Распространение упругих волн вдоль прямой

Деревич И.В.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва 2021

Jean Le Rond D'Alembert,
d'Alembert; (1717 — 1783)
философ, математик и механик

Решение Даламбера

Уравнение распространения волн

Уравнение баланса импульса в упругой среде

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \qquad t \geq 0$$

Начальные условия

$$U(x,0) = \Phi(x) \qquad \left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi(x)$$

Решение Даламбера (d`Alambert)

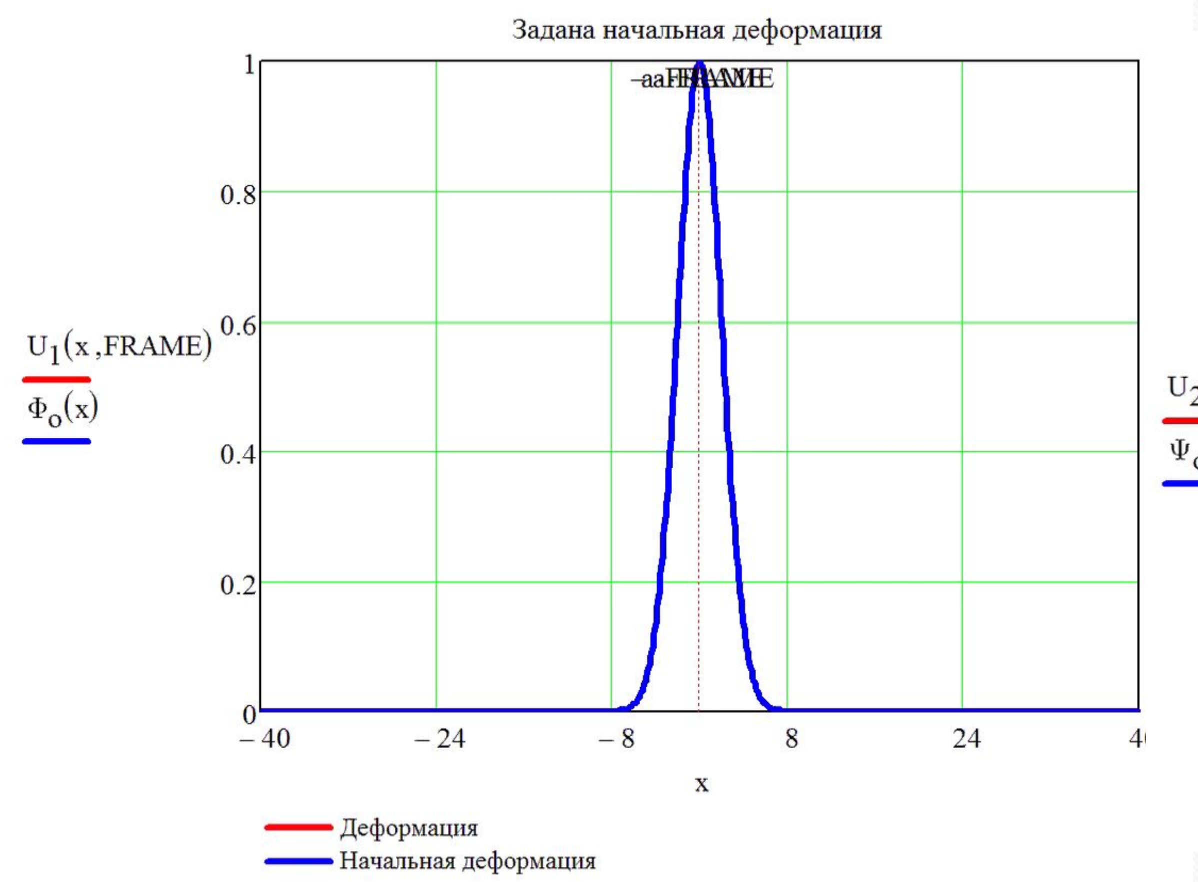
Формула Даламбера с учетом внешнего возмущения

