

# Распространение упругих волн вдоль прямой

---

Деревич И.В.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва 2021



**Jean Le Rond D'Alembert,  
d'Alembert; (1717 — 1783)  
философ, математик и механик**

# Решение Даламбера

# Уравнение распространения волн

Уравнение баланса импульса в упругой среде

---

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \quad -\infty < x < \infty \quad t \geq 0$$

Начальные условия

$$U(x,0) = \Phi(x) \quad \left. \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x)$$

# Решение Даламбера (d'Alambert)

Формула Даламбера с учетом внешнего возмущения

---

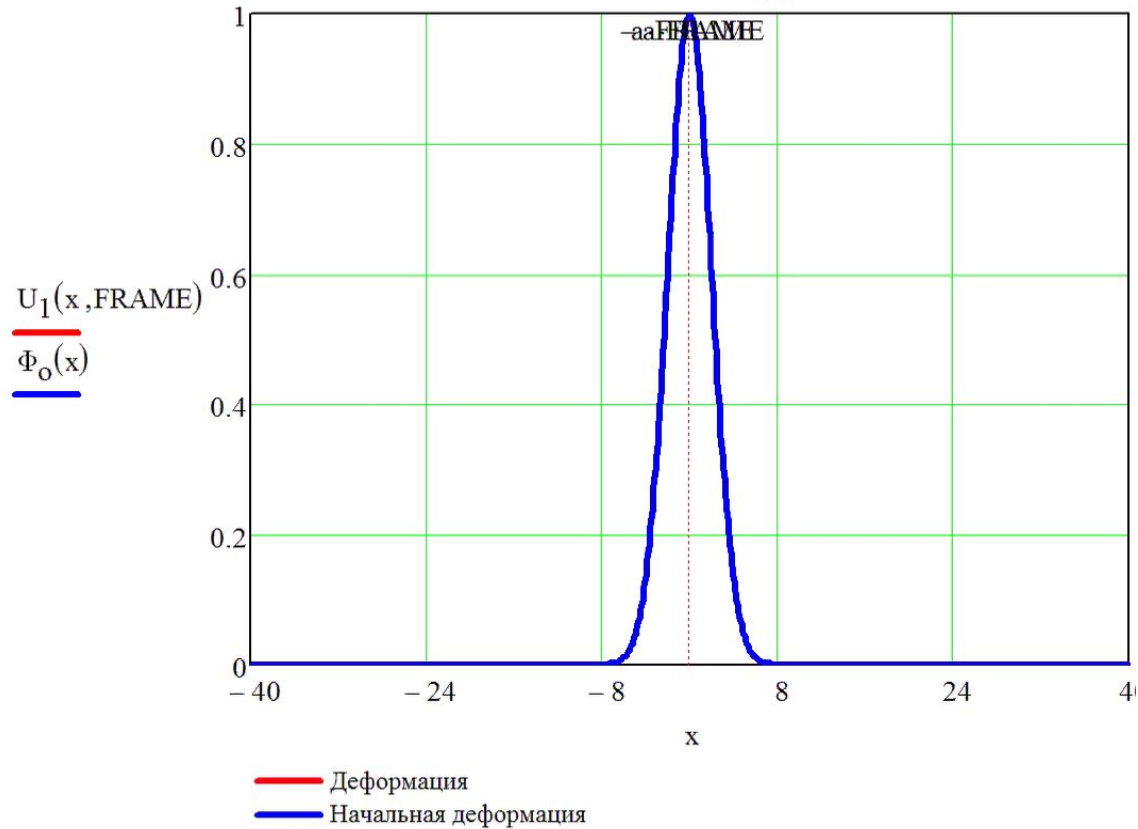
$$U(x, t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(x') dx' +$$
$$+ \frac{1}{2a} \int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} F(x', s) dx'$$

