

Элементы теории множеств и математической логики



Высказывания. Законы
ЛОГИКИ

Логика

Способность к развитому **абстрактному мышлению**, которая, формируется **логикой**, и есть то, что отделяет нас от животных. Термин **“логика”** происходит от греческого слова **logos** – то есть “мысль”, “разум”, “слово”.

Логика – это наука о формах и способах мышления. Основными формами мышления являются понятие, высказывание и умозаключение.

Логика



Аристотель (384-322 до н.э.).
Основоположник формальной логики
(понятие, суждение, умозаключение).

Джордж Буль (1815-1864). Создал
новую область науки - Математическую
логику (Булеву алгебру или Алгебру
высказываний).

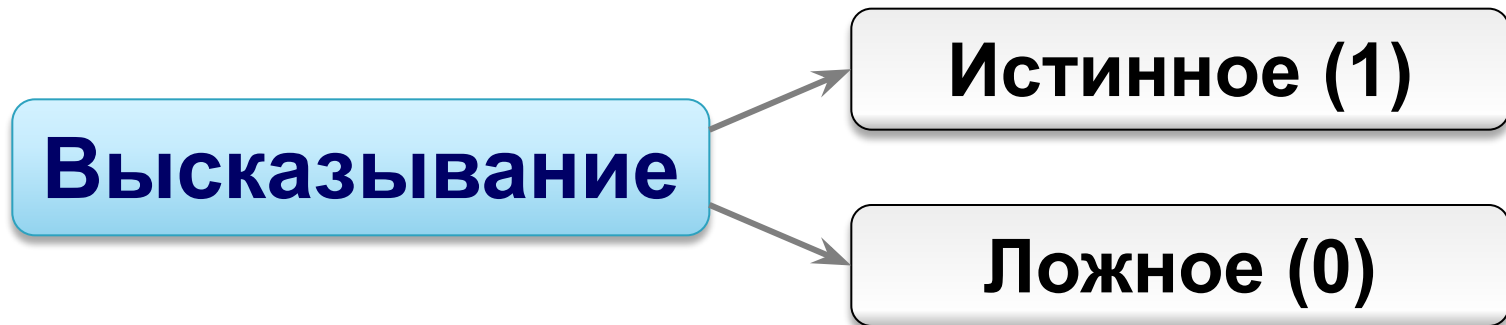


Клод Шеннон (1916-2001). Его
исследования позволили применить
алгебру логики в вычислительной технике

Высказывание

Высказывание – предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как **истинное** или **ложное**.

Высказывание может быть *истинным* или *ложным*



Высказывание

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями:

***Земля вращается вокруг Солнца.
Москва - столица.***

Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

***Без стука не входить!
Откройте учебники.
Ты выучил стихотворение?***

Примеры высказываний

- Москва больше Санкт-Петербурга
- Все мальчики любят играть в футбол
- “Лед - твердое состояние воды” (истинное высказывание)
- “Париж - столица Англии” (ложное высказывание)
- “Все рыбы умеют плавать” (общее)
- “Некоторые медведи - бурые” (частное)
- “Буква А - гласная” (единичное)
- “Кошка является домашним животным.” (?)
- “Некоторые ученики нашего класса девочки.” (?)
- “Сейчас идет урок рисования” (?)

Высказывание

Объясните, почему следующие предложения не являются высказываниями.

- 1) Какого цвета этот дом?
- 2) Число X не превосходит единицы.
- 3) $4X + 3$.
- 4) Посмотрите в окно.
- 5) Пейте томатный сок!
- 6) Эта тема скучна.
- 7) Рикки Мартин - самый популярный певец.
- 8) Вы были в театре?

Высказывание или нет

✓ Зимой идет дождь.

✓ Снегири живут в Крыму.

Кто к нам прищеп?

✓ У треугольника 5 сторон.

Как пройти в библиотеку?

Переведите число в десятичную систему.

Запишите домашнее задание



Алгебра логики

Алгебра логики возникла в середине XIX века в трудах английского математика **Джорджа Буля**. Ее создание представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраическими методами.

Алгебра логики – это раздел математики, изучающий высказывания, их логические значения (истинность или ложность) и логические операций над ними.

Алгебра логики

- ✓ Алгебра логики позволяет определять истинность или ложность составных высказываний, не вникая в их содержание.
- ✓ Любое простое высказывание может принимать значение 0 (ложь) или 1 (истина).
- ✓ Простое высказывание называют **логическими переменными** и обозначают заглавной латинской буквой – А, В, С и т.д.

Простые и сложные высказывания

Высказывания могут быть **простыми** или **сложными**.

Сложные высказывания состоят из простых высказываний, соединенных **логическими связками**:

И

или

Неверно, что...

Если..., то...

Конъюнкция

Конъюнкция - логическое умножение (союз и), при котором составное высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.