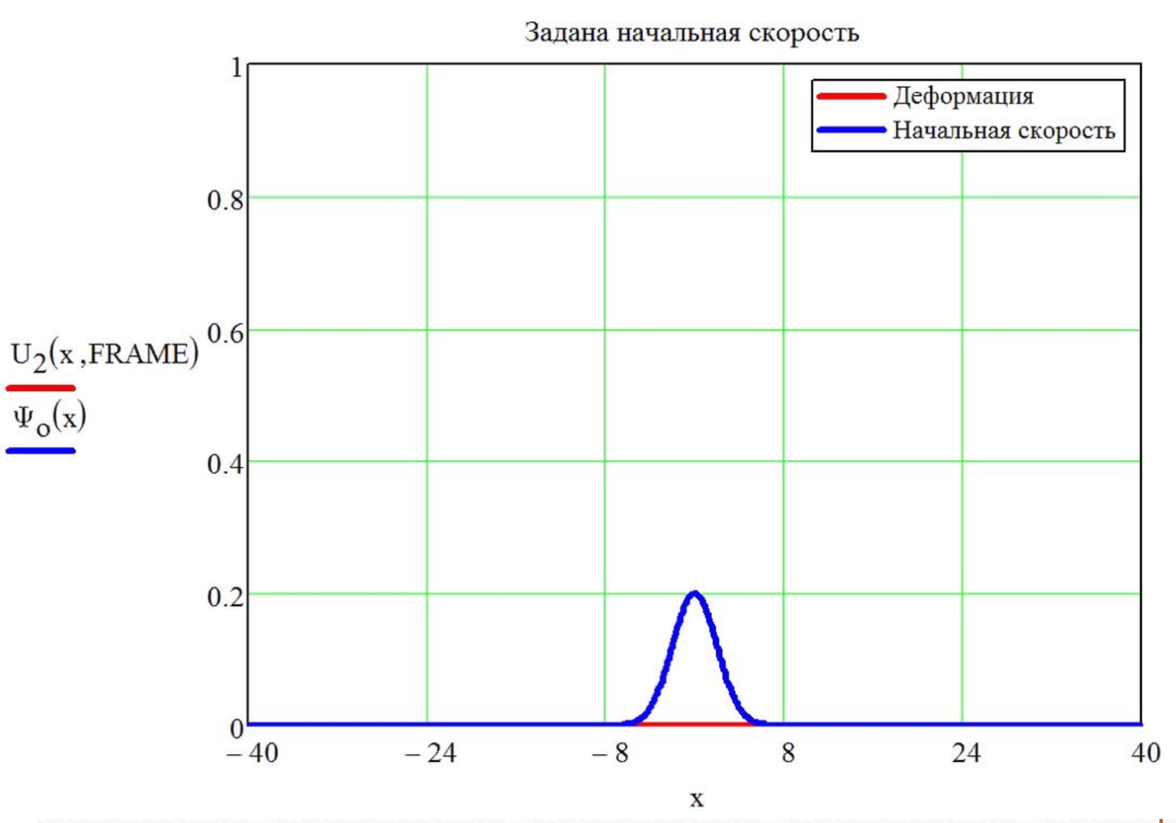
$$U(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(x')\,\mathrm{d}x'+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{0}^{t}\mathrm{d}s\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}F(x',s)\,\mathrm{d}x'$$