---

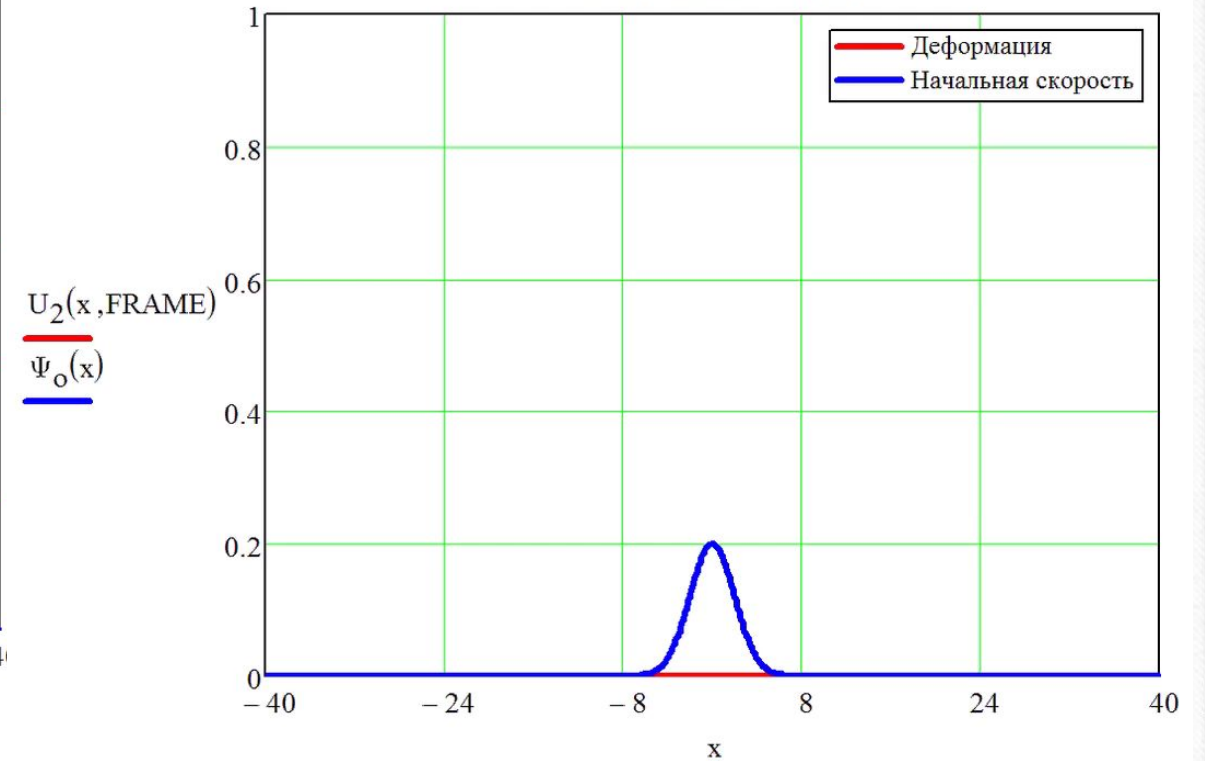
# Упругие волны вдоль неограниченной прямой

