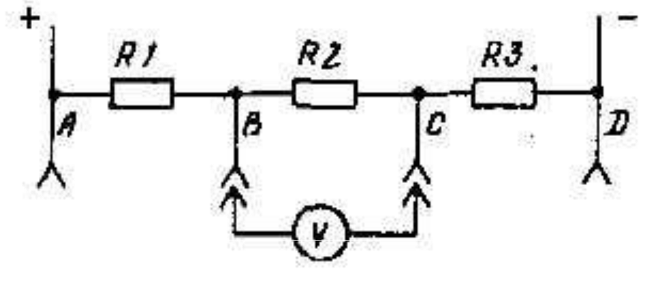


Рис. 1.4

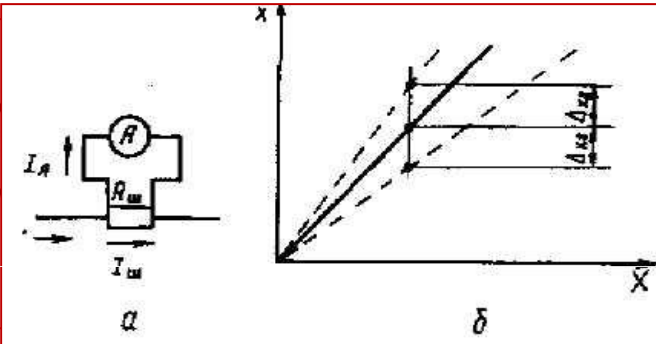


Рис. 1.6

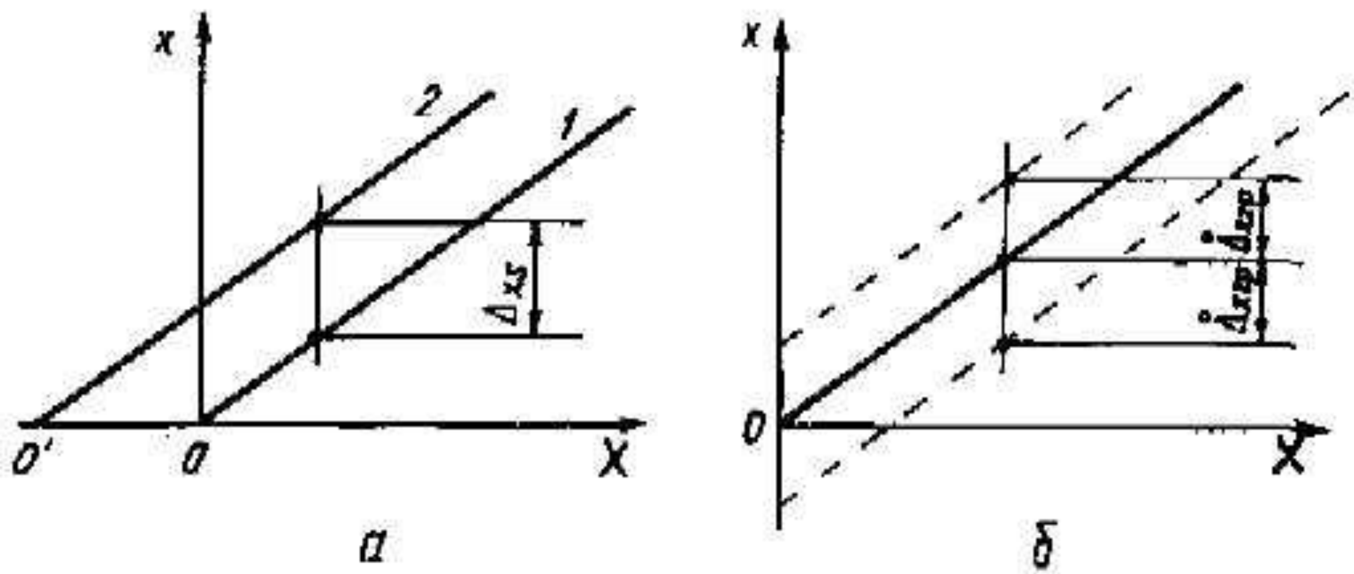


Рис. 1.5

Інструментальна складова (1.4), мультиплікативна похибка (1.5)

адитивна похибка (1.6)

ТЕМА 5: Систематичні похибки вимірювання

Інструментальну систематичну похибку можна виявити перевіркою робочою засобу вимірювань за допомогою зразкового, що має вищу точність. Значення абсолютних похибок Δ_x вимір ю вального приладу обчислюють за формулою

$$\Delta_x = x - x_Д \tag{6.1}$$

де x — показ приладу, що повіряється; $x_Д$ — дійсне значення вимірюваної величини, встановлене за допомогою зразковою вимірювального приладу.

Інструментальну похибку, яка виникає від взаємодії з об'єктом вимірювання, також можна виявити, проаналізувавши умови проведення експерименту.

