

Основы теории принятия решений

Лекция 3

Содержание

1. Алгоритм Delta-1
2. Алгоритм Gamma-1
3. Выбор алгоритмов таксономии.
4. Пример 1.
5. Примеры прикладных задач таксономии:
 - прогнозирование успеваемости;
 - ранжирование объектов.

Таксономия в λ -пространстве с заданным числом таксонов

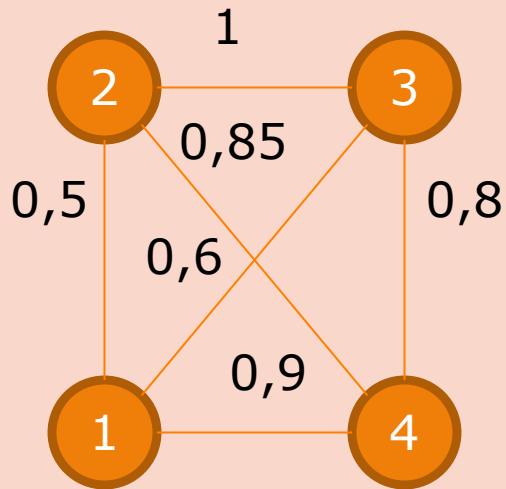
- **Цель:** распределить по W таксонам N объектов с неоднородными характеристиками.
- **Реализация:** алгоритм Delta-1.
- **Отличие от алгоритма Forel-2:** неоднородность характеристик объектов.

Алгоритм DELTA1

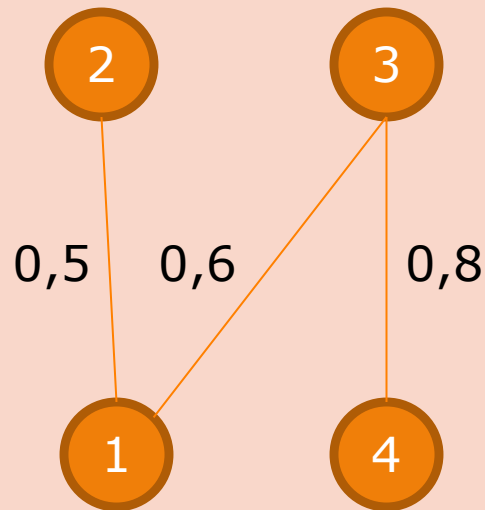
- Шаг 1. Ищется λ - расстояние между каждой парой объектов.
- Шаг 2. Строится полный взвешенный неориентированный граф $G(X,U)$, вершины которого отвечают объектам, а каждого ребра (p,q) равен расстоянию между X_p и X_q .
- Шаг 3. Алгоритмом Прима ищется минимальное связывающее подмножество рёбер, остальные рёбра удаляются.
- Шаг 4. Полученный граф обозначить $G(X,U_0)$.
- Шаг 5. $i=1$
- Шаг 6. Выбор ребра (p,q) с максимальным весом.
- Шаг 7. Ребро (p,q) отбрасывается: $U_0 = U_0 \setminus (p,q)$.
- Шаг 8. Если $i = W$, то перейти к шагу 10, нет - к шагу 9.
- Шаг 9. $i=i+1$, перейти к шагу 6.
- Шаг 10. Конец алгоритма.

ПРИМЕР

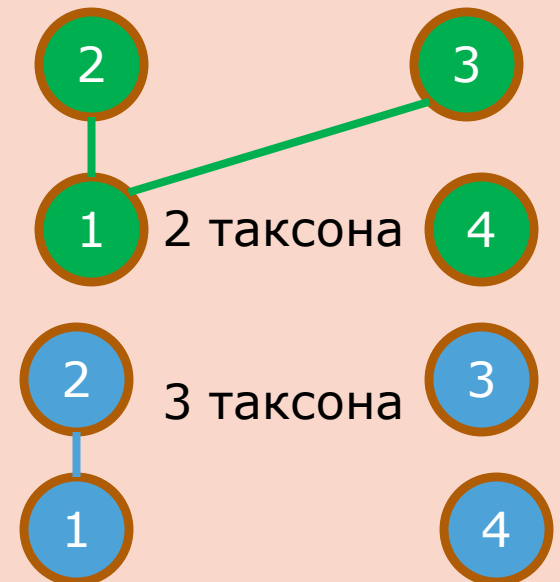
Исходный граф
(вес ребра = λ –
расстоянию)



Остов графа,
полученный
алгоритмом Прима



Таксономии при
 $W=2$ и $W=3$



САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Пользуясь DELTA 1, распределить по двум таксонам 5 объектов, каждый из которых обладает двумя разнородными характеристиками, заданными таблицей:

№	Признак 1	Признак 2
1	20	1
2	30	3
3	40	4
4	45	6
5	50	5

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Пользуясь алгоритмом DELTA 1, распределить по n таксонам 5 объектов, каждый из которых обладает двумя разнородными характеристиками, заданными на следующих двух слайдах