# Заданы начальная деформация или начальная скорость деформации

Задана начальная деформация



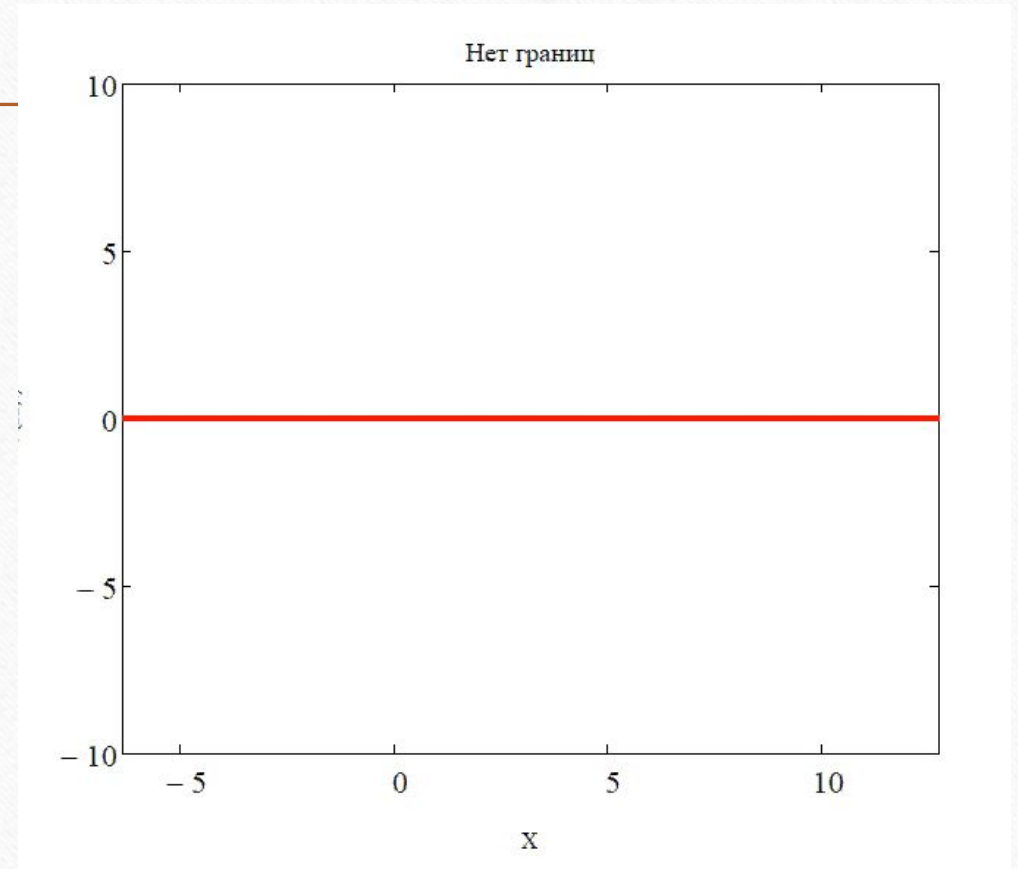
Задана начальная скорость



# Задана начальная скорость изменения деформации

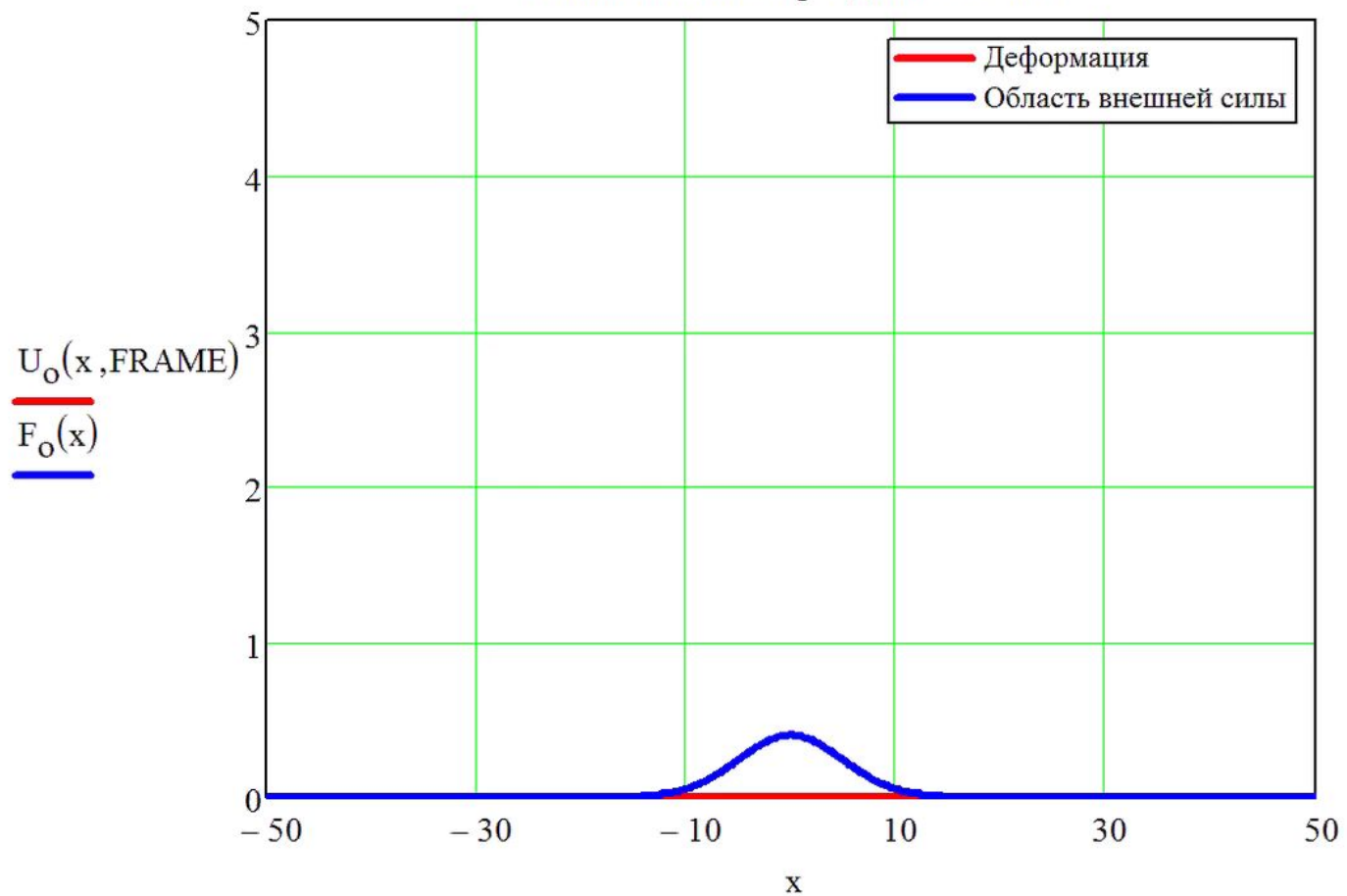
$$\Phi(x) = 0$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \cos(x), & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \\ 0, & x \notin \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$