Експериментальне виключення систематичних похибок здійснюють на основі методу заміщення. Для цього треба спочатку виміряти невідому фізичну величину, в результаті чого дістати вираз

$$x_П = X + \Delta_{x,s}, \tag{6.2}$$

де $x_П$ - показ приладу; X - значення невідомої величини; $\Delta_{x,s}$ - систематична складова похибки.

Нічого не змінюючи у вимірювальній установці, слід ввімкнути замість X регульовану міру $X_м$ і дібрати таке її значення, за якого досягається попередній показ приладу. Тоді

$$x_П = X_м + \Delta_{x,s}, \tag{6.3}$$

Порівнюючи (6.3) та (6.4), дістанемо значення невідомої величини :

$$X = X_м \tag{6.4}$$

та обчислимо значення систематичної складової похибки

$$\Delta_{x,s} = x_П - X_м \tag{6.5}$$

Якщо джерело систематичної похибки має спрямовану дію, можна компенсувати її, здійснивши експеримент двічі, —так, щоб систематична похибка увійшла в результати вимірювань з протилежним знаком:

$$x_{П1} = X + \Delta_{x,s}, \qquad x_{П2} = X - \Delta_{x,s}, \tag{6.6}$$

Звідси

$$X = (x_{П1} + x_{П2})/2; \qquad \Delta_{x,s} = (x_{П1} - x_{П2})/2 \tag{6.7}$$

Інструментальна похибка, що залежить від неточності аналогового вимірювального приладу, обчислюється за формулою:

$$\theta = kN/100 \qquad (6.8)$$

Величина θ називається надійною межею невиключених залишків систематичних похибок. Якщо таких залишків кілька $(\theta_1, \theta_2, \dots)$, то

$$\theta = 1{,}1\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\theta_i^2} \qquad (6.9)$$

де θ_i - межа i – ї невиключеної систематичної похибки; m —число цих похибок ($1 < m < 4$).

Формула (6.10) відповідає ймовірності *P= 95 %*

ТЕМА 6: Випадкові похибки вимірювання

Інтервал	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_3$	$x_3 - x_4$	$x_4 - x_5$
Частота m_i	m_1	m_2	m_3	m_4

