ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ
ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Гуляев Сергей Викторович
e-mail: svgul@inbox.ru

Условия обучения

- По итогам изучения дисциплины проводится экзамен
- В течение семестра необходимо выполнить все задания по календарному плану, который опубликован на Учебном портале
- Для допуска на сессию набрать 40 баллов

Список литературы

- 1. Бесекерский В.Л., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. СПб.: Профессия, 2003.
- 2. Теория автоматического управления. Ч. 1 Теория линейных систем автоматического управления / под ред. Академика А.А.Воронова. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1984.
- 3. Босс В. Лекции по теории управления. Т.1: Автоматическое регулирование. М.: ЛЕНАНД, 2017
- 4. Рощин А.В. Основы теории автоматического управления. Учебное пособие. М.: МГУПИ, 2007

Темы дисциплины

Управление и информатика, построение модели простого объекта, общие принципы системной организации, построение передаточной функции, формы представления моделей, инвариантность и чувствительность систем управления, уравнения в нормальной форме, задача Коши, передаточная матрица. Математические модели объектов и систем управления, переходные и частотные характеристики объекта, весовая функция, переходная функция, частотные характеристики, логарифмические частотные характеристики, асимптотические логарифмические частотные характеристики.

Темы дисциплины

Проблема устойчивости, типовые элементарные звенья, интегрирующее звено, апериодическое звено, колебательное звено, дифференцирующее звено, соединение звеньев. Исследование системы автоматического управления. построение логарифмических частотных характеристик, проверка устойчивости системы, запас устойчивости по фаз, запас устойчивости по амплитуде.

Решение типовых задач теории управления. Устойчивость.

Необходимое условие устойчивости

- Рассмотрим характеристический полином :
- $$f(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{считаем } a_0 > 0$$
- Решение соответствующего дифференциального уравнения имеет вид

$$x_{общ}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}$$

- вещественные части корней p_i должны быть отрицательными.

$$f(p) = a_0(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)$$

- Для действительных корней сомножители имеют вид:

$$(p + |p_1|)(p + |p_2|)\dots$$

- Для пар комплексно сопряженных корней сомножители имеют вид:

$$(p + |\operatorname{Re} p_k| - i \operatorname{Im} p_k)(p + |\operatorname{Re} p_k| + i \operatorname{Im} p_k)\dots = (p + |\operatorname{Re} p_k|)^2 + (\operatorname{Im} p_k)^2 \dots$$

- Отсюда следует, что все

$$a_i > 0, i = 1, \dots, n$$

Критерий Рауса-Гурвица

- Рассмотрим характеристический полином :
- $$f(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{считаем } a_0 > 0$$
- Составим определитель Гурвица:
- $$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$
- и главные миноры:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix}$$

- **Критерий Рауса—Гурвица**. Для того чтобы все корни характеристического полинома имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица.
- $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$

Частный случай. Критерий Вышнеградского.

- Критерий устойчивости для системы с характеристическим уравнением третьего порядка:

если произведение параметров

$$A = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 \cdot a_3^2}} \quad \text{и} \quad B = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 \cdot a_3}}$$

больше единицы при $A>0$ и $B>0$, то система третьего порядка устойчива;

если $A \cdot B<1$ при $A>0$ и $B>0$, то она неустойчива;

граница колебательной устойчивости системы третьего порядка определяется уравнением $A \cdot B=1$ при $A>0$ и $B>0$.

- Проверить соответствие критерия Вышнеградского критерию Гурвица.

Решение задач

- Определить устойчивость замкнутой и разомкнутой системы по известной передаточной функции разомкнутой системы
$$W(p) = \frac{5}{p^3 + 2p^2 + 4p - 2}$$

- Характеристическое уравнение разомкнутой системы
$$p^3 + 2p^2 + 4p - 2 = 0$$

- Найдём передаточную функцию замкнутой системы
$$W(p) = \frac{5}{p^3 + 2p^2 + 4p + 3}$$

- Характеристическое уравнение замкнутой системы
$$p^3 + 2p^2 + 4p + 3 = 0$$

- 2•4 > 3•1 - т.е. система устойчива

Задачи для самостоятельного решения

- 1. $$W(p)=\frac{5}{p^3+2p^2+4p-15}$$

- 2. $$W(p)=\frac{5}{p^3+p^2+3p-2}$$

- 3. $$W(p)=\frac{10}{p^3+2p^2+10p+15}$$

- 4. $$W(p)=\frac{4p+1}{p^4+2p^3+p^2+1}$$

Задачи для самостоятельного решения

- Известна передаточная функция разомкнутой системы. Определить значение постоянной времени T, при котором замкнутая система окажется на границе устойчивости.
- 1. $$W(p) = \frac{500}{p(0.02p+1)(Tp+1)}$$
- 2. $$W(p) = \frac{100}{p(2p+1)(Tp+1)}$$