Персональные задания 1-9

Вариант 1			Вариант 2			Вариант 3		
n=2	Признак 1	Признак 2	n=3	Признак 1	Признак 2	n=2	Признак 1	Признак 2
1	20	5	1	25	4	1	30	4
2	30	3	2	30	5	2	25	5
3	35	4	3	35	3	3	35	3
4	40	3	4	40	3	4	40	2
5	50	2	5	45	2	5	55	1
Вариант 4			Вариант 5			Вариант 6		
n=2	Признак 1	Признак 2	n=3	Признак 1	Признак 2	n=2	Признак 1	Признак 2
1	15	5	1	10	5	1	10	4
2	20	3	2	20	4	2	15	5
3	25	4	3	25	3	3	20	3
4	35	2	4	30	3	4	25	2
5	40	1	5	50	2	5	40	1
Вариант 7			Вариант 8			Вариант 9		
n=2	Признак 1	Признак 2	n=3	Признак 1	Признак 2	n=2	Признак 1	Признак 2
1	15	5	1	20	3	1	20	2
2	20	4	2	15	4	2	30	3
3	30	3	3	10	5	3	50	1
4	35	2	4	30	3	4	10	5
5	50	1	5	50	2	5	15	4

Персональные задания 10-18

Вариант 10			Вариант 11			Вариант 12		
n=3	Признак 1	Признак 2	n=4	Признак 1	Признак 2	n=3	Признак 1	Признак 2
1	20	5	1	25	4	1	30	4
2	30	3	2	30	5	2	25	5
3	35	4	3	35	3	3	35	3
4	40	3	4	40	3	4	40	2
5	50	2	5	45	2	5	55	1
Вариант 13			Вариант 14			Вариант 15		
n=3	Признак 1	Признак 2	n=4	Признак 1	Признак 2	n=3	Признак 1	Признак 2
1	15	5	1	10	5	1	10	4
2	20	3	2	20	4	2	15	5
3	25	4	3	25	3	3	20	3
4	35	2	4	30	3	4	25	2
5	40	1	5	50	2	5	40	1
Вариант 16			Вариант 17			Вариант 18		
n=3	Признак 1	Признак 2	n=4	Признак 1	Признак 2	n=3	Признак 1	Признак 2
1	15	5	1	20	3	1	20	2
2	20	4	2	15	4	2	30	3
3	30	3	3	10	5	3	50	1
4	35	2	4	30	3	4	10	5
5	50	1	5	50	2	5	15	4

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Изменить алгоритм Delta-1 таким образом, чтобы минимизировать верхнюю границу числа объектов, принадлежащих одному таксону (т.е. сделать распределение объектов между таксонами равномерным).
- Пользуясь приведенными выше персональными заданиями решить эту задачу при условии, что число таксонов $n=2$.

Парное сравнение
алгоритмов таксономии
алгоритмом Gamma-1.

Обозначения и определения

- Назначение алгоритма Gamma-1 заключается в том, чтобы попарно сравнивать различные алгоритмы таксономии. Для формального описания этого подхода далее используются следующие обозначения:
- S_i - таксономия, полученная i -м алгоритмом; « p » и « q », - объекты;
- $r_i(p, q)$ - расстояние между « p » и « q », полученное i -м алгоритмом:
- (Очевидно, что $\forall p, r_i(p, p) = 0$).
- Величины $r_i(p, q)$ образуют матрицу μ_i ($m \times m$ матрица). $r_i(p, q) = 0$, если p и q принадлежат одному таксону и $r_i(p, q) = 1$, p и q принадлежат разным таксонам.

Алгоритм Gamma-1

- Шаг 1. Генерация матрицы μ_1 .
- Шаг 2.. Генерация матрицы μ_2 .
- Шаг 3. Определение максимального числа несовпадающих элементов $\beta = m(m-1)$.
- Шаг 4. Генерация новой матрицы μ_3 , каждый элемент которой $r_3(p,q)$ равен
- $r_3(p,q) = |r_1(p,q) - r_2(p,q)| / \beta$.
- Шаг 5. Вычисление критерия F , равного сумме всех $r_3(p,q)$ и представляющего собой нормированное расстояние Хемминга между μ_1 и μ_2 .
- Шаг 6. Конец алгоритма.

Пример: парное сравнение алгоритмов таксономии


- Пользуясь алгоритмом Gamma-1, матрицы μ_1 и μ_2 которого соответственно равны:

μ_1				μ_2			
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0

определить величину F.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ "F"

Матрица μ_3 каждый элемент которой следует умножить на $1/[4(4-1)] = 1/12$.