Упругие волны вдоль неограниченной прямой

Заданы начальная деформация или начальная скорость деформации

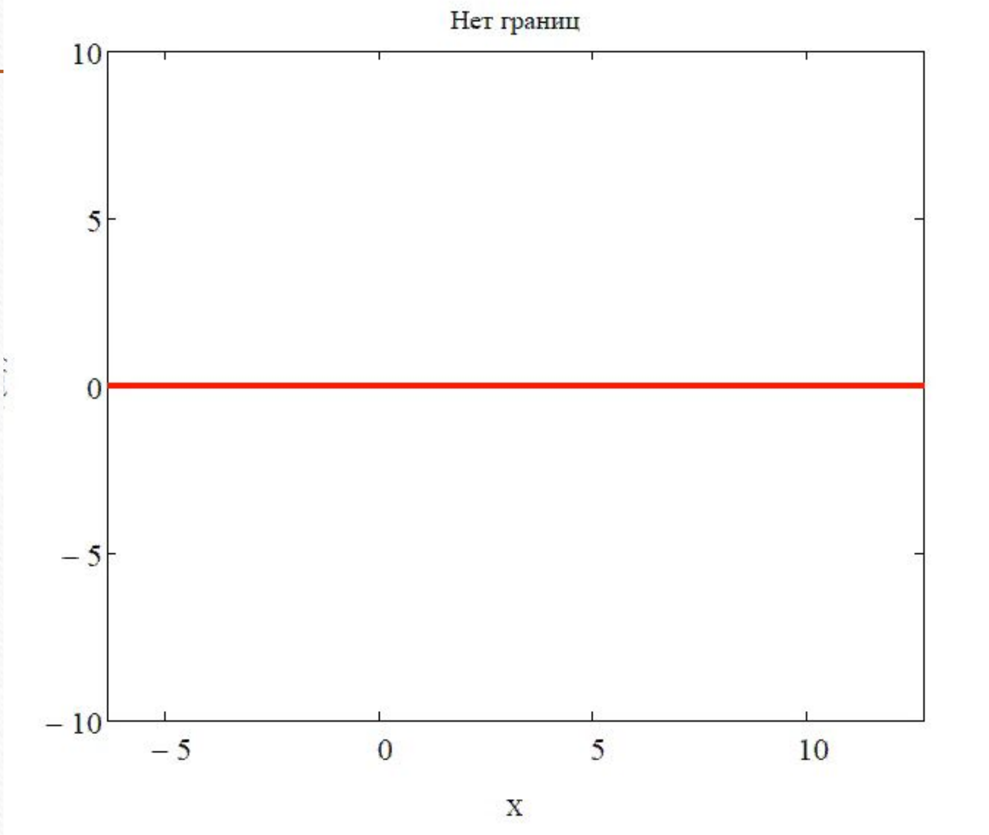




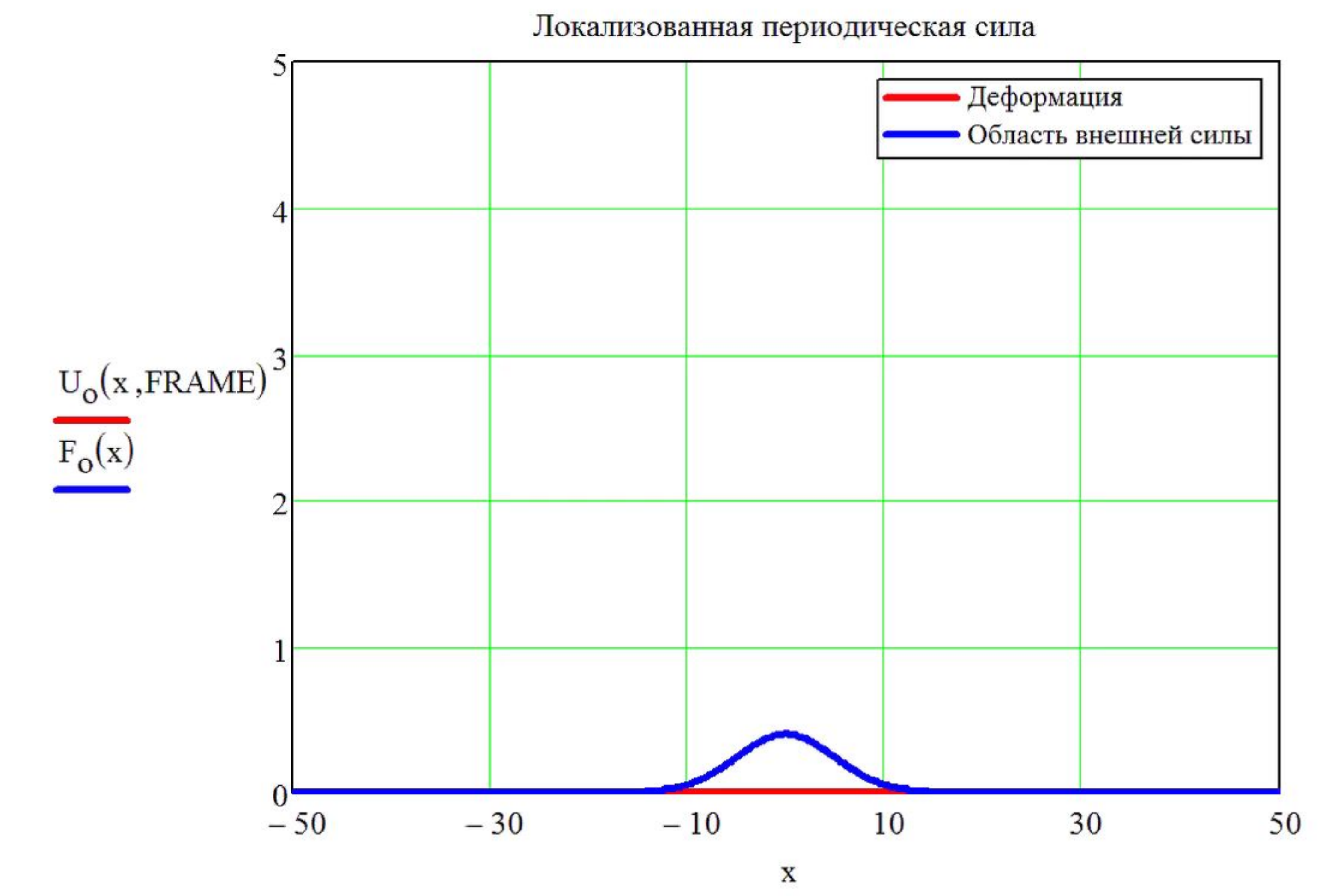
Задана начальная скорость изменения деформации