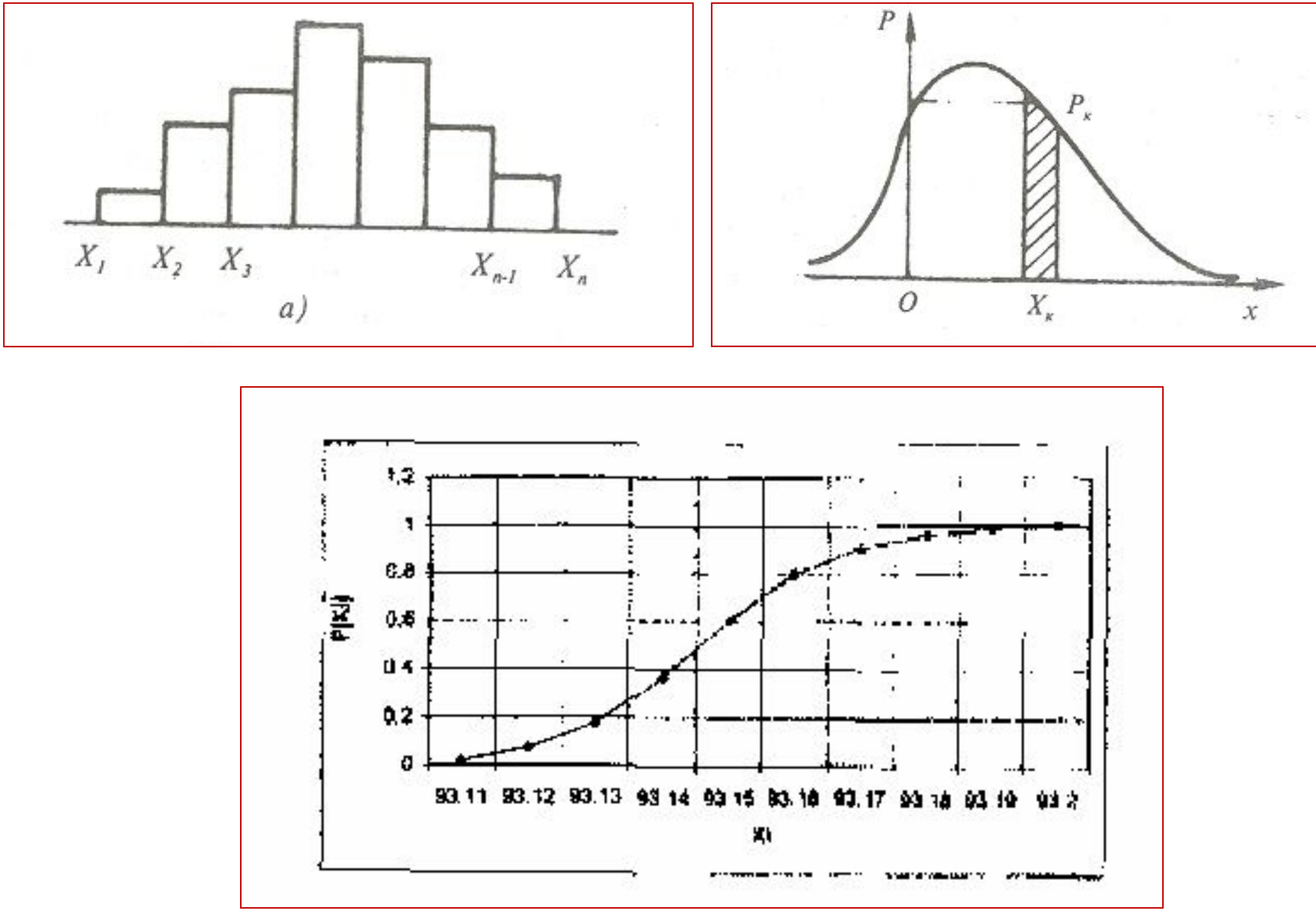


Рисунок 7.2 - Графік функції розподілу ймовірностей

Щільність ймовірності описується виразом $p(x)\dfrac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\left(\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right)}$, (7.1) де $\bar{x},\sigma_x$ – відповідно середнє арифметичне і СКВ результатів спостережень.

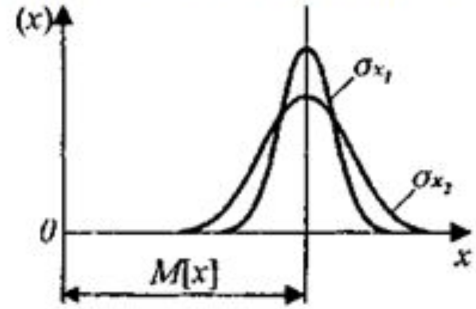


Рис. 7.3. Диференціальні функції нормального закону розподілу

Функція розподілу нормальної випадкової величини (інтегральна функція розподілу) має такий вид:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}dx. \qquad (7.1)$$

Вираз для інтегральної функції нормованого нормального розподілу є таким:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

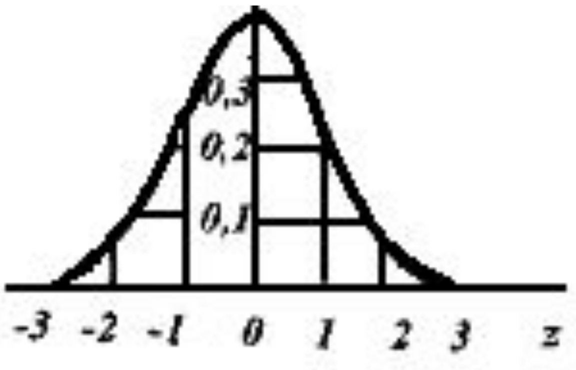


Рис. 7.4 Диференціальна функція ННЗР

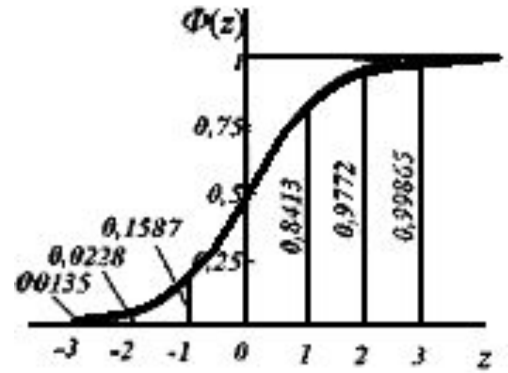


Рис. 7.5 Інтегральна функція ННЗР

За допомогою інтегральної функції ННЗР $\Phi(z)$ можна визначити довірчу ймовірність $\overline{P}$ попадання однократного спостереження x в заданій границі $(M[x]-z_p\cdot\sigma_x)...(M[x]+z_p\cdot\sigma_x)$. Це здійснюють таким чином:

$$\overline{P}=\overline{P}\{(M[x]-z_p\cdot\sigma_x)<x\le(M[x]+z_p\cdot\sigma_x)\}=\overline{P}\{-z_p<z\le+z_p\}=$$

$$=\int_{-z_p}^{+z_p}p(z_p)dz=\Phi(+z_p)-\Phi(-z_p)=2\Phi(+z_p)-1. \qquad (7.3)$$

Аналогічним чином можна визначити довірчу ймовірність $\overline{P}$ попадання однократного спостереження x і в несиметричну відносно осі Oz зону. В цьому випадку

$$\overline{P}=\Phi(z_в)-\Phi(z_н), \qquad (7.4)$$

де $z_в$ і $z_н$ - відповідно верхня і нижня границі несиметричної зони; $\Phi(z_в)$ і $\Phi(z_н)$ - значення інтегральної функції для $z=z_в$ і $z=z_н$ які отримані згідно додатку Г.