0	0	1	0
0	0	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0



$$F = 6/12 = 0.5$$

Выбор алгоритма таксономии

Пусть S_i - таксономия m объектов, полученная i -м алгоритмом, $F_{i,j}$ - нормированное расстояние Хемминга между i -м и j -м алгоритмами таксономии, полученное алгоритмом Gamma 1. Тогда характеристикой каждого i -го алгоритма F_i является сумма:

$$F_i = \sum_j F_{i,j}.$$

Лучшим является q -й алгоритм, для которого справедливо:

$$F_q = \min_i F_i.$$

Пример 1: условия

Определить, пользуясь Gamma 1, наилучший и наихудший из трех алгоритмов таксономии, матрицы μ_1 , μ_2 и μ_3 которых соответственно равны:

 $\mu_1 =$

0	0	1	1
0	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	0

 $\mu_2 =$

0	1	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0

 $\mu_3 =$

0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	0
1	0	0	0

Пример 1: решение

Вычисление характеристик каждого i -го алгоритма F_i ($i=1,2,3$):

$$M_{12} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad F_{12} = 0,41; \quad M_{13} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad F_{13} = 0,667;$$

$$M_{23} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad F_{23} = 0,667. \quad F_1 = F_{12} + F_{13} = 1,077;$$
$$F_2 = F_{12} + F_{23} = 1,077;$$
$$F_3 = F_{13} + F_{23} = 1,334;$$

Лучшие алгоритмы- первый и второй, худший – третий.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Определить наилучшую из четырех таксономий, представленных матрицами μ_1 , μ_2 , μ_3 и μ_4 на следующих трех слайдах. Номера вариантов указаны в правом столбце матрицы персональных данных.

Варианты 1 - 7

μ1				μ2				μ3				μ4				№
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	2
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	3
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	4
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	5
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	6
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	7
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	

Варианты 8 - 14

μ_1				μ_2				μ_3				μ_4				№
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	8
0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	9
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	10
0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	11
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	
1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	12
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	13
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	14
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	

Варианты 15 - 21

μ1				μ2				μ3				μ4				№
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	15
0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	16
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	17
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	18
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	19
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	20
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	21
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	

Примеры прикладных задач таксономии

- **Прогнозирование успеваемости.**
- **Ранжирование студентов.**

Прогнозирование успеваемости – содержательная постановка задачи.

- Задана матрица, содержащая данные об оценках 3-х студентов по трем дисциплинам и одного – по первым двум. Требуется для последнего студента найти аналога среди первых двух, чтобы спрогнозировать его успеваемость по третьей дисциплине.

Решение задачи прогнозирования оценки первого ученика по 3-й дисциплине

Исходная матрица Нормированная матрица

№	Дисциплины		
	1	2	3
1	5	3	
2	4	4	5
3	4	3	3
4	5	4	4

№	Дисциплины		
	1	2	3
1	1	0	
2	1/2	1/2	5
3	1/2	0	3
4	1	1/2	4

Расстояния от первого ученика до остальных: $r(1,2)=0,7$; $r(1,3)=0,5$; $r(1,4)=0,5$. Прогнозируемая оценка: 3,5. Выбранные аналоги – третий и четвертый студенты.

Ранжирование студентов по успеваемости - условия

- Задана матрица M , содержащая данные об оценках 5-х студентов по трем дисциплинам. Требуется ранжировать их относительно отличника.

● $M =$

№	Дисц.1	Дисц.2	Дисц.3
1	4	5	3
2	5	4	4
3	3	5	5
4	4	4	4
5	2	5	5

Предложите *a priori* Вашу версию ранжирования.

Ранжирование студентов по успеваемости - нормирование

- Нормированная матрица M1 (шестой студент – эталон):

M1 =

Студенты	Дисциплины			
	№	1	2	3
1		0,67	1	0,33
2		1	0,67	0,67
3		0,33	1	1
4		0,67	0,67	0,67
5		0	1	1
6		1	1	1

Ранжирование студентов по успеваемости - упорядочение

Расстояния от i -го студента до шестого ($0 < i < 6$):

- $r(1,6)=0,74868$;
- $r(2,6)=0,46669$;
- $r(3,6)=0,67$;
- $r(4,6)=0,5715$;
- $r(5,6)=1$.

Ранжирование студентов:

- $\pi = \{2, 4, 3, 1, 5\}$

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Ранжировать относительно двоечника учеников, успеваемость которых описывается матрицей M :

$M =$

Ученик	Дисц.1	Дисц.2	Дисц.3
1	5	4	3
2	2	3	4
3	5	5	4
4	3	3	2
5	3	4	2
6	5	5	3
7	2	2	4

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Определить прогноз оценки первого ученика по третьей дисциплине, полагая, что:
- Эта оценка неизвестна;
- Исходные данные приведены в матрице M на предыдущем слайде.

- **Смотрите прикладные аспекты теории принятия решений:**

- <https://postnauka.ru/courses/28275>