Домашнее задание

- Определить устойчивость замкнутой и разомкнутой системы по известной передаточной функции разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{10p + 1}{p^5 + p^4 - p^3 - 20}$$

- 1.

$$W(p) = \frac{k}{p^2(Tp + 1)}$$

- 2.

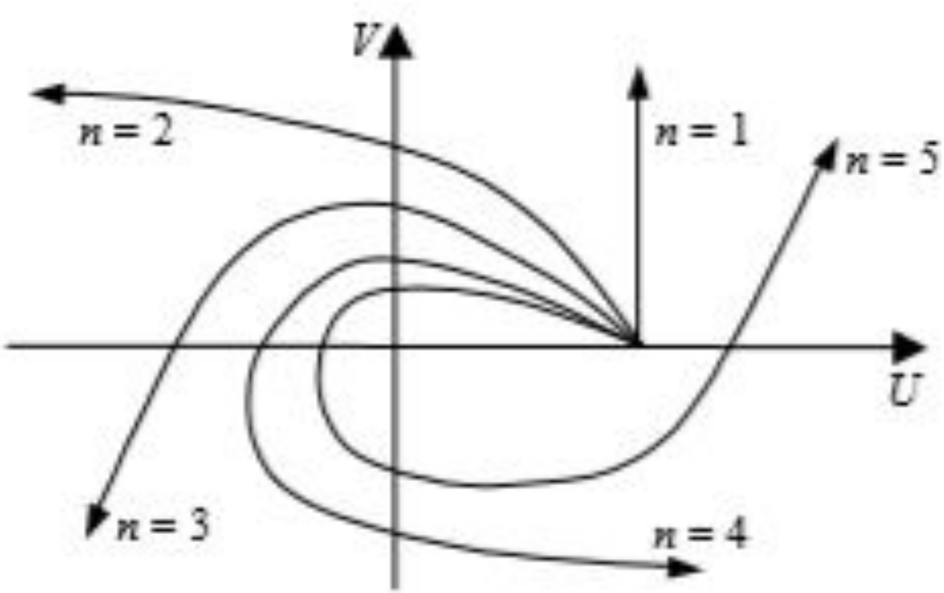
- Известна передаточная функция разомкнутой системы. Определить значение постоянной времени Т, при котором замкнутая система окажется на границе устойчивости.

$$W(p) = \frac{10}{p(4p + 1)(Tp + 1)}$$

- 1.

Примеры годографов Михайлова

- Годограф Михайлова устойчивых систем имеет спиралевидную форму, начинается при ω=0 на положительной полуоси, и далее спираль совершает n оборотов вокруг нуля против часовой стрелки, уходя в бесконечность в
  n-ом по счету квадранте, где n –степень полинома.



-
- устойчивые

Критерий Михайлова

- Для того, чтобы САУ была устойчива необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова при изменении частоты от 0 до ∞ , начинаясь при $\omega=0$
- на вещественной положительной полуоси, обходил против часовой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости .
- Годограф Михайлова относится к знаменателю передаточной функции.
- **Пример.** Оценить устойчивость АС по критерию Михайлова, если известен характеристический полином замкнутой системы

$$D(p) = p^3 + 0.5p^2 + 12p + 5$$

Критерий Михайлова

- Для построения кривой Михайлова определим вещественную и мнимую части функции $D(j\omega)$