$$\Phi(x) = 0$$

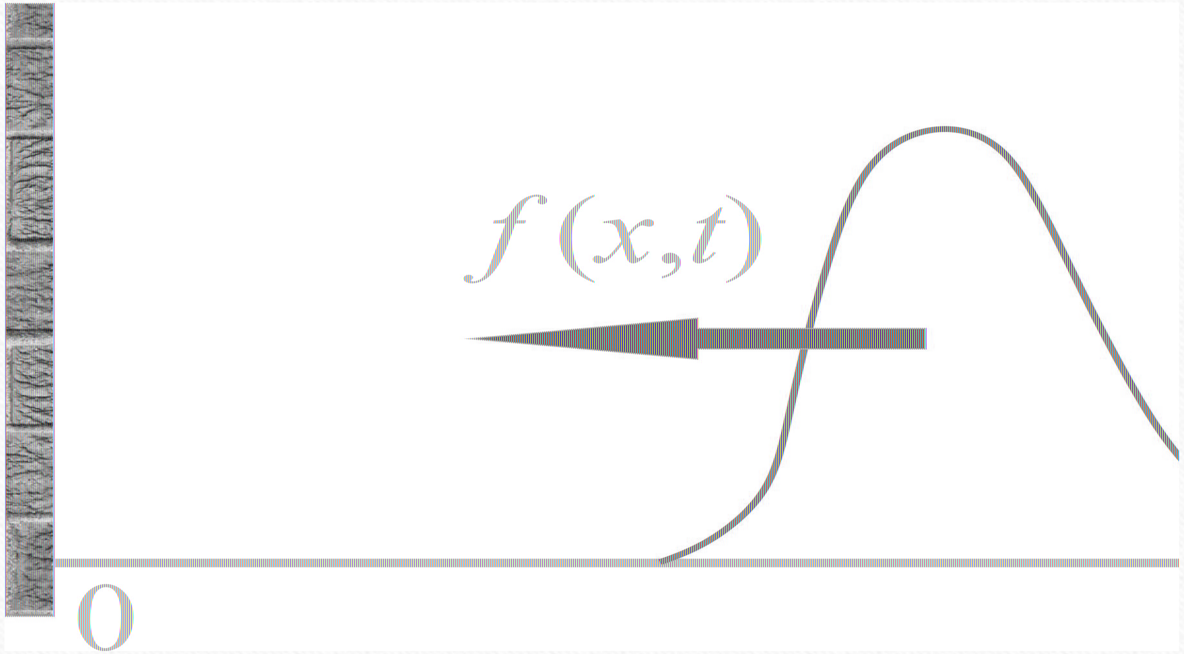
$$\Psi(x) = \begin{cases} \cos(x), & \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi \\ 0, & x \notin \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$