# Задана внешняя сила

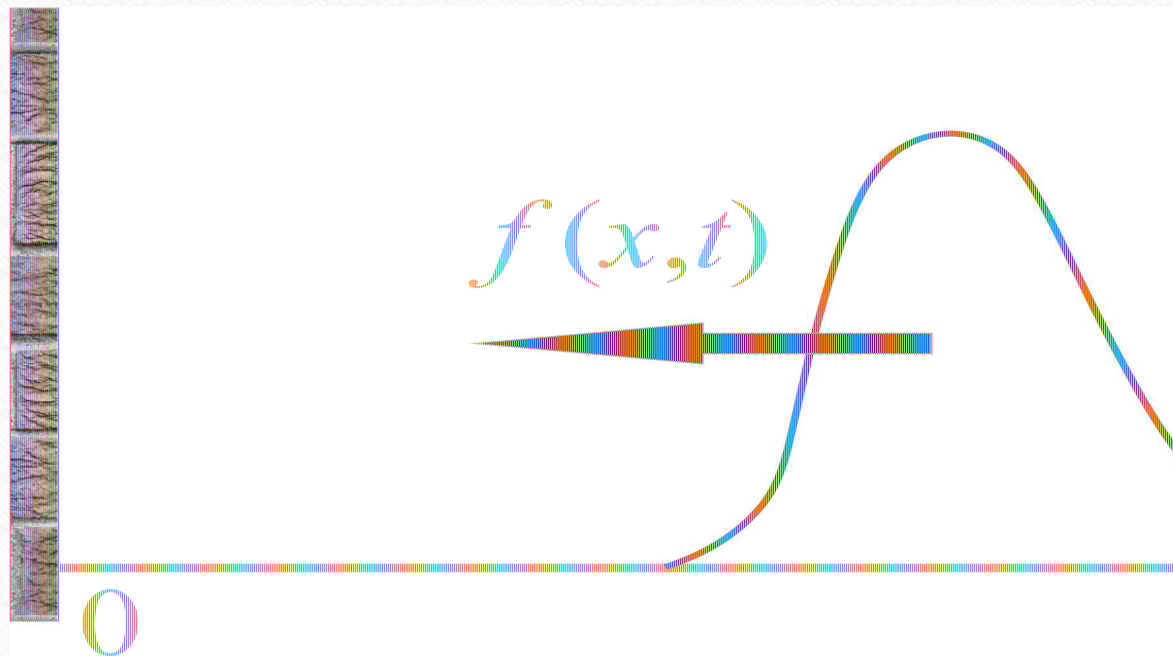
Локализованная периодическая сила





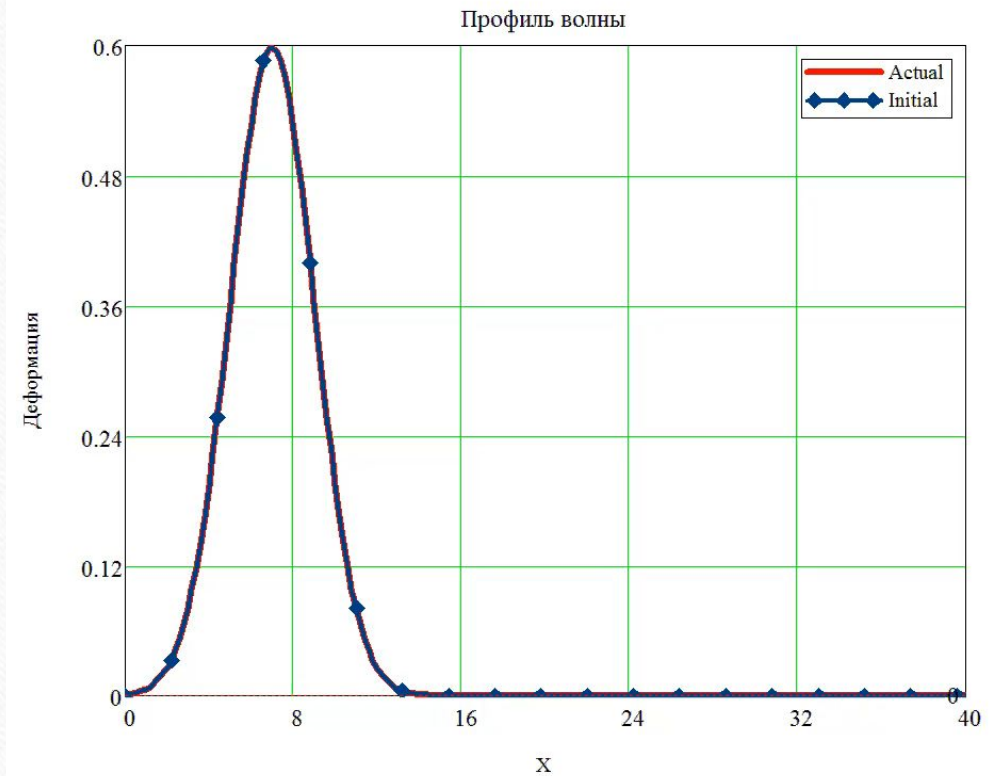
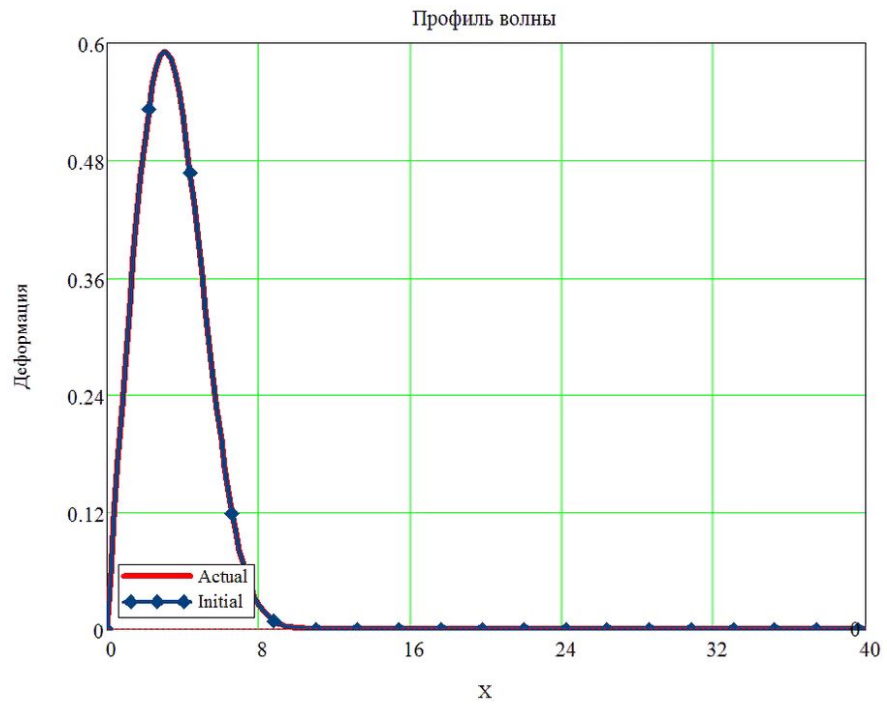
# Упругие волны на полупрямой