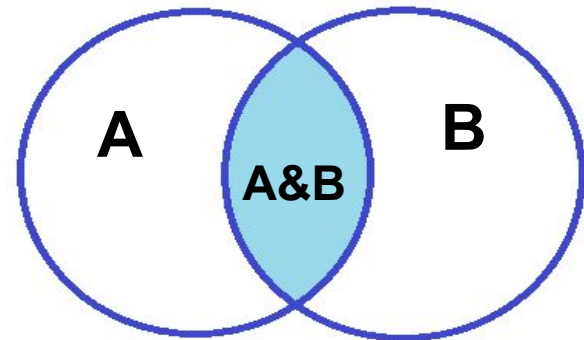
Таблица истинности

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Обозначение

$x \wedge y$ $x \& y$ $x \cdot y$

Графическое представление



Дизъюнкция

Дизъюнкция - логическое сложение (союз или), при котором составное высказывание ложно тогда, когда ложны все входящие в него простые высказывания.

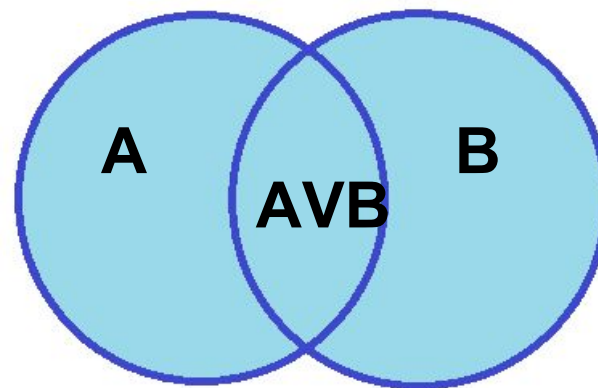
Таблица истинности

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Обозначение

$$x \vee y \quad x + y \quad x | y$$

Графическое представление



Отрицание

Инверсия - (отрицание) делает истинное высказывание ложным, а ложное истинным.

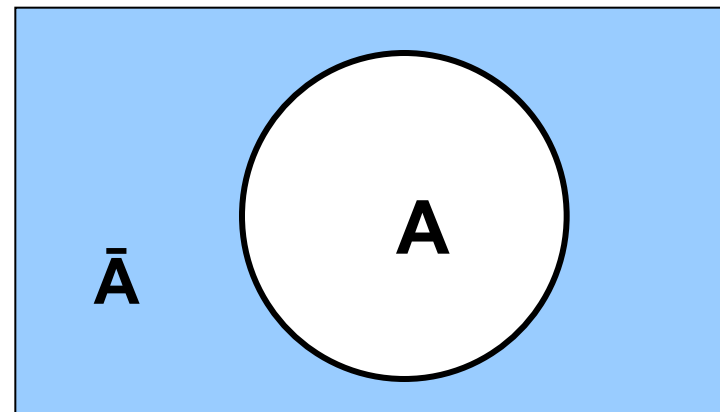
Таблица истинности

A	\bar{A}
0	1
1	0

Обозначение

\bar{x} $\neg x$

Графическое представление



Импликация

Импликация - (логическое следование - если..., то...). Ложно тогда и только тогда, когда из истинного высказывания следует ложное.

Таблица истинности

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Задание

Даны два простых высказывания:

$$A = \{2 \cdot 2 = 4\},$$

$$B = \{2 \cdot 2 = 5\}.$$

Какие из высказываний истинны:

а) A ; б) B ; в) $A \wedge B$; г) $A \vee B$;

д) $\neg A$; ж) $A \wedge \neg B$?

Задания

A = «Сейчас нет дождя»

B = «Форточка закрыта»

Составить сложные высказывания

$A \wedge B$

$A \vee B$

$\bar{A} \vee B$

$A \wedge \bar{B}$

$\overline{\bar{A} \vee B}$

Пусть A = «Ане нравятся уроки математики», а B = «Ане нравятся уроки химии». Выразите следующие формулы на обычном языке:

1) $A \& B$;

2) $\bar{A} \& B$;

3) $A \& \bar{B}$;

4) $A \vee B$;

5) $A \vee \bar{B}$;

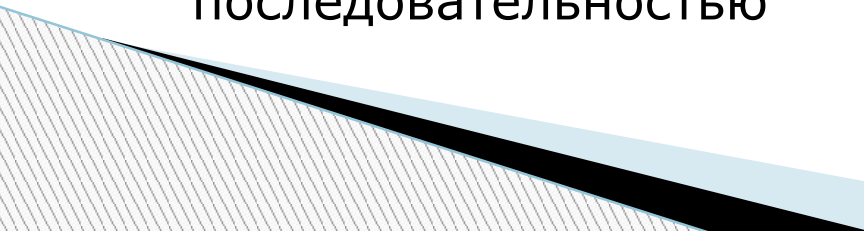
6) $\bar{A} \vee \bar{B}$;

7) $\overline{(A \& B)}$;

8) $\overline{(A \vee B)}$;

9) $(A \& \bar{B})$.