Вказані вище граничні значення випадкової величини $(M[x]-z_p\cdot\sigma_x)$ і $(M[x]+z_p\cdot\sigma_x)$ називаються довірчими границями результату спостереження x з довірчою ймовірністю $\overline{P}$.

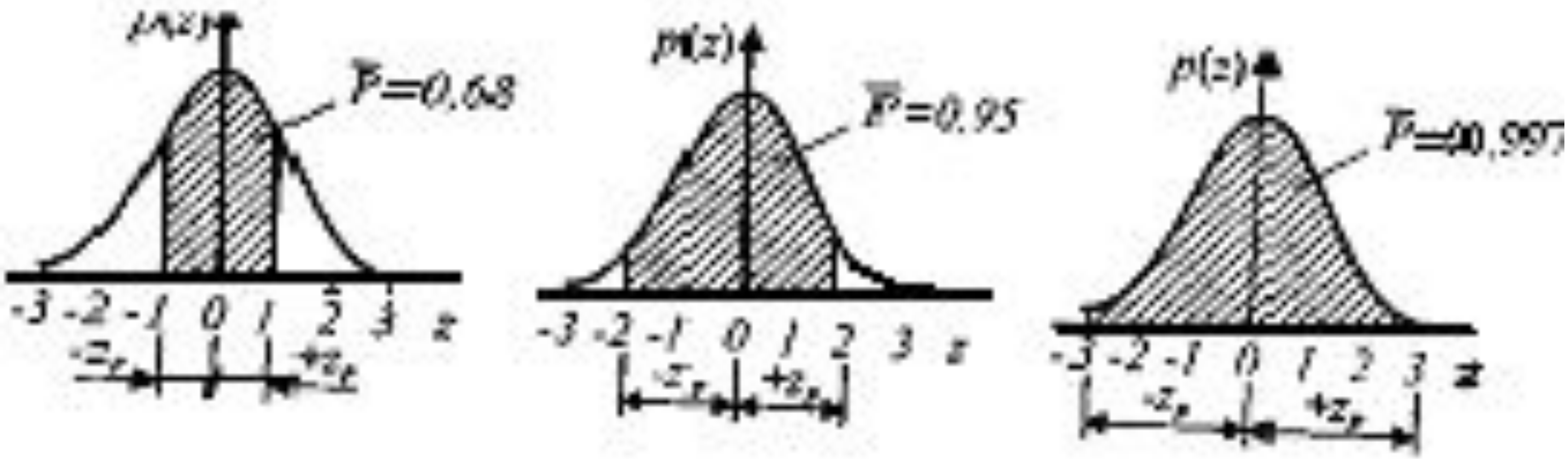


Рис. 7.6 Нормовані відхилення і ймовірність випадкових вимірювань з цими відхиленнями

Ймовірність P попадання результату спостереження x в симетричний інтервал $(\bar{x} - z_p \cdot \sigma_x)\ldots(\bar{x} + z_p \cdot \sigma_x)$ для нормального закону розділу результатів спостережень також може бути визначена ще таким чином:

$$\overline{P} = \Phi(+z_p) - \Phi(-z_p) = 2\Phi(+z_p) - 1 = 2\Phi_0(z_p), \qquad (7.5)$$

де функції $\Phi_0(z_p)$ - це нормована функція Лапласа (інтеграл Лапласа), яка в свою чергу визначається так:

$$\Phi_0(z_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \qquad (7.6)$$

Значення $\Phi_0(z_p)$ приведені в додатку Е, а також можуть бути визначені згідно () таким чином:

$$\Phi_0(z_p) = \Phi(+z_p) - 0{,}5, \qquad (7.7)$$

$\Phi(+z_p)$ - значення нормованої інтегральної функції, що приведені в додатку Д.

Нерівність у перших фігурних дужках виразу () легко може бути перетворена ще до такого виду:

$$\overline{P} = \overline{P}\{M[x] - z_p \cdot \sigma_x < x \le M[x] + z_p \cdot \sigma_x\} = \\ = \overline{P}\{\overline{x} - z_p \cdot \sigma_x < M[x] \le \overline{x} + z_p \cdot \sigma_x\} \qquad (7.8)$$

Це означає, що істинне значення вимірюваної величини знаходиться в межах довірчого інтервалу $(\overline{x} - z_p \cdot \sigma)...(\overline{x} + z_p \cdot \sigma)$ з відповідною довірчою ймовірністю $\overline{P}$.