---



# Неподвижная граница

Задан начальный профиль деформации

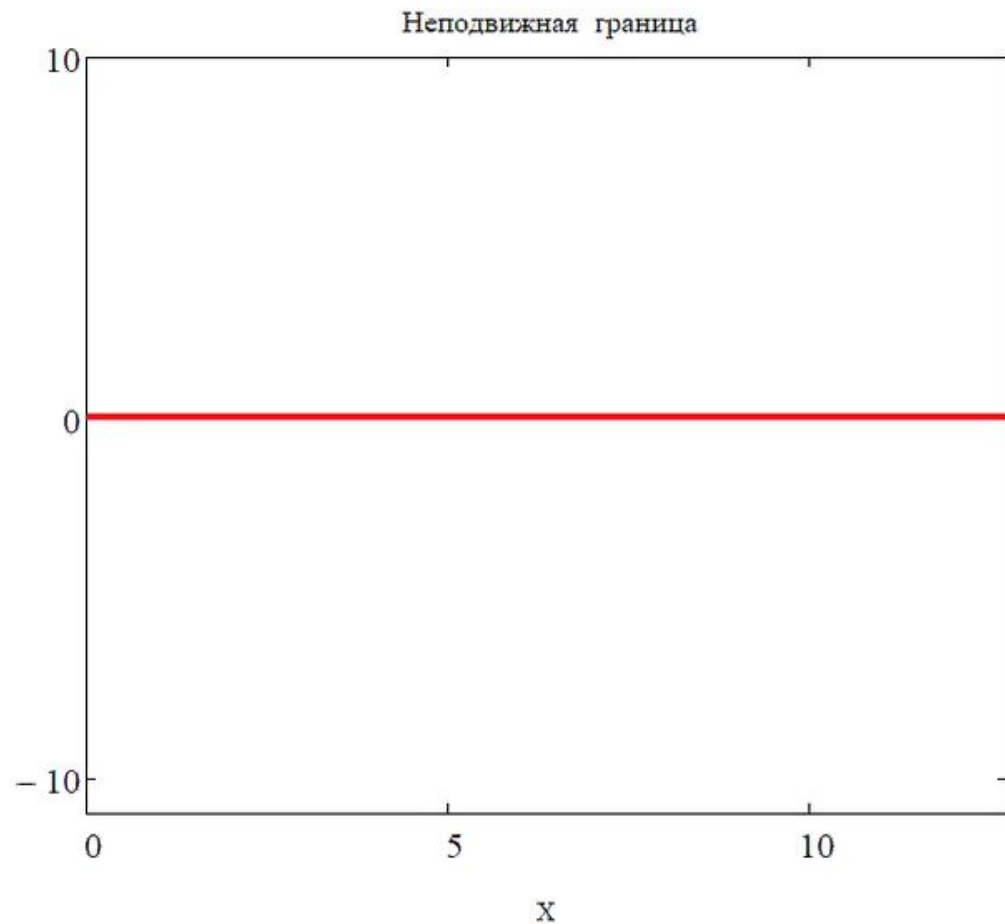


## Закрепленная граница

Задана начальная скорость деформации

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos(x), & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \\ 0, & x \notin \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