Задана внешняя сила

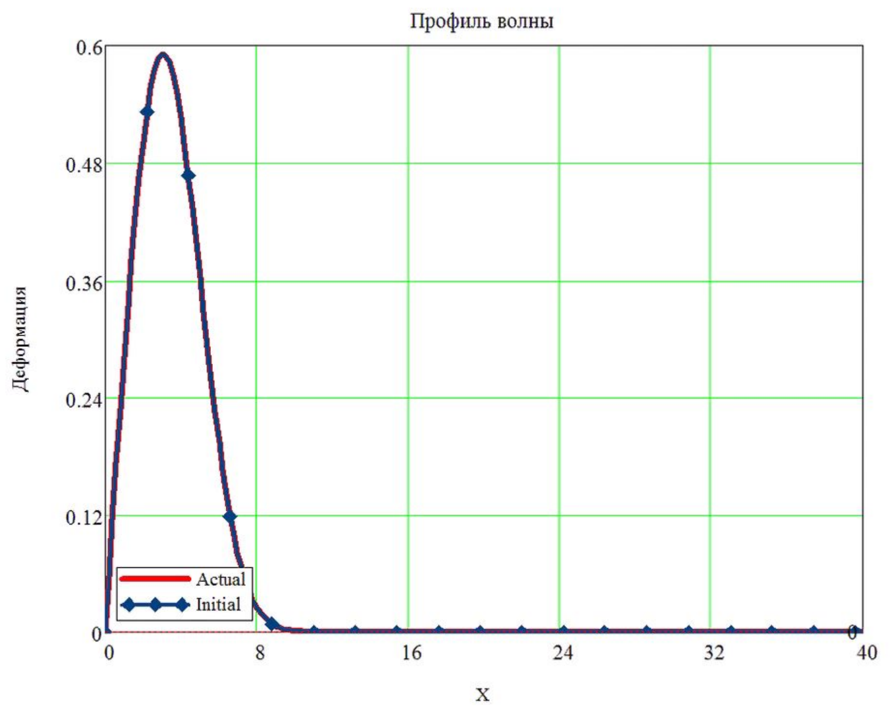


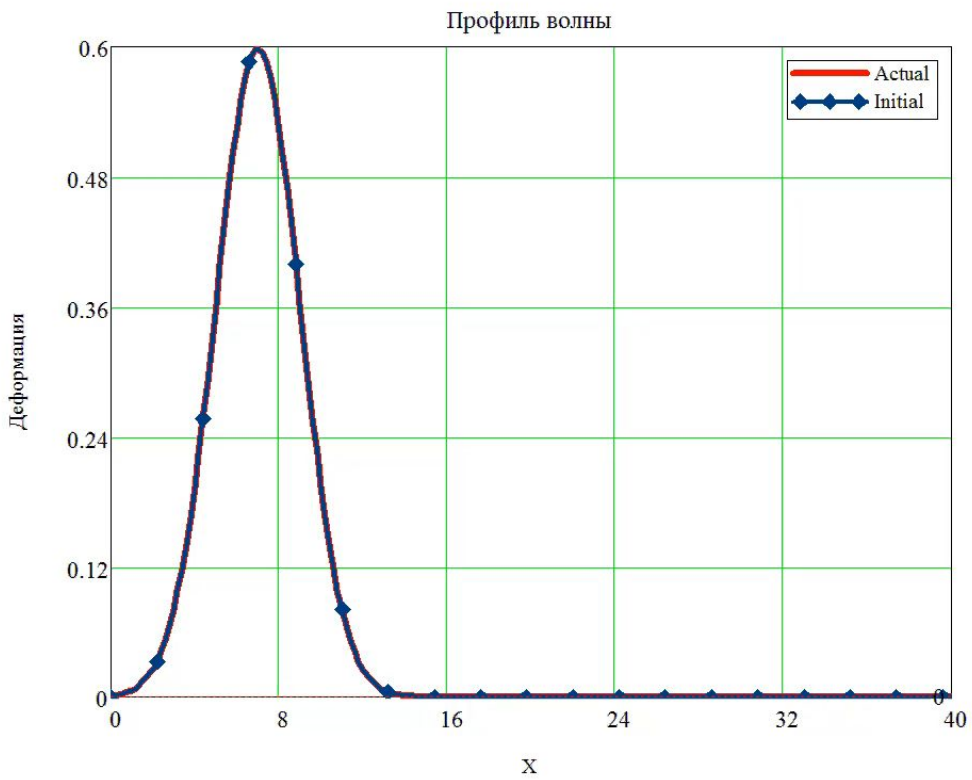
Упругие волны на полупрямой



Неподвижная граница

Задан начальный профиль деформации



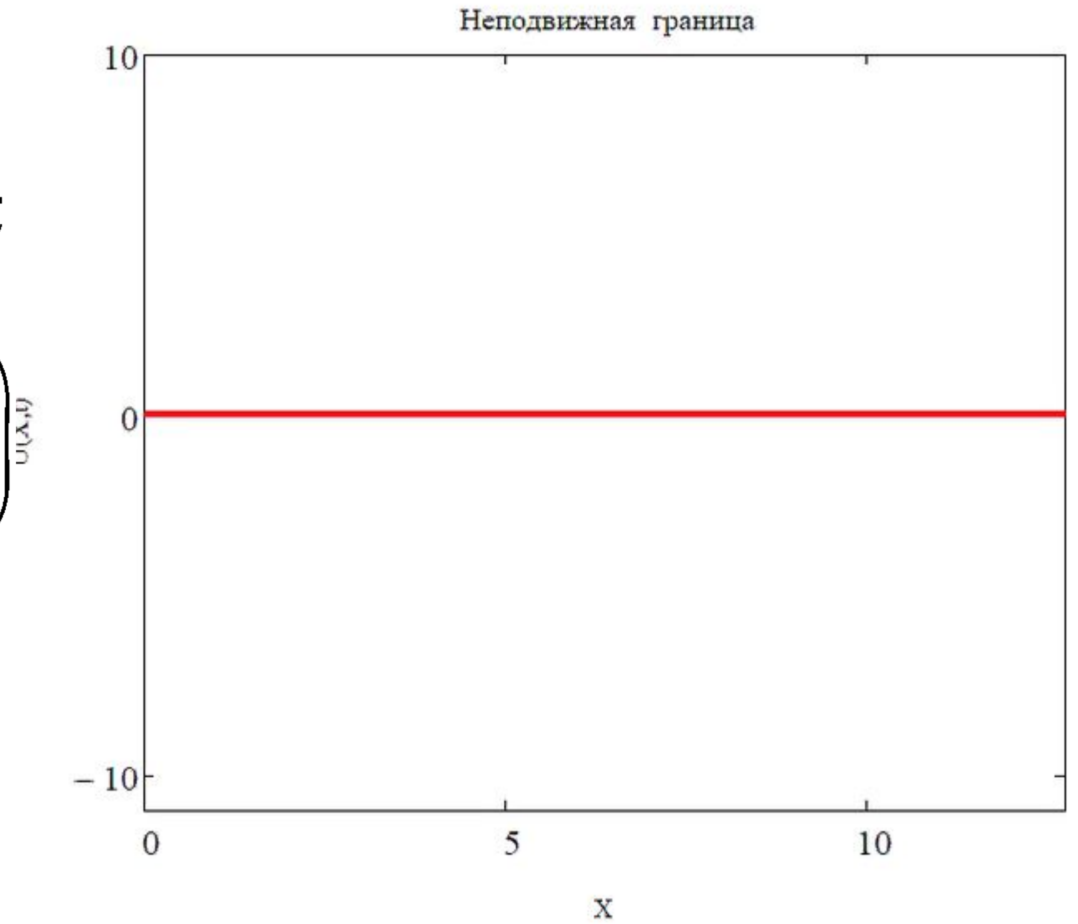


Закрепленная граница

Задана начальная скорость деформации

$$\psi(x)=\begin{cases}\cos(x), & \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi\\ 0, & x\notin\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right)\end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases}$$