Довірчою границею випадкового відхилення результатів спостережень, що відповідає довірчій ймовірності $\overline{P}$, називається половина довірчого інтервалу $(-z_p \cdot \sigma ... + z_p \cdot \sigma)$.

Таким чином, результат вимірювання, визначений на основі однократного спостереження x_1, записується таким чином:

$$x = x_1 \pm z_p \cdot \sigma_x, \quad \overline{P} = 2 \cdot \Phi(+z_p) - 1 = 2 \cdot \Phi_0(+z_p), \qquad (7.9)$$

де σ_x – СКВ даного виду вимірювань, яке повинно бути наперед відомим або вказаним в нормативній документації (атестаті) на даний вид вимірювання; z_p - коефіцієнт довіри, яким задаються і який визначає вибрану довірчу ймовірність відхилень.

Числові характеристики випадкових похибок

Математичне сподівання M[x] визначається як початковий момент першого порядку кривої розподілу:

$$M[x] = a_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot (x)dx. \qquad (7.10)$$

Вираз для математичного сподівання похибки вимірювань є таким:

$$M[\Delta] = M[(x - Q)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - Q) \cdot p(x)dx = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} Q \cdot p(x)dx = M[x] - Q\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = M[x] - Q = \Delta_m. \qquad (7.11)$$

Систематична похибка визначається як відхилення математичного сподівання результатів спостережень від істинного значення вимірюваної величини:

$$\Delta_m = M[x] - Q, \tag{7.12}$$

а випадкова похибка - це різниця між результатом однократногоспостереження і математичним сподіванням результатів:

$$\Delta_{p_i} = x_i - M[x], \tag{7.13}$$

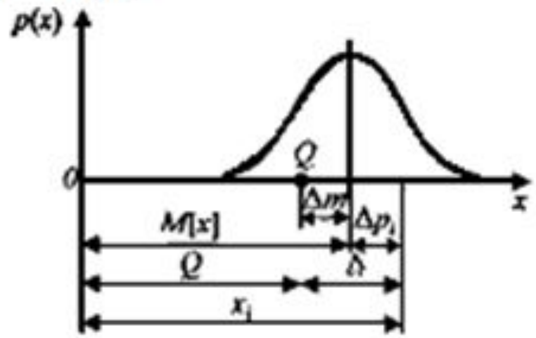


Рис. 7.3. Характеристики систематичної і випадкової похибок

Параметри розподілу випадкових похибок

Початковим моментом r-го порядку випадкової величини x є число, яке визначається таким чином:

$$a_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot p(x)dx, \qquad (7.14)$$

яке ще можна назвати математичним сподіванням r-ої степені випадкової величини x.

Найчастіше як параметр розподілу випадкових величин використовується початковий момент першого порядку

$$a_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)dx = M[x], \qquad (7.15)$$

який називається математичним сподіванням випадкової величини. Для дискретної випадкової величини математичне сподівання (вибірковий початковий момент першого порядку) визначається так:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{P}_i = M[x], \qquad (3.16)$$

де $\overline{P}_i$ – ймовірність появи випадкового значення x_i яку визначають як *1/n*, якщо *n*-загальна кількість спостережень, або як відношення кількості однакових спостережень в кожній із *n* таких груп до загальної кількості спостережень.

В практиці визначення параметрів розподілу в деяких випадках використовують початковий момент другого порядку

$$a_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x)dx, \qquad (7.17)$$

який для дискретних величин має назву вибіркового моменту другого порядку і який визначають таким чином:

$$a_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \overline{P}_i, \qquad (7.18)$$

Початкові моменти вищих порядків практично не використовуються для характеристики розподілу випадкових величин.

Центральним моментом k-го порядку (k-им центральним моментом) випадкової величини x називається математичне сподівання **k**-ої степені її відхилення від математичного сподівання M[x]:

$$m_k = M[x - M[x]]^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^k \cdot p(x)dx. \qquad (7.19)$$

Перший центральний момент завжди дорівнює нулю:

$$m_1 = M[x - M[x]] = M[x] - M[x] = 0$$

В практиці визначення параметрів розподілу широко використовується центральний момент другого порядку, який ще називається дисперсією:

$$m_2 = D[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^2 \cdot p(x)dx. \qquad (7.20)$$

Для дискретних величин вибірковий центральний момент другого порядку визначають так:

$$m_2 = D[x] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[x])^2 \cdot \overline{P}_i. \qquad (7.21).$$

Третій центральний момент m_3, розраховується таким чином:

$$m_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^3 \cdot p(x)dx, \qquad (7.22)$$

а для дискретної випадкової величини вибірковий центральний момент третього порядку визначають так:

$$m_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[x])^3 \cdot \overline{P}_i, \qquad (7.23)$$