$$U(\omega) = \operatorname{Re} D(j\omega) = 5 - 0.5\omega^2$$

$$V(\omega) = \operatorname{Im} D(j\omega) = \omega(12 - \omega^2)$$

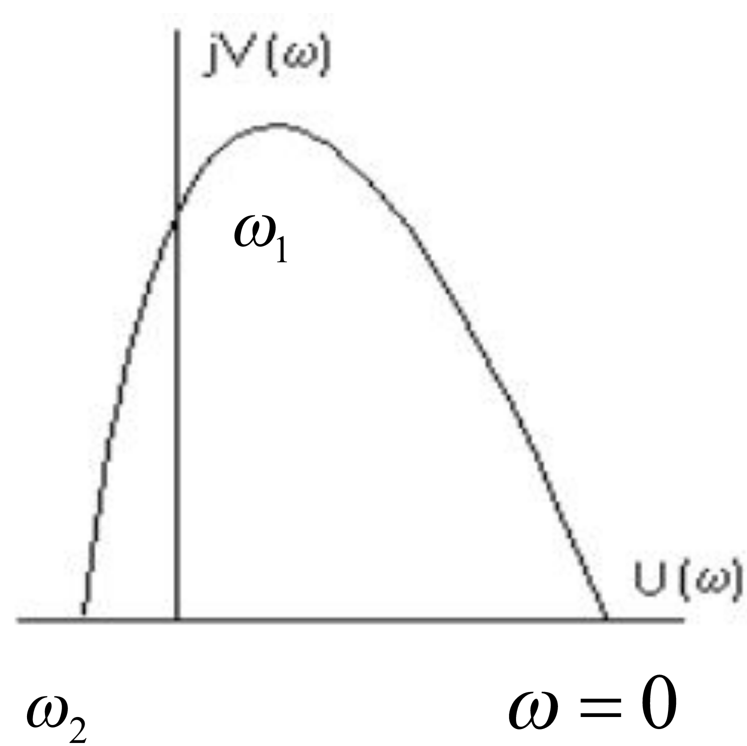
- Определим характерные точки кривой.
- При $\omega = 0$, $U(0) = 5, V(0) = 0$
- Из условия $U(\omega_1) = 0$ находи

$$\omega_1 = \sqrt{10}, V(\omega_1) = 2\sqrt{10} \approx 6.3$$

- Из условия $V(\omega_2) = 0$ находи

$$\omega_2 = 2\sqrt{3}, U(\omega_2) = 5 - 0.5 \cdot 12 = -1$$

- Система устойчивая.



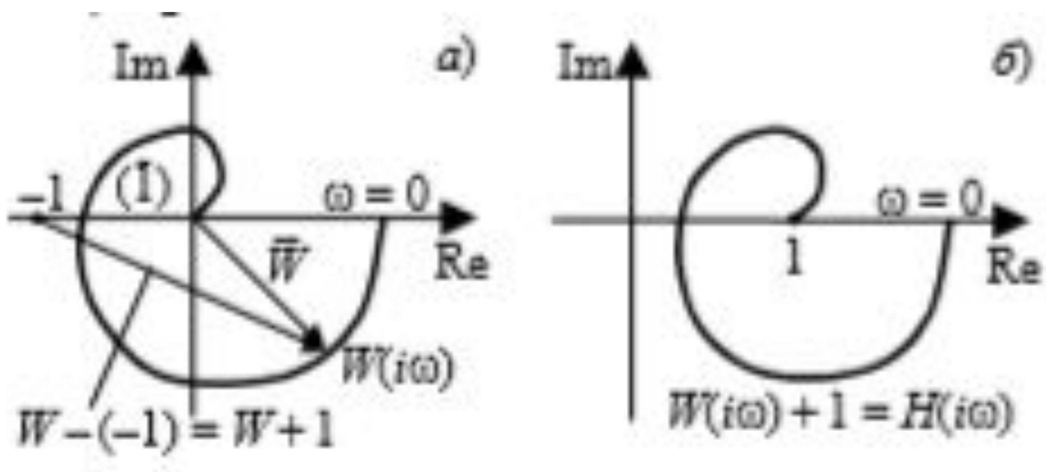
Задачи для самостоятельного решения

- 1. $$D(p) = p^3 + 2p^2 + 4p + 10$$
- 2. $$D(p) = p^3 + 10p^2 + 6p + 2$$
- Домашнее задание

$$D(p) = 2p^3 + 4p^2 + 3p + 5$$

Критерий Найквиста

- Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы годограф *W(i ω)* вообще не должен охватывать точку (-1, 0i) при изменении частоты от 0 до ∞ и повороте вектора годографа *W(i ω)* по часовой стрелке.