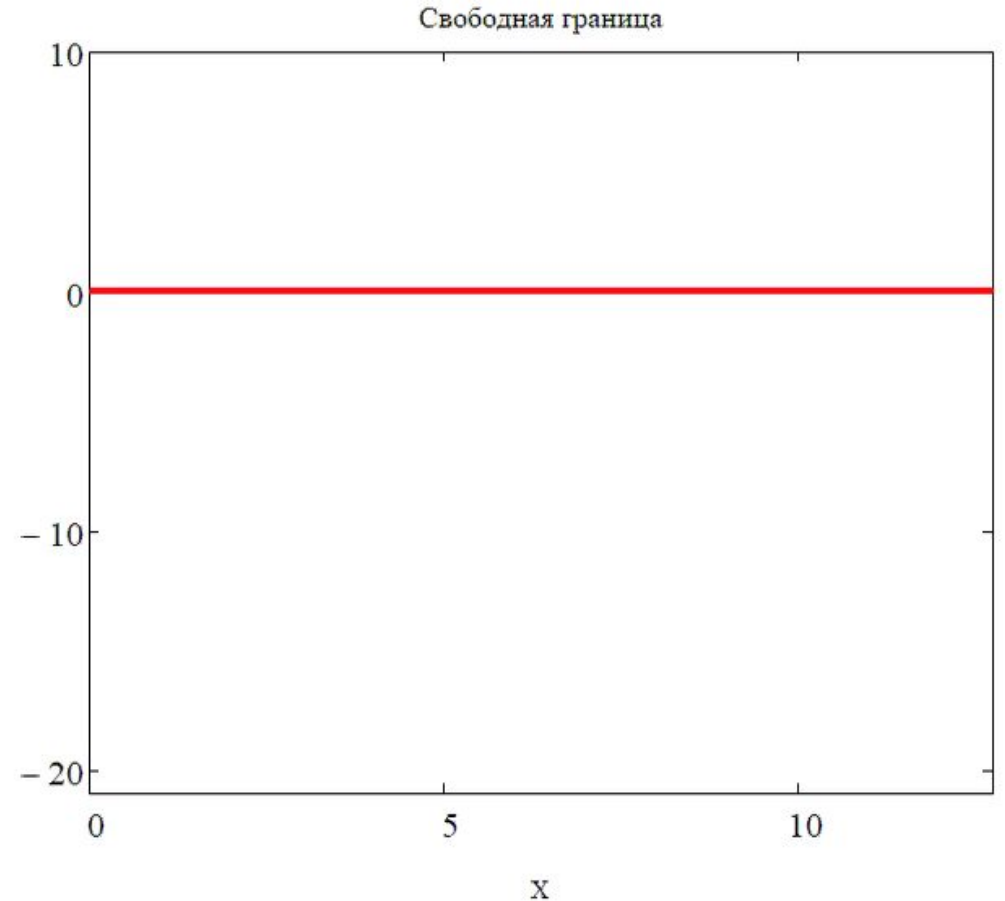


# Свободная граница

Задана начальная скорость деформации

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos(x), & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \\ 0, & x \notin \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ \psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$



---

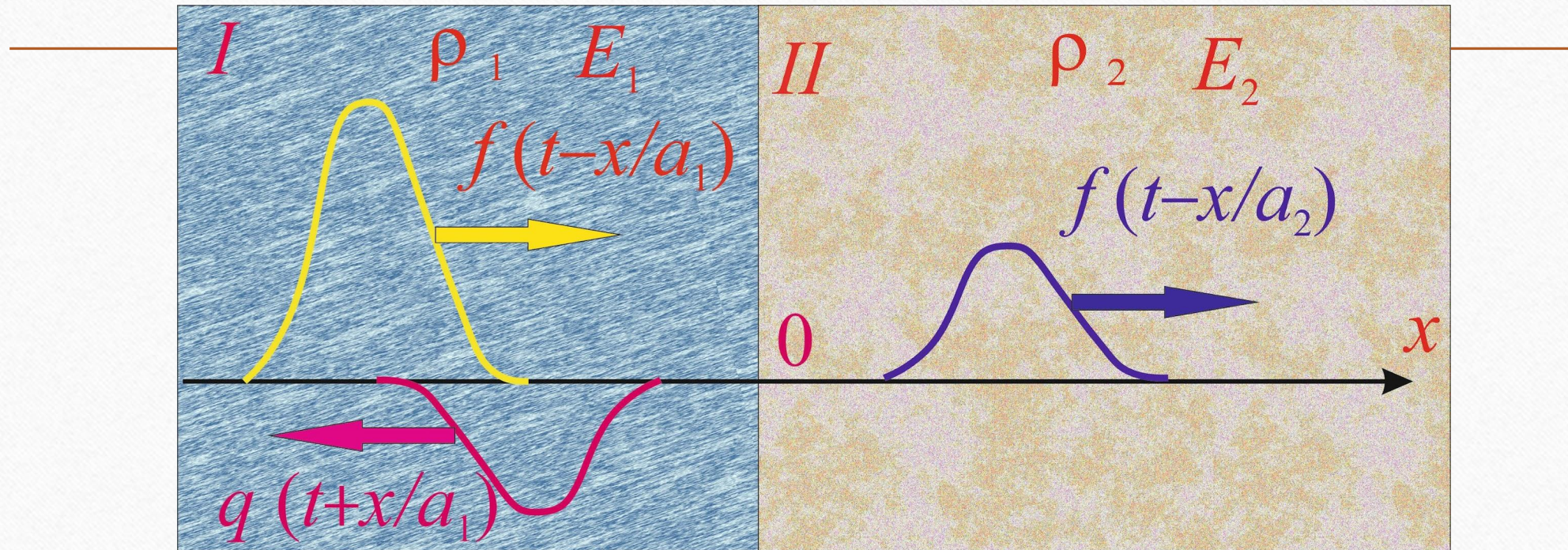
# Прохождение волны через границу двух сред