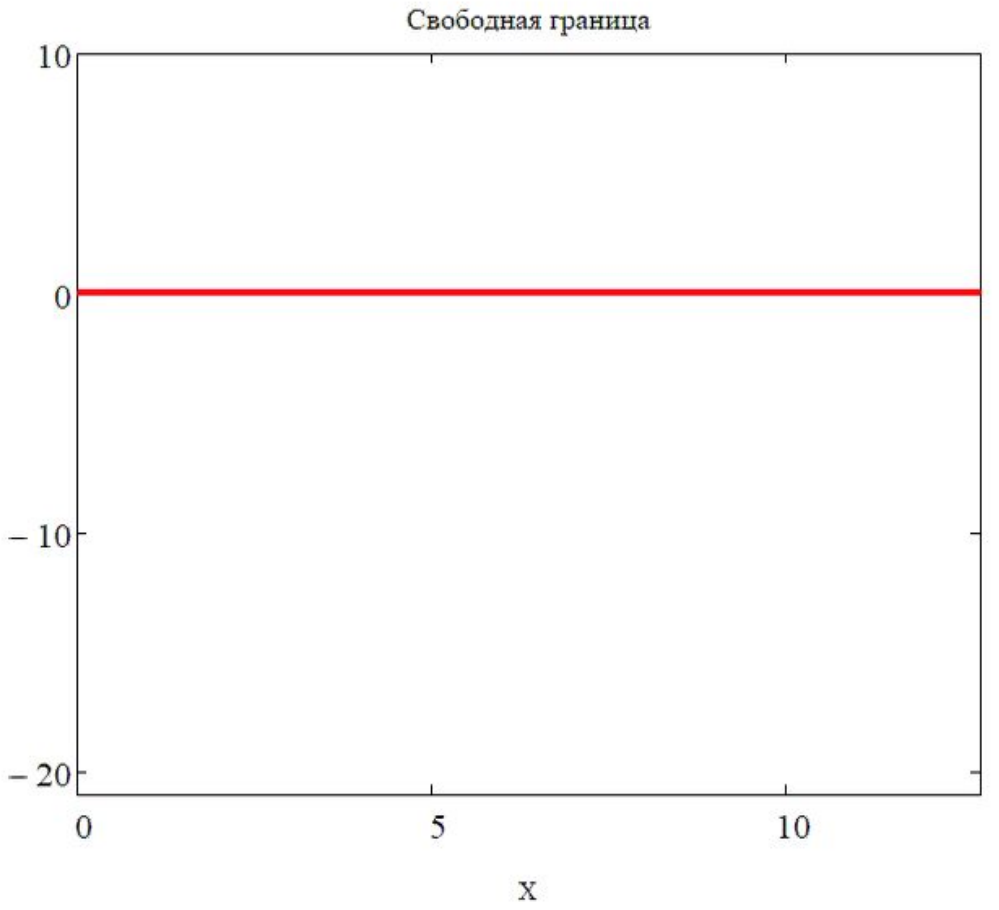


Свободная граница

Задана начальная скорость деформации

$$\psi(x)=\begin{cases}\cos(x), & \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi\\[2ex] 0, & x\notin\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right)\end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ \psi(-x), & x<0\end{cases}$$

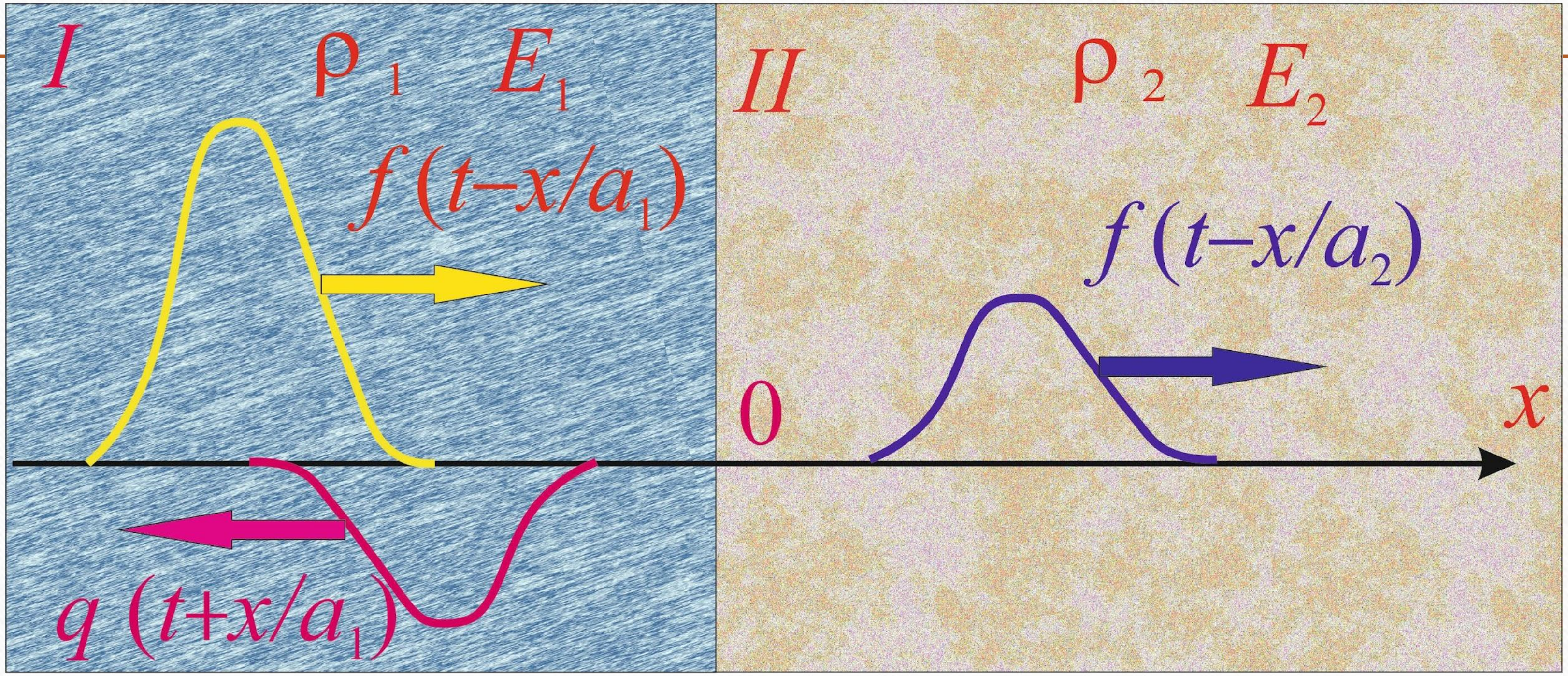


Прохождение волны через границу двух сред

Постановка задачи

Деформации среды

$U_1(x,t)$ $\qquad\qquad$ $U_2(x,t)$



$a_1=(E_1/\rho_1)^{1/2}$ $\qquad\qquad$ $a_2=(E_2/\rho_2)^{1/2}$

Условия на межфазной границе

Условия непрерывности деформации и упругой силы

$$U_1(x,t)\big|_{x=0} = U_2(x,t)\big|_{x=0} \qquad E_1 \left.\frac{\partial U_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = E_2 \left.\frac{\partial U_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$$