використовують для оцінки асиметрії кривої розподілу за допомогою коефіцієнта асиметрії

$$k_{ac} = m_3 / \sigma^3. \qquad (7.24)$$

Центральний момент четвертого порядку, визначається таким чином:

$$m_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^4 \cdot p(x)dx, \qquad (7.25)$$

а для дискретної випадкової величини так:

$$m_4 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[x])^4 \cdot \overline{P}_i, \qquad (7.26)$$

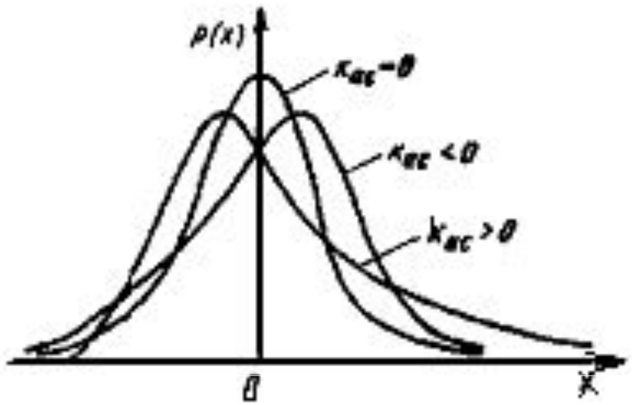
використовують для оцінки плосковершинності або гостровершинності кривої розподілу за допомогою коефіцієнта ексцесу, який в свою чергу розраховують так:

$$k_{екс} = m_4 / \sigma^4 - 3. \qquad (7.27)$$

Для нормального закону розподілу $k_{екс}=0$, для гостровершинної кривої розподілу $k_{екс}>0$, а для плосковершинної $k_{екс}<0$ (рис. 7.5).

Між центральними і початковими моментами є такі залежності, які мають практичне застосування:

$$\begin{aligned} m_2 &= a_2 - a_1^2, \\ m_3 &= a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3, \\ m_4 &= a_4 - 4a_1a_3 + 6a_1^2a_2 - 3a_1^4, \end{aligned} \qquad (7.28)$$



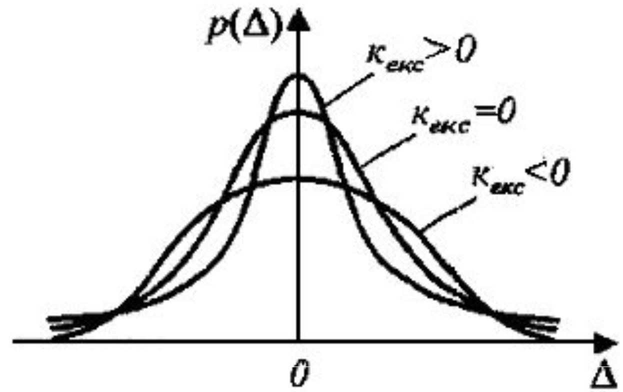


Рис 7.4 Залежність форми кривих розподілу від коефіцієнтаасиметрії

Рис. 7.5. Залежність форми кривої розподілувід коефіцієнта ексцесу

ТЕМА 7: Динамічні похибки

Динамічна похибка на виході ЗВТ

$$\Delta_д(t) = y(t) - y_н(t). \qquad (8.1)$$

Часова динамічна похибка

$$\Delta_д(t) = y(t) - y_н(t) = \int_{-\infty}^{\infty}[g(t-\tau) - g_н(t-\tau)]x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}[h'(t-\tau) - h'_н(t-\tau)]x(\tau)d\tau. \qquad (8.2)$$

Якщо $x(t)=X_o 1(t)$ тобто в момент часу t=0 на вхід ЗВТ подали сигнал сталого значення X_o, то динамічна похибка

$$\Delta_д(t) = \int_{-\infty}^{\infty}[h'(\tau) - h'_н(\tau)]X_0 1(t-\tau)d\tau = X_0[h(t) - h_н(t)]. \qquad (8.3)$$

