

Линейная алгебра

- Матрицы. Основные понятия.
- Действия над матрицами
- Поиск обратной матрицы

Матрицы. Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из каких – либо элементов и имеющая m строк и n столбцов.

Элементами матрицы могут быть числа, алгебраические выражения, функции и т.д.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, элементы матрицы – теми же маленькими буквами.

Размерность матрицы обозначается: $\dim A = [m \times n]$

— количество строк количество столбцов

Матрицы. Основные понятия

Если $m \neq n$, то матрица называется **прямоугольной**.

Если $m = n$, то матрица называется **квадратной** (n - ного порядка).

Любое число (скаляр) можно представить как матрицу первого порядка, размерностью $[1 \times 1]$.

Матрица типа $[1 \times n]$ называется **матрица-строка**:

$$(a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n})$$

Матрица типа $[m \times 1]$ называется **матрица-столбец**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Матрицы. Основные понятия

Квадратная матрица называется **единичной**, если ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице, остальные – нулю (обозначается буквой **E**):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если все элементы квадратной матрицы равны нулю, то она называется **нуль-матрицей** и обозначается символом **O**.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицы. Основные понятия

Для каждой квадратной матрицы n - ного порядка существует определитель n - ного порядка, элементы которого равны соответствующим элементам матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель любой единичной матрицы равен единице.

Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется **вырожденной**, в противном случае матрица **невырожденная**.

Действия над матрицами

● Равенство матриц

Матрицы равны, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \dim A = \dim B; \quad a_{ij} = b_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -\frac{1}{3} & 81,2 \\ 16 & -3 & 0 \\ \sin(2\pi+1) & 45 & -\sqrt{53} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -\frac{1}{3} & 81,2 \\ 16 & -3 & 0 \\ \sin(2\pi+1) & 45 & -\sqrt{53} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

● Сложение (вычитание) матриц

Сумма и разность матриц существуют только для матриц одинакового размера, при этом соответствующие элементы матриц складываются или вычитаются.

$$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim A = \dim B = \dim C \\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 5 & -5 & 7 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

● Умножение матрицы на число

При умножении матрицы A на число k получается матрица того же размера, при этом каждый элемент матрицы A умножается на k .

$$B = k \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad \dim A = \dim B; \quad b_{ij} = a_{ij} \cdot k$$

Найти значение выражения: $C = A + 5 \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1+5 \cdot 2 & 3+5 \cdot (-4) & 2+5 \cdot 1 \\ 0+5 \cdot (-5) & -1+5 \cdot 0 & 4+5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -17 & 7 \\ -25 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

● Умножение матриц

Произведение матриц $A * B$ определено только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B , в противном случае произведение не существует.

$$\left. \begin{array}{l} \dim A = m \times n \\ \dim B = n \times k \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C = A \cdot B - \text{существует} \\ \dim C = m \times k \end{array}$$

Произведением матрицы A размера $[m \times n]$ с элементами a_{ij} на матрицу B размера $[n \times k]$ с элементами b_{jq} называется матрица C размера $[m \times k]$ с элементами:

$$c_{iq} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jq}$$

Действия над матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти $C = A * B$

$$\dim A = 2 \times 3$$

$$\dim B = 3 \times 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Diagram showing the dot product of the first row of A with the columns of B. Vertical lines connect the elements of the first row of A to the corresponding elements in the columns of B. Horizontal lines connect the results of the dot products to the first row of the resulting matrix C.

$$C_{12} = 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2$$
$$C_{11} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3$$
$$C_{13} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 14 & 24 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C_{21} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3$$
$$C_{22} = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2$$
$$C_{23} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0$$

Действия над матрицами

Свойства операции произведения матриц:

1) $A(BC) = (AB)C$;

2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$;

3) $(A + B)C = AC + BC$;

4) В общем случае для произведения матриц не действует переместительный закон: $A \cdot B \neq B \cdot A$

иногда AB существует, а BA не имеет смысла. В случае, когда $AB = BA$, матрицы A и B называются **коммутативными**.

5) Единичная матрица является коммутативной для любой квадратной матрицы того же порядка:

$$EA = AE = A$$

6) Для двух квадратных матриц A и B одного порядка произведение определителей равно определителю произведения .

$$\det A \cdot \det B = \det AB$$

Действия над матрицами

● Нахождение обратной матрицы

Обратной матрицей по отношению к данной невырожденной квадратной матрице A n -ного порядка, называется матрица, которая, будучи умноженной как слева, так и справа на данную матрицу, дает единичную матрицу.

Обратная матрица обозначается символом A^{-1} . Таким образом, согласно определению: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

$$A \rightarrow \det A \neq 0 \rightarrow A^T \rightarrow A^+ \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^+$$

Транспонированная матрица
Получается из матрицы A путем замены строк элементами матрицы A^T на его соответствующими столбцами

Присоединенная матрица
Получается путем замены каждого элемента матрицы A^T на его алгебраическое дополнение

Если определитель матрицы равен нулю, то обратная матрица не существует

Действия над матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^4 = 2$$

$\rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Из второй строки вычтем первую строку
 $\rightarrow A^+ = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix}$

Разложим определитель по элементам 3 столбца

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^2 = -2$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^3 = 2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^5 = 6$$