Коэффициенты отражения и пропускания на границе раздела

$$R = -\left.\frac{q(x,t)}{f(x,t)}\right|_{x=0} \qquad T = \left.\frac{g(x,t)}{f(x,t)}\right|_{x=0} \qquad T + R = 1 \quad ?$$

Расчет волн через границу раздела

Падающая

$$f(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a_1}\right)$$

Отраженная

$$q(x,t) = q\left(t + \frac{x}{a_1}\right)$$

Прошедшая

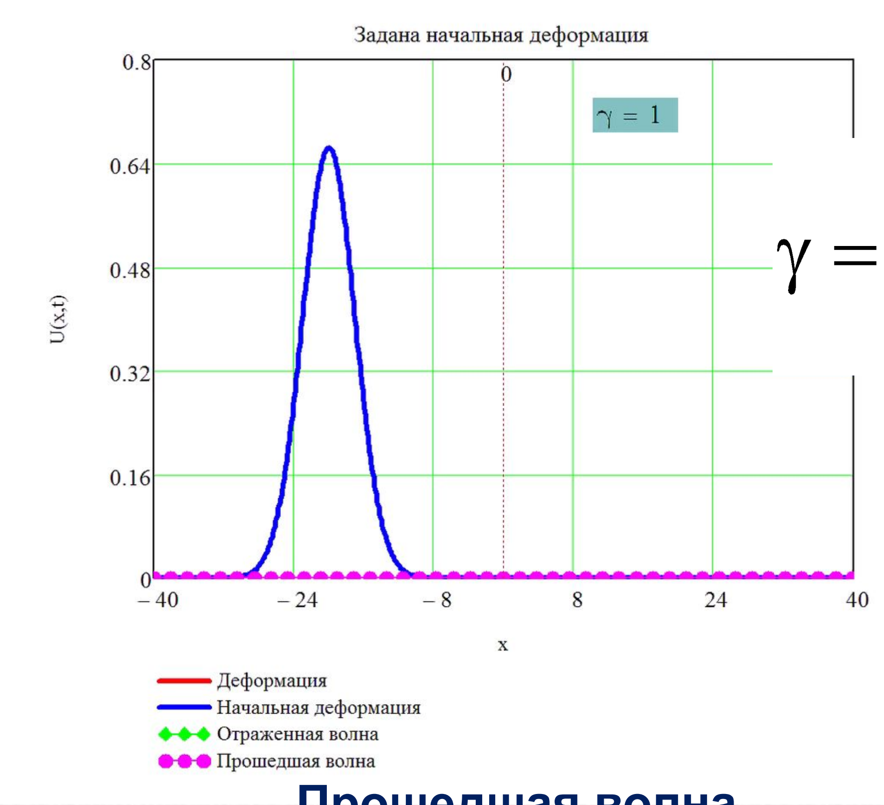
$$g(x,t) = g\left(t - \frac{x}{a_2}\right)$$

Система функциональных уравнений

$$\begin{cases} f(t) + q(t) = g(t) \\ \dfrac{E_1}{a_1}\left(-f'(t) + q'(t)\right) = -\dfrac{E_2}{a_2} g'(t) \end{cases}$$

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

Условие баланса импульса



$$\gamma = \frac{E_1}{a_1}\frac{a_2}{E_2} = \sqrt{\frac{E_1\rho_1}{E_2\rho_2}}$$

безразмерный параметр задачи

Отраженная волна

$$q(x,t) = -\frac{1-\gamma}{1+\gamma} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right)$$