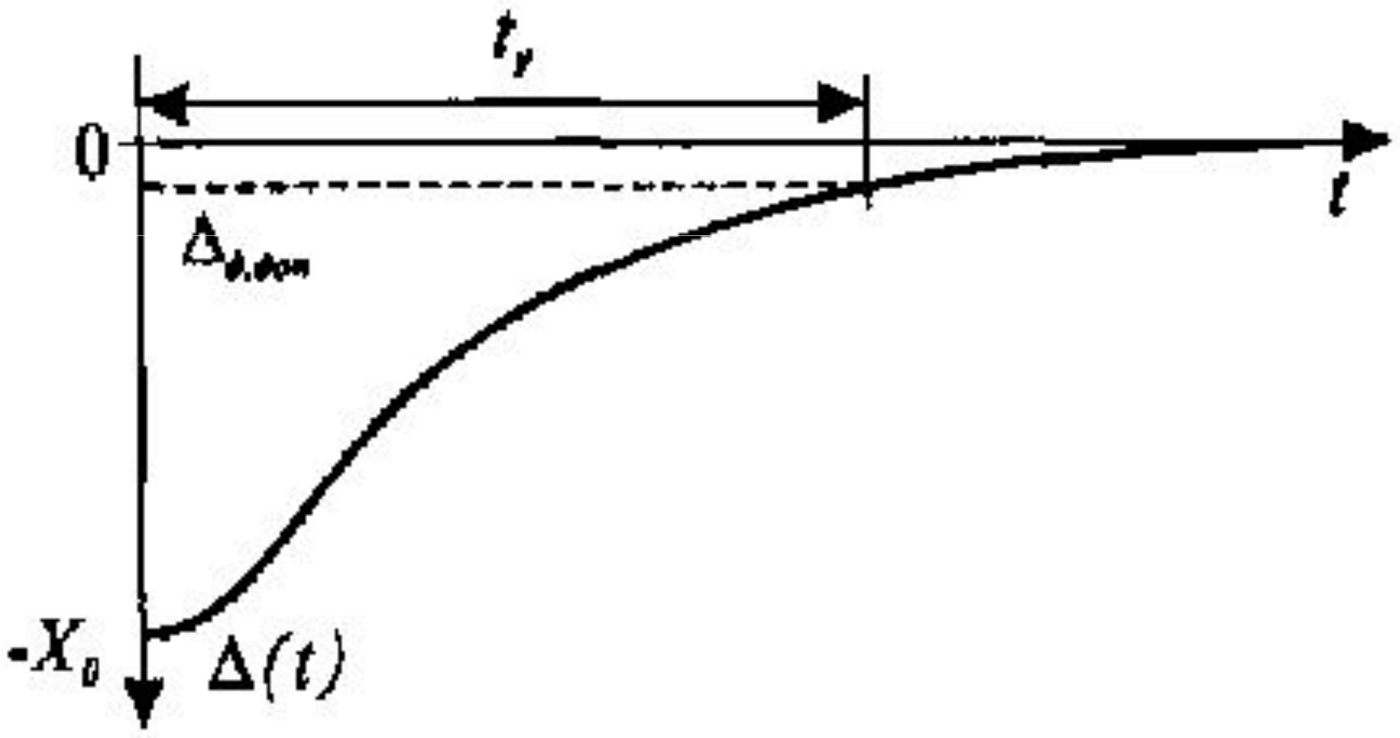


Рисунок 8.1 – Часова динамічна похибка та час усталення вихідного сигналу

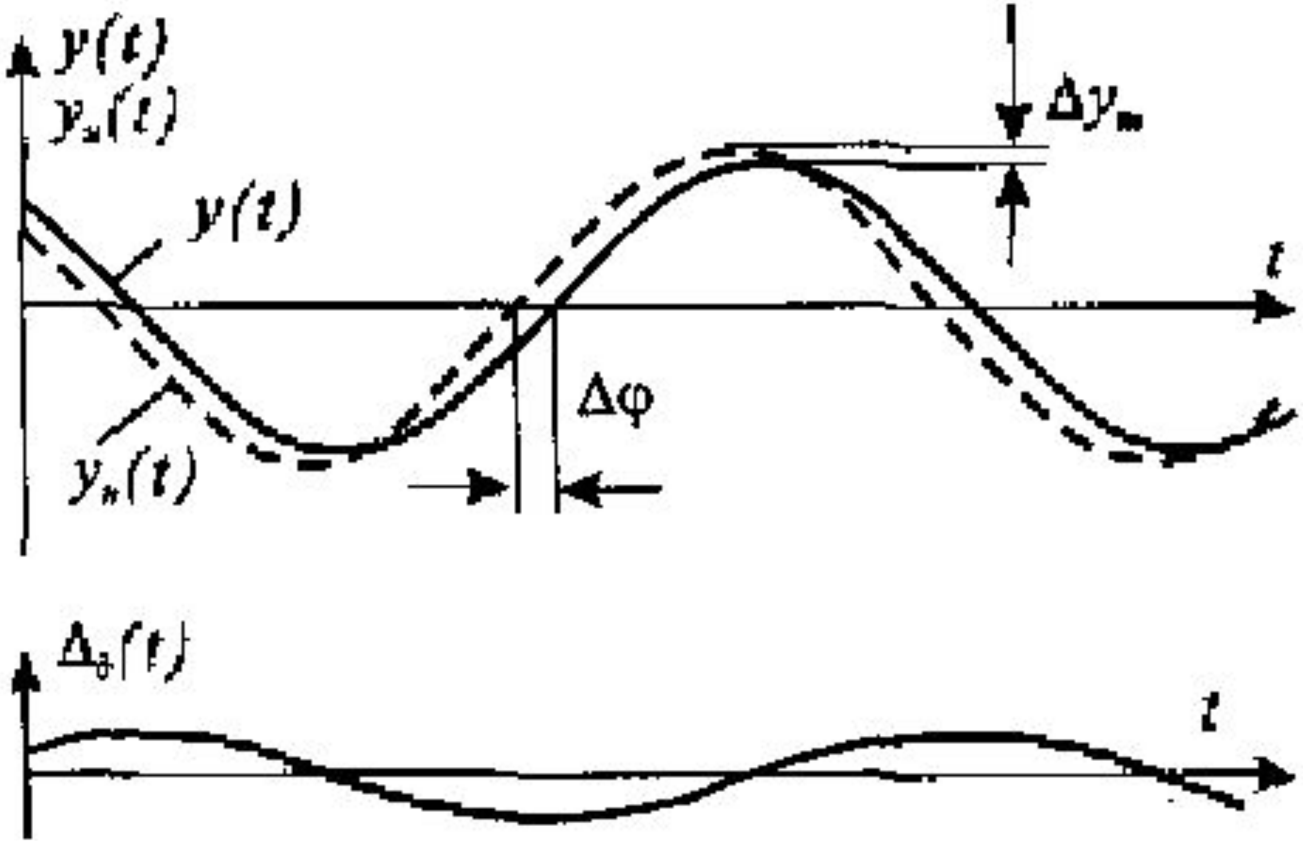


Рисунок 8.2 – Динамічна похибка при подачі на вхід ЗВТ гармонійного сигналу

Відносну зміну амплітуди вихідного сигналу від необхідного (номінального) значення $x_m A_н(\omega)$ називають амплітудно-частотною похибкою (відносною) ЗВТ (рис. 8.3),

$$\delta_\omega = \frac{x_m A(\omega) - x_m A_н(\omega)}{x_m A_н(\omega)} = \frac{A(\omega)}{A_н(\omega)} - 1, \qquad (8.4)$$