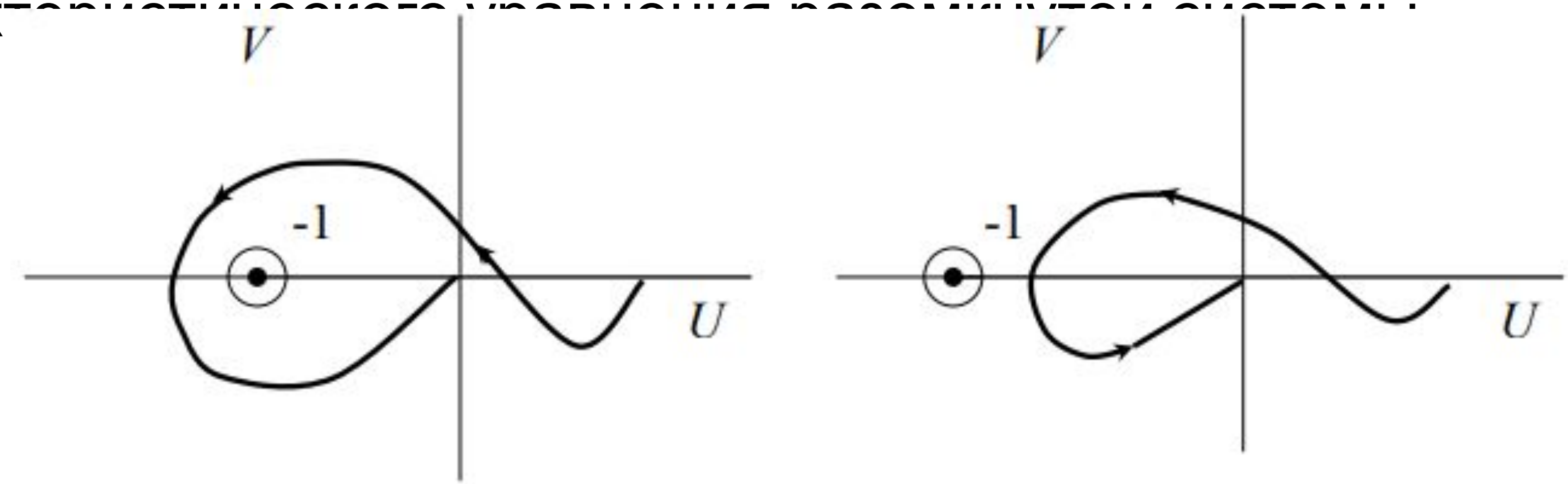


- а) - разомкнутая система
- б) – вспомогательная функция *H*(*iω*)

Критерий Найквиста

Критерий Найквиста

- Следствие из критерия Найквиста
- Если разомкнутая система неустойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф $W(i\,\omega)$ охватывал точку (-1, 0i) при изменении частоты от 0 до ∞ в положительном направлении (против часовой стрелки)
- m/2 раз, где m – число правых корней харак

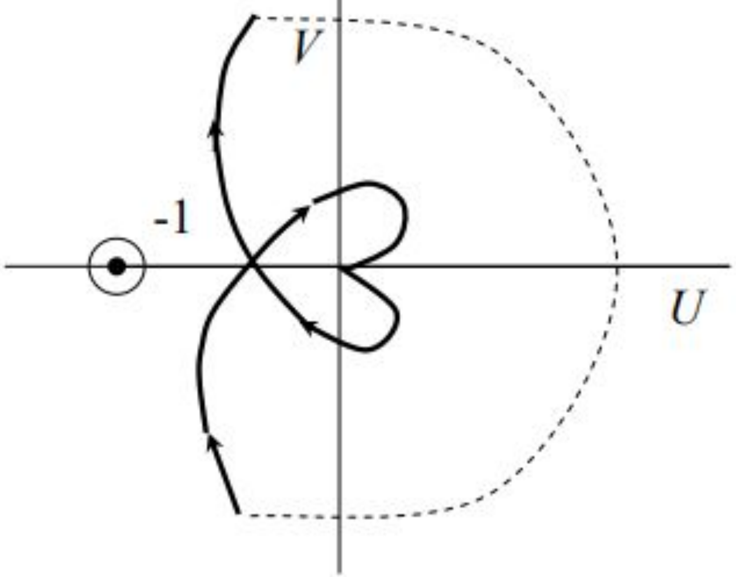


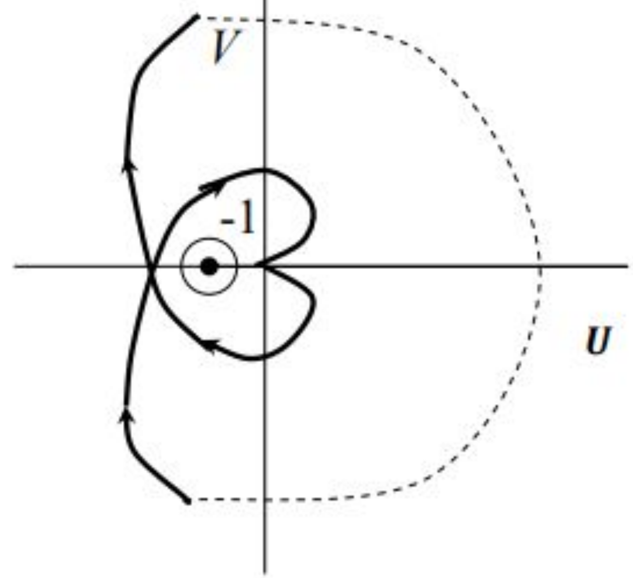
- m=2

- устойчивая неустойчивая

Критерий Найквиста

- Разомкнутая система астатическая. (Знаменатель передаточной функции имеет нулевые корни). Годограф зеркально отражается и кривые «замыкаются» на бесконечности. Тогда, если точка -1 на оси абсцисс оказалась вне замкнутой кривой – замкнутая система ус [illegible] я.





- устойчивая неустойчивая

Критерий Найквиста

- Замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, если годограф разомкнутой системы проходит через точку -1 оси абсцисс. Аналитически это условие можно записать в виде

$$1 + W(j\omega) = 0$$

- Пример. Дана передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(p) = \frac{2}{p^3 + 3p^2 + 4p + 1}$$

- Проверить с помощью критерия Найквиста, будет ли устойчива замкнутая система.
- По критерию Гурвица разомкнутая система устойчива.
- Найдём частотную характеристику.

$$W(j\omega) = \frac{2}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + j4\omega + 1} = \frac{2(1 - 3\omega^2) - j2(4\omega - \omega^3)}{(1 - 3\omega^2)^2 + (4\omega - \omega^3)^2}$$

Критерий Найквиста

- Выделим действительную и мнимую части

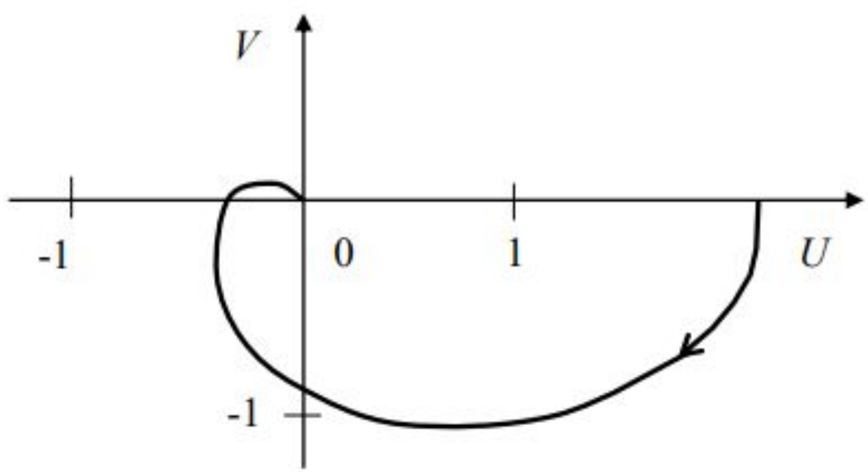
$$U(\omega)=\frac{2(1-3\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2+(4\omega-\omega^3)^2}$$

$$V(\omega)=\frac{-2(4\omega-\omega^3)}{(1-3\omega^2)^2+(4\omega-\omega^3)^2}$$

- По условию $V(\omega)$ = 0 находим частоты пересечения годографом действительной оси и соответствующие значения $U(\omega)$:
- $V(\omega)$ = 0, $4\omega-\omega^3=0$, $\omega_1=0$, $\omega_3=2$
- $U(0)$ = 2, $U(2)$ =- 0.18
- По условию $U(\omega)$ = 0, находим частоту пересечения годографом мнимой оси и соответствующее значение $V(\omega)$:
- $U(\omega)$ = 0, $1-3\omega^2=0$, $\omega_2=1/\sqrt{3}\approx 0.58$
- $V(0.58)$= -0.94

Критерий Найквиста

- Для ω = 1 получаем $U(1) = -0.3$, $V(1) = -0.46$.
- При ω =∞ $U(\infty) = 0$, $V(\infty) = 0$.
- Годограф имеет вид:



- Домашнее задание:
- Дана передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(p) = \frac{10}{p^2 + p + 1}$$

- Определить по критерию Найквиста будет ли устойчива замкнутая система.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!