Построение таблиц истинности

- ✓ подсчитать n - число переменных в выражении
 - ✓ подсчитать общее число логических операций в выражении
 - ✓ установить последовательность выполнения логических операций
 - ✓ определить число столбцов в таблице
 - ✓ заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции
 - ✓ определить число строк в таблице без шапки: $m = 2^n$
 - ✓ выписать наборы входных переменных
 - ✓ провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью
- 

Решение задач

Составить таблицу истинности для формулы

$$F(A, B) = A \vee B \wedge \bar{A}$$

A	B	\bar{A}	$B \wedge \bar{A}$	F
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Решение задач

Составить таблицу истинности для формулы

$$F(A, B) = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B)$$

A	B	$A \vee B$	\bar{A}	$\bar{A} \vee B$	F
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Решение задач

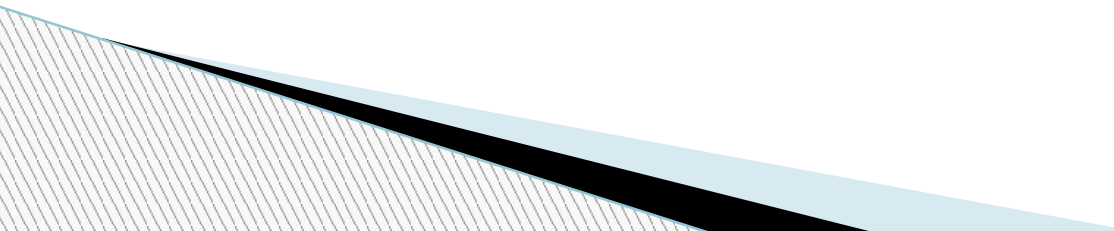
Составить таблицу истинности для формулы

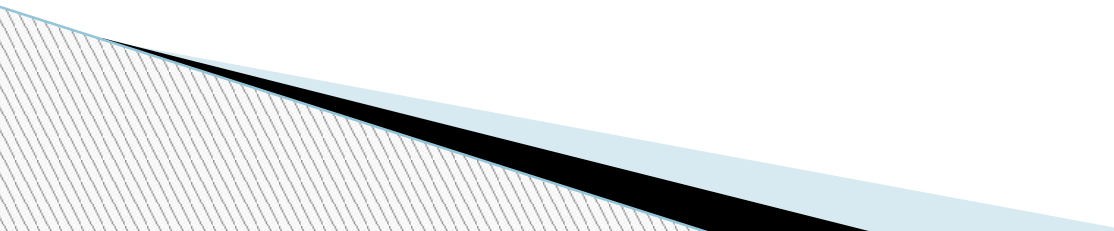
$$F(A, B) = ((A \vee \bar{B}) \rightarrow B) \wedge (\bar{A} \vee B)$$

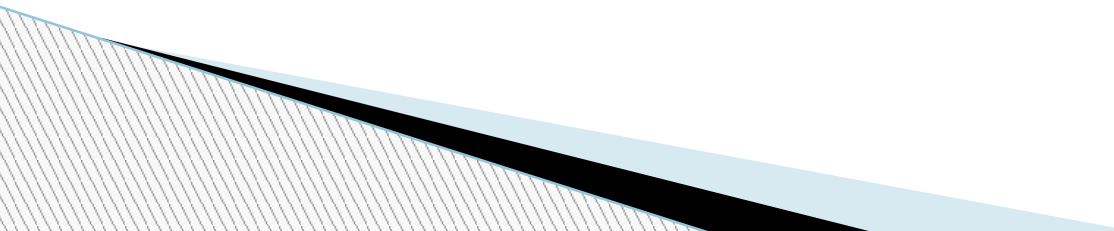
				x		y	
A	B	\bar{B}	$A \vee \bar{B}$	$(A \vee \bar{B}) \rightarrow B$	\bar{A}	$\bar{A} \vee B$	$x \wedge y$
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

- Напишите наименьшее число x , для которого истинно высказывание:
 - $(x > 23) \text{ И НЕ } (x \text{ делится на } 8)$

- Напишите наименьшее число x , для которого истинно высказывание:
 - $(x > 16)$ И НЕ (в числе x нет одинаковых цифр)

- Напишите наименьшее число x , для которого истинно высказывание:
 - $(x > 45)$ И НЕ (сумма цифр числа x не равна 8)
- 

- Напишите наибольшее число x , для которого истинно высказывание:
 - $(x < 55)$ И НЕ (сумма цифр числа x не равна 10)
- 

- Напишите наибольшее число x , для которого истинно высказывание:
 - $\text{НЕ } (x > 31)$ И $\text{НЕ } (x \text{ нечётное})$
- 

Задание

Составить таблицу истинности

$$F(A, B) = ((A \vee \bar{B}) \rightarrow B) \wedge (\bar{A} \vee B)$$

				x		y	
a	b	\bar{B}	$A \vee \bar{B}$	$(A \vee \bar{B}) \rightarrow B$	\bar{A}	$\bar{A} \vee B$	$x \wedge y$
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

Задание

Составить таблицу истинности

$$F(A, B) = ((A \vee \bar{B}) \rightarrow B) \wedge (\bar{A} \vee B)$$

				x		y	
a	b	\bar{B}	$A \vee \bar{B}$	$(A \vee \bar{B}) \rightarrow B$	\bar{A}	$\bar{A} \vee B$	$x \wedge y$
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1