а зміну фази - фазочастотною похибкою (рис. 8.3,б):

$$\Delta\varphi_\omega = \varphi(\omega) + \varphi_н(\omega). \qquad (8.5)$$

Тут $A_n(\omega)$ і $\varphi_n(\omega)$ - номінальні (чи бажані) АЧХ і ФЧХ ЗВТ.

Оскільки при регулярних вимірювальних сигналах динамічні похибки є систематичними, то в певних випадках їх

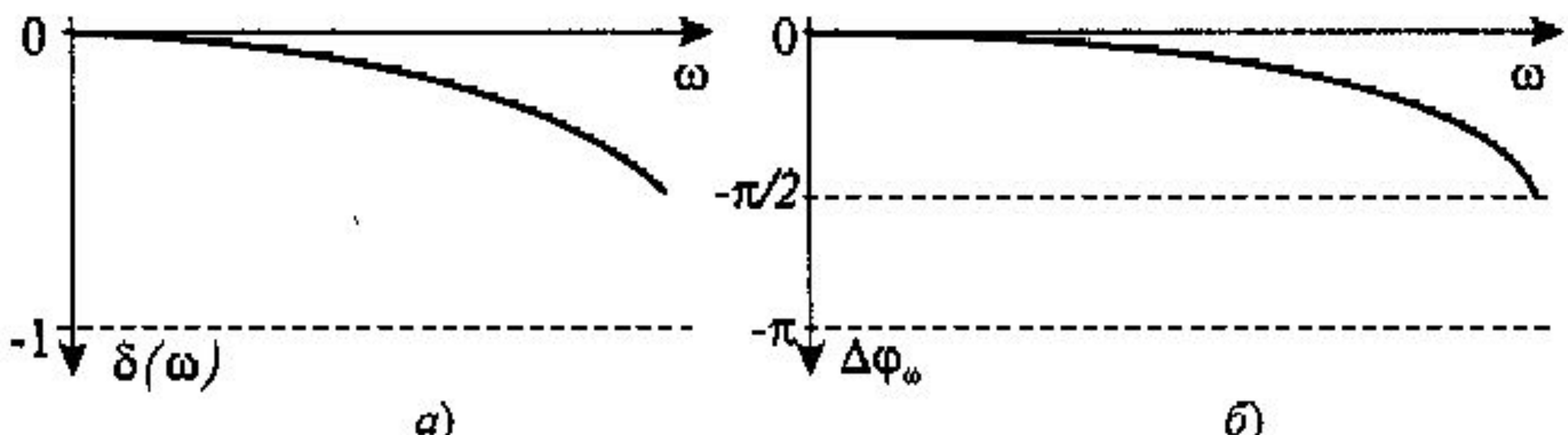


Рис. 5.15. Амплітудно – та фозочастотна динамічні похибки

Рисунок 8.3 – Амплітудно- та фазочастотна динамічні похибки

Дякую за увагу!