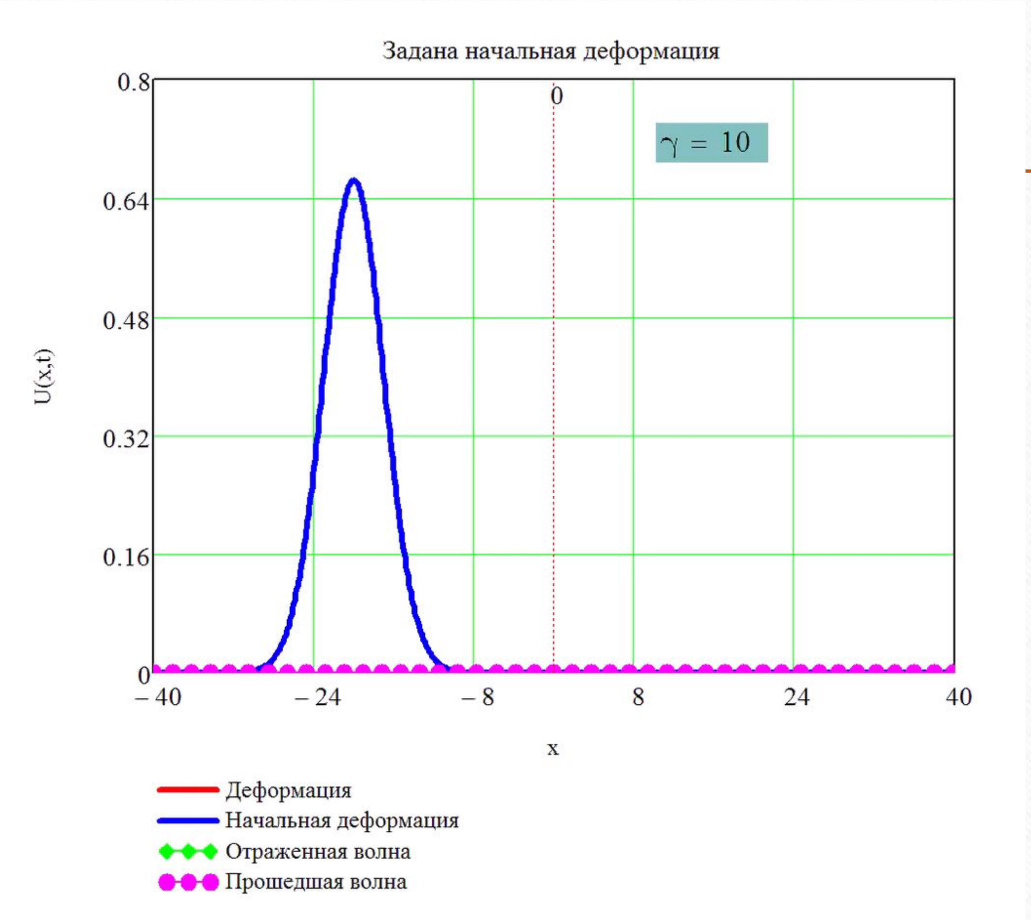
Прошедшая волна

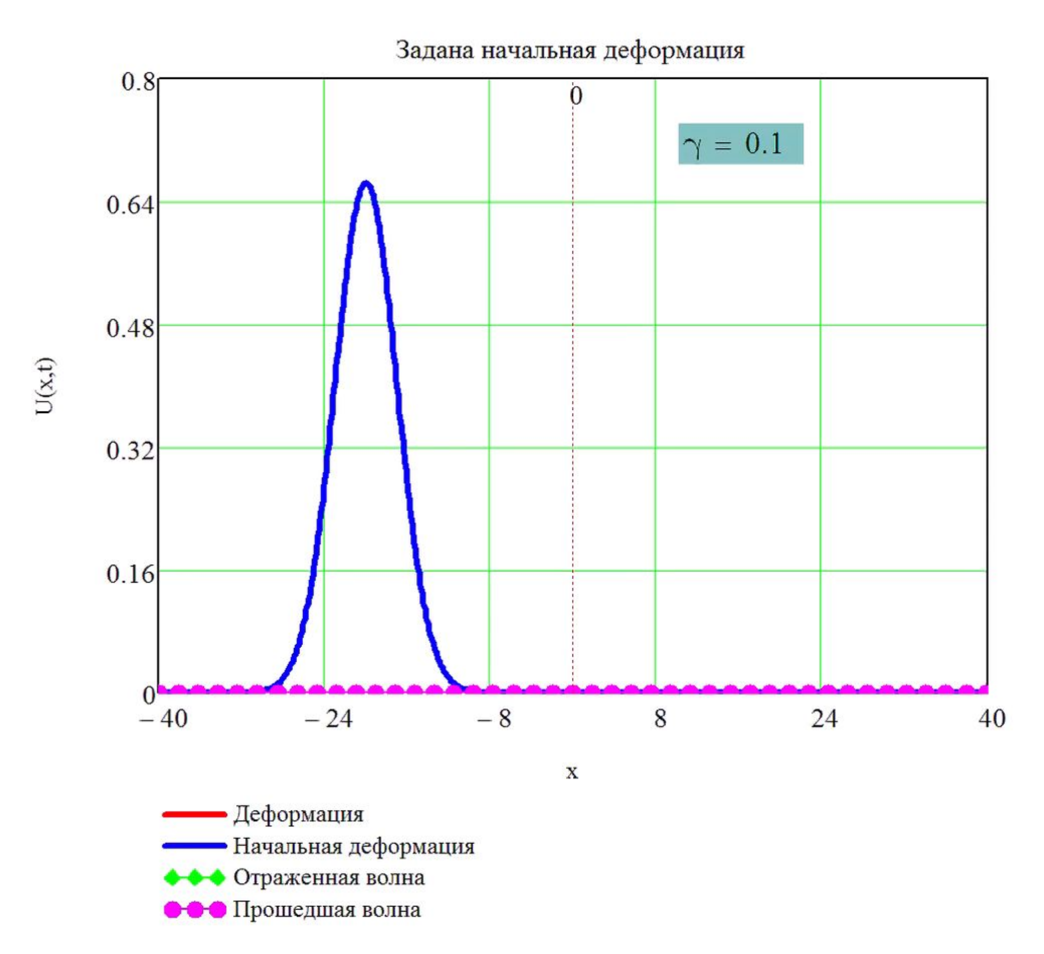
$$g(x,t) = \frac{2\gamma}{1+\gamma} f\left(t - \frac{x}{a_2}\right)$$

Коэффициенты пропускания и отражения

$$T = \frac{2\gamma}{1+\gamma} \qquad R = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \qquad T + R = 1$$

Примеры расчетов





Resume

Представлены расчеты распространения упругой волны на неограниченной и полуограниченной прямой

- ✔ Проиллюстрировано движение волны при заданной деформации или скорости деформации
- ✔ Представлены расчеты распространения волны на полупрямой с различными условиями закрепления границы
- ✔ Рассмотрена задача о прохождении плоской волны через границу двух сред