# Постановка задачи

## Деформации среды

$$U_1(x, t)$$

$$U_2(x, t)$$



$$a_1 = (E_1 / \rho_1)^{1/2}$$

$$a_2 = (E_2 / \rho_2)^{1/2}$$

## Условия на межфазной границе

### Условия непрерывности деформации и упругой силы

$$U_1(x, t)|_{x=0} = U_2(x, t)|_{x=0} \quad E_1 \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = E_2 \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

### Коэффициенты отражения и пропускания на границе раздела

$$R = - \frac{q(x, t)}{f(x, t)} \Big|_{x=0} \quad T = \frac{g(x, t)}{f(x, t)} \Big|_{x=0} \quad T + R = 1 \quad ?$$

## Расчет волн через границу раздела

Падающая

Отраженная

Прошедшая

$$f(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a_1}\right)$$

$$q(x, t) = q\left(t + \frac{x}{a_1}\right)$$

$$g(x, t) = g\left(t - \frac{x}{a_2}\right)$$

Система функциональных уравнений

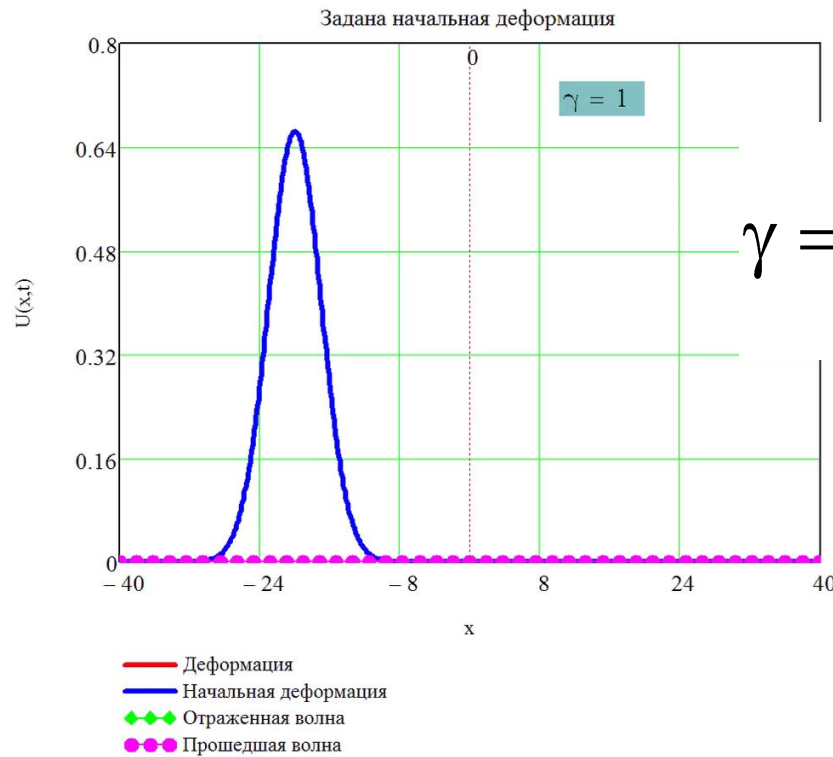
$$f(t) + q(t) = g(t)$$

$$\frac{E_1}{a_1}(-f'(t) + q'(t)) = -\frac{E_2}{a_2}g'(t)$$

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$$



# Условие баланса импульса



$$\gamma = \frac{E_1 a_2}{a_1 E_2} = \sqrt{\frac{E_1 \rho_1}{E_2 \rho_2}}$$

безразмерный  
параметр задачи

Отраженная волна

$$q(x, t) = -\frac{1-\gamma}{1+\gamma} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right)$$

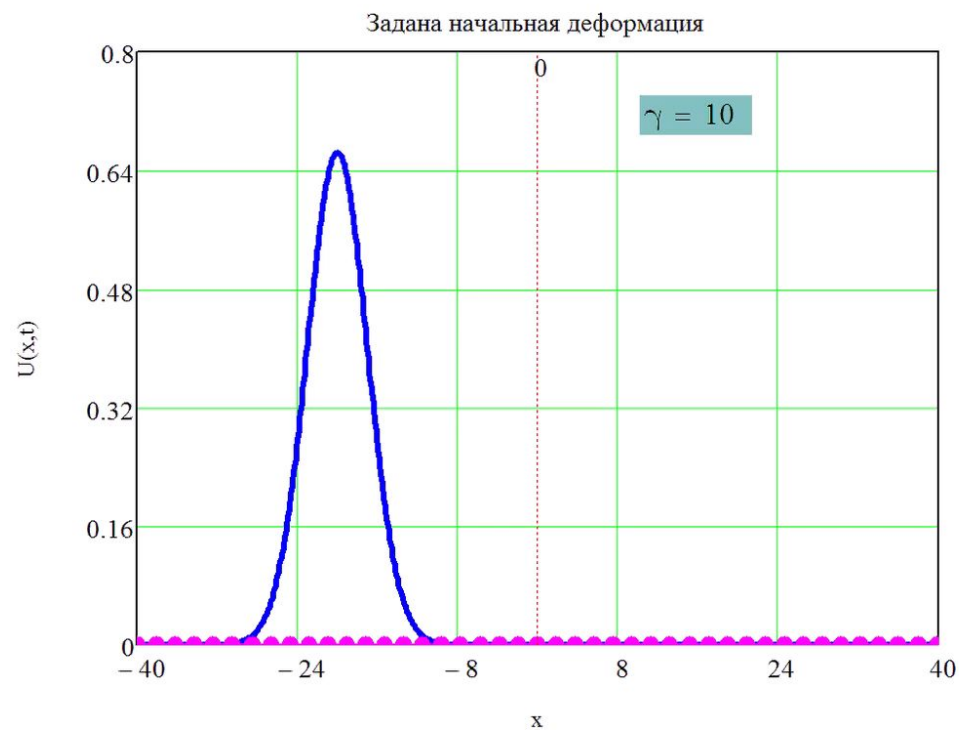
Прошедшая волна

$$g(x, t) = \frac{2\gamma}{1+\gamma} f\left(t - \frac{x}{a_2}\right)$$

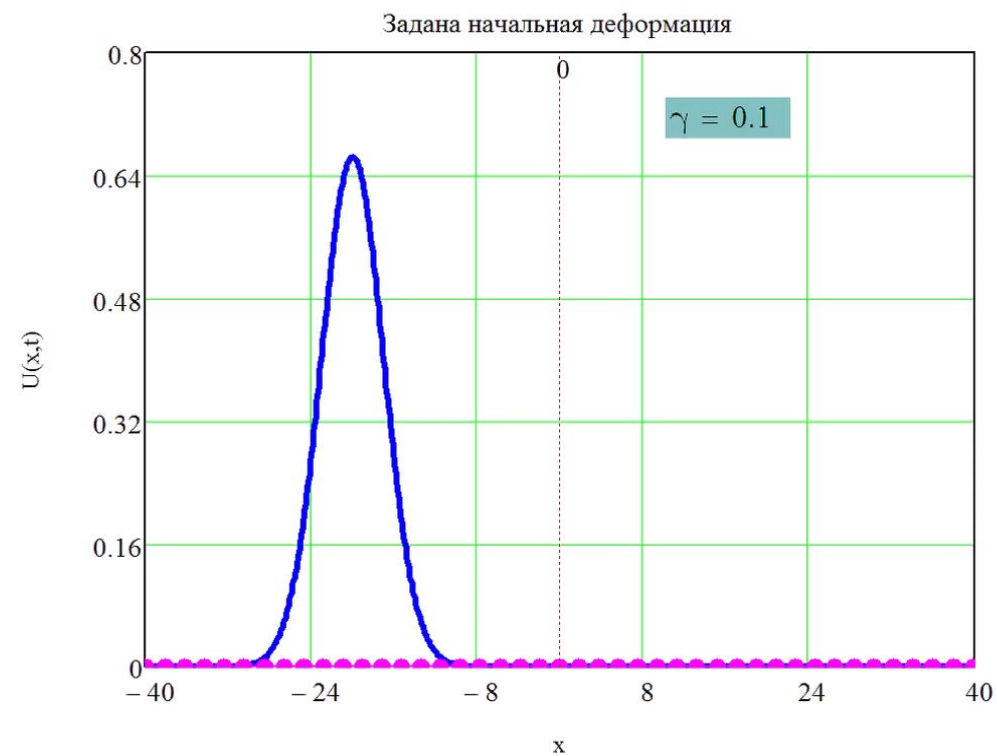
Коэффициенты пропускания и отражения

$$T = \frac{2\gamma}{1+\gamma} \quad R = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \quad T + R = 1$$

# Примеры расчетов



- Деформация
- Начальная деформация
- ◆ Отраженная волна
- Прошедшая волна



- Деформация
- Начальная деформация
- ◆ Отраженная волна
- Прошедшая волна

# Resume

Представлены расчеты распространения упругой волны на неограниченной и полуограниченной прямой

- ✓ Проиллюстрировано движение волны при заданной деформации или скорости деформации
- ✓ Представлены расчеты распространения волны на полупрямой с различными условиями закрепления границы
- ✓ Рассмотрена задача о прохождении плоской волны через